

---

**PME 3211 – Mecânica dos Sólidos II**

---

---

**Introdução ao Estudo da  
Flambagem de Barras**

---

---

***Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins***

---

---

***Novembro de 2020***

---

---

# 1 Apresentação

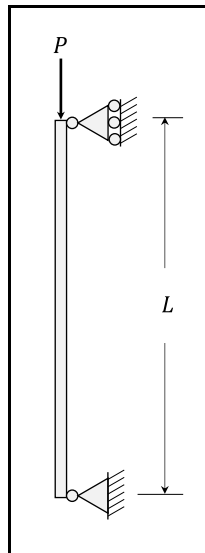
A presente apostila apresenta a quarta e última parte das notas de aula da disciplina Mecânica dos Sólidos II, que corresponde a uma introdução ao estudo da flambagem de barras. O conteúdo aqui presente é baseado no curso que venho ministrando há vários anos em parceria com o Prof. Dr. Roberto Ramos Jr. Boa parte do conteúdo desta apostila se baseia em notas de aulas ministradas pelo Prof. Ramos. Os exercícios aqui apresentados são questões de provas aplicadas nas disciplinas de Mecânica dos Sólidos, alguns de minha autoria, os outros de autoria do Prof. Ramos.

---

## 2 Conceito de Flambagem

Consideremos a barra vertical da Figura 1, que está submetida a uma força axial de compressão  $P$ . Uma barra vertical submetida a uma força axial é uma *coluna*. Se a força  $P$  for pequena, a barra sofre apenas deformação axial e permanece vertical. Contudo, se o valor de  $P$  for maior que um certo valor limite, a barra vai sofrer uma deflexão lateral conforme a Figura 2. Este fenômeno é conhecido como *flambagem*.

Você pode fazer uma experiência em casa, para verificar o fenômeno, comprimindo uma régua flexível com seus dedos. Não use a sua régua predileta nessa experiência porque você pode quebrá-la! Mais tarde veremos por que a régua pode quebrar, principalmente se ele não for muito flexível.



**Figura 1 – Barra submetida a força axial.**

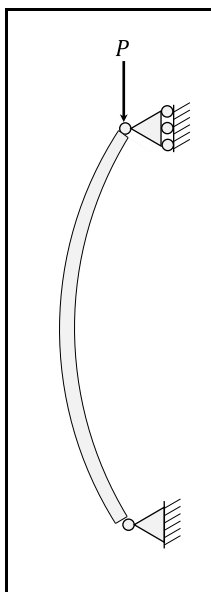
Note que a flambagem é um fenômeno que ocorre em estruturas *esbeltas* submetidas a altas forças axiais de *compressão*. Uma força de *tração* não poderia causar flambagem, porque ela tenderia a esticar a barra e, portanto, ela tenderia a fazer com que a barra continuasse na vertical.

A flambagem é um tipo de *instabilidade estrutural*. O conceito de *estabilidade estrutural* é muito semelhante ao conceito de estabilidade de sistemas dinâmicos. O equilíbrio de uma estrutura pode ser *estável*, *instável* ou *indiferente*.

Um equilíbrio é *estável* quando *pequenas causas* causam *pequenas consequências*. Por outro lado, um equilíbrio é *instável* quando *pequenas causas* causam *grandes consequências*. O equilíbrio *indiferente* é a situação limite entre o equilíbrio estável e o equilíbrio instável.

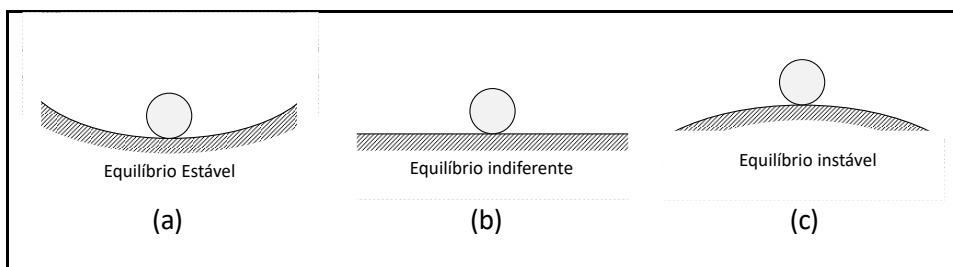
---

Na análise da estabilidade estrutural *causas* podem ser *esforços aplicados* ou *deslocamentos*, enquanto efeitos são *deslocamentos*, *deformações* ou *tensões*.



**Figura 2 – Barra flambada.**

A Figura 3 pode ser utilizada para ilustrar os tipos de equilíbrio. Na situação (a), se a bolinha sofrer um pequeno deslocamento, ela permanecerá em torno da posição de equilíbrio. Já na situação (c), se a bolinha sofrer um pequeno deslocamento, ela nunca voltará à posição de equilíbrio. Por último, na situação (b), se a bolinha sofrer um pequeno deslocamento, ela ficará em uma nova posição perto da posição inicial.



**Figura 3 – Tipos de equilíbrio.**

Neste módulo estudaremos a flambagem de uma barra, começando com um *modelo idealizado*, a partir do qual podemos introduzir os conceitos mais importantes ligados ao problema da flambagem de barras para, mais tarde, apresentar um modelo que representa uma barra real.

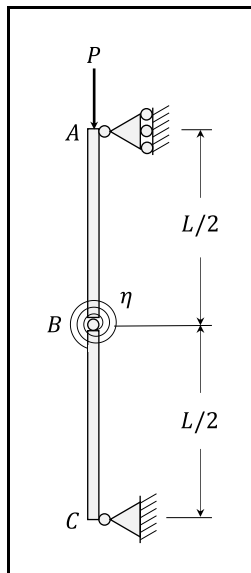
### 3 Modelo Idealizado

Para estudarmos o fenômeno da flambagem de barras, vamos usar, inicialmente, o modelo idealizado da Figura 4. Ele é formado por duas barras infinitamente rígidas ligadas por uma mola espiral. Essa mola reage linearmente a um ângulo  $\beta$  introduzido entre as barras com um binário restaurador  $\bar{M}_B$ , com

$$\bar{M}_B = \eta \beta \quad , \quad (1)$$

onde  $\eta$  é a constante elástica da mola. Assim, se as barras forem tiradas da posição vertical, a mola fará com que as barras voltem à posição vertical. Sempre? Veremos.

Note que, se houver um ângulo entre as barras, teremos uma solução análoga à de uma barra flambada: deslocamento lateral devido a uma força vertical  $P$ .



**Figura 4 – Modelo idealizado.**

Para estudar o problema, vamos começar com o diagrama de corpo livre da Figura 5. A partir dele podemos montar as equações de equilíbrio.

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &\Rightarrow H_A + H_C = 0 \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow V_C - P = 0 \\ \sum M_C = 0 &\Rightarrow H_A L = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

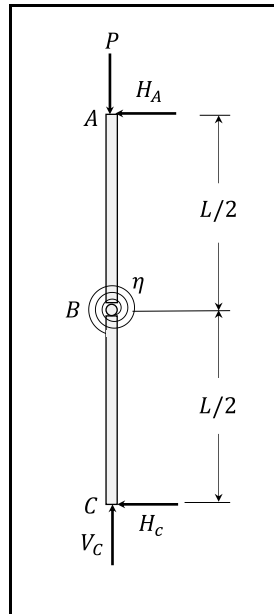
e, portanto,

---

$$H_A = 0$$

$$H_C = 0 \tag{3}$$

$$V_C = P$$



**Figura 5 – Diagrama de corpo livre do conjunto.**

Note que o equilíbrio do sistema na posição vertical é sempre possível. Note, também, que se as barras estiverem na posição vertical não há momento restaurador.

Vamos, agora, tirar o sistema da vertical, introduzindo um ângulo  $\theta$  conforme a Figura 6. Nesta situação podemos montar o diagrama de corpo livre da Figura 7, que permite montar as equações de equilíbrio:

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_C - P = 0 \tag{4}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow H_A L \cos \theta = 0$$

cuja solução é

$$H_A = 0$$

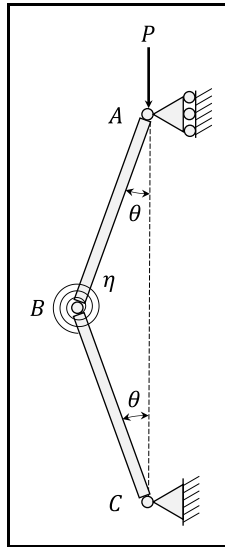
$$H_C = 0 \tag{5}$$

$$V_C = P$$

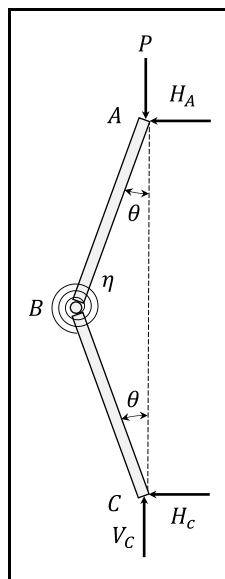
Note que a solução é exatamente igual à solução anterior e nada indica que não seja possível o equilíbrio na posição deformada. Mas o sistema volta à posição vertical, ou

---

não volta para a posição vertical? Não dá para responder a essa pergunta, a partir das equações (4), porque o momento restaurador da mola é um esforço interno e não aparece no diagrama de corpo livre. Para que ele apareça, é necessário explodir a estrutura.



**Figura 6 – Modelo idealizado na situação deformada.**



**Figura 7 – Diagrama de corpo livre do sistema na posição deformada.**

A Figura 8 apresenta o diagrama de corpo livre da estrutura explodida. A partir dele podemos montar as equações de equilíbrio:

---

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_B = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_B - P = 0 \quad (6)$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow H_A \frac{L}{2} \cos \theta - \frac{PL}{2} \sin \theta - \bar{M}_B = 0$$

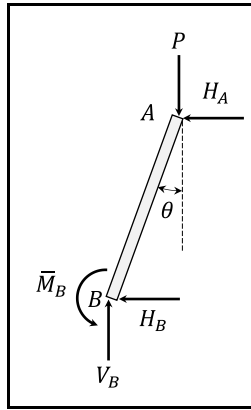
Já sabemos que  $H_A$  é nula, então a solução de (6) é

$$H_A = H_B = 0$$

$$V_B = 0 \quad (7)$$

$$\bar{M}_B = \frac{PL}{2} \sin \theta$$

A última das equações diz que o momento restaurador  $\bar{M}_B$  deve equilibrar o momento da força  $P$  em relação ao polo  $B$ .



**Figura 8 – Diagrama de corpo livre da estrutura explodida.**

Note que há dois efeitos opostos: o momento restaurador da mola, que tende a fazer com que a estrutura volte à posição vertical, e o momento da força  $P$  que tende a tirar a barra da posição vertical. Qual deles vence a queda de braço?

Note, também, que o momento da força  $P$  só aparece se a barra está inclinada e que o momento restaurador só aparece no diagrama explodido. Isto é importante lembrar no estudo da flambagem!

Veja na Figura 7 que quando as barras estão inclinadas de  $\theta$ , a mola sofreu uma variação de ângulo de  $2\theta$ . Então, da equação (1),

$$\bar{M}_B = \eta 2\theta \quad (8)$$

e, portanto, de (7):

$$\eta 2\theta = \frac{PL}{2} \sin \theta \quad (9)$$



---

ou,

$$\frac{PL}{4\eta} \operatorname{sen} \theta - \theta = 0 \quad (10)$$

Esta é a equação característica do problema, que permitirá o cálculo do ângulo  $\theta$  para o qual haverá equilíbrio entre o momento da força  $P$  e o momento restaurador da mola. Note que esta equação tem uma solução óbvia, a solução trivial,

$$\theta = 0 \quad (11)$$

ou seja, como já sabíamos, a posição vertical é sempre uma posição de equilíbrio. Mas existem outras posições de equilíbrio?

A primeira ideia para procura outra raiz de (10) é considerar que o ângulo  $\theta$  é muito pequeno e, portanto, seja válida a aproximação

$$\operatorname{sen} \theta = \theta \quad (12)$$

Dessa forma, a equação característica (10) pode ser escrita, na forma linear, como

$$\left(\frac{PL}{4\eta} - 1\right)\theta = 0 \quad (13)$$

Além da solução trivial existe uma outra solução:

$$P = \frac{4\eta}{L} \quad (14)$$

ou seja, existe um valor de  $P$  para o qual  $\theta$  pode assumir um valor não nulo. Esse valor é chamado de *carga crítica* ou *carga de Euler*:

$$P_{cr} = \frac{4\eta}{L} \quad (15)$$

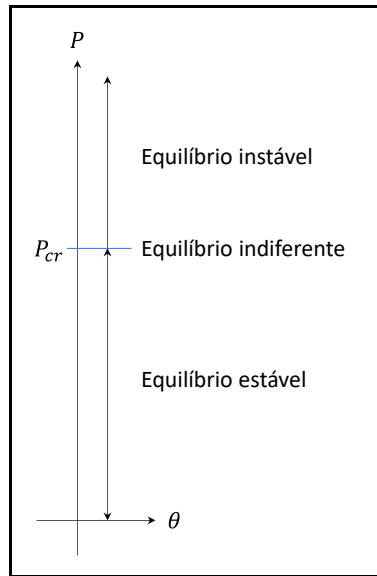
Podemos resumir, então, a solução da equação (13) como:

$$P \neq P_{cr} \Rightarrow \theta = 0 \quad (16)$$

$$P = P_{cr} \Rightarrow \theta \text{ é qualquer}$$

Mas essa solução é intuitiva? É razoável? Qual é o problema dela, você consegue identificar? Podemos representar a solução do problema pelo esquema da Figura 9, que mostra o *diagrama de estabilidade* da estrutura. Ele indica que para um valor de  $P$  acima da carga crítica o valor trivial de  $\theta$  representa uma situação de equilíbrio instável. Mas note que essa informação não está na solução da equação (13). Onde estará?

Note que supusemos que os ângulos eram muito pequenos e fizemos a aproximação (12) para linearizar a equação característica (10). É nessa linearização que estamos perdendo informação!



**Figura 9 – Diagrama de estabilidade para a equação linear.**

Levemos em conta, agora, até a primeira parcela não linear na série de Taylor da função seno:

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} \quad (17)$$

Com essa aproximação, a equação (10) pode ser escrita como:

$$\left[ \frac{PL}{4\eta} \left( 1 - \frac{\theta^2}{6} \right) - 1 \right] \theta = 0 \quad (18)$$

ou,

$$\left( 1 - \frac{\theta^2}{6} - \frac{4\eta}{PL} \right) \theta = 0 \quad (19)$$

ou, ainda, usando (15),

$$\left( 1 - \frac{\theta^2}{6} - \frac{P_{cr}}{P} \right) \theta = 0 \quad (20)$$

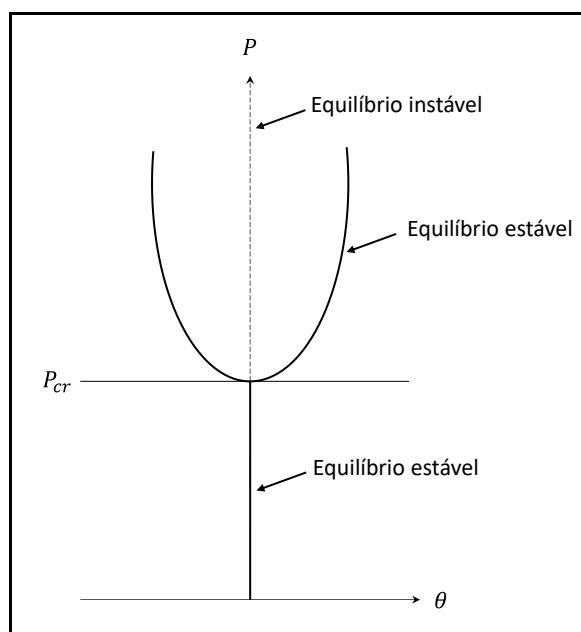
Esta equação, além da solução trivial, tem mais duas raízes

$$\theta = \pm \sqrt{6} \sqrt{1 - \frac{P_{cr}}{P}} \quad (21)$$

---

Note que essas duas soluções só existem para  $P > P_{cr}$ . Podemos montar o diagrama de estabilidade da Figura 10. Quando  $P$  atinge a carga crítica, ocorre uma bifurcação no gráfico, a solução trivial passa a ser instável e aparecem duas soluções estáveis que dependem do valor de  $P$ . Este comportamento parece muito mais razoável do que o obtido pela equação linear e representa qualitativamente bem a flambagem de uma coluna. Esta bifurcação é conhecida na literatura como bifurcação do tipo *pitchfork*.

Se uma coluna perfeita estiver submetida a uma força axial superior à carga crítica, ela estará em equilíbrio instável. Se a ela for aplicada uma pequena perturbação, ela buscará abruptamente uma das duas posições de equilíbrio estável, ocorrendo a flambagem da coluna. Para qual lado a coluna vai flambar, vai depender da perturbação aplicada.



**Figura 10 – Diagrama de estabilidade para a equação não-linear.**

Mas se você repetir várias vezes a experiência com a sua régua, ela vai flambar sempre para o mesmo lado. Porque nada na natureza é perfeito, sempre haverá um lado preferencial devido às imperfeições que são inerentes a qualquer estrutura.

Um ponto fundamental que deve ser observado é que, embora a solução do sistema linearizado seja qualitativamente ruim, pois não consegue prever adequadamente o que acontece após a flambagem, ela consegue prever exatamente o valor da carga crítica. Esta observação é geral e é importante, porque na maior parte dos problemas de engenharia estamos interessados em evitar a flambagem e não em saber o que ocorre após o seu início. Por isso, para determinar a carga crítica ou carga de Euler, podemos usar equações linearizadas, cuja solução é bem mais simples.

## 4 Equação Diferencial da Curva de Deflexão incluindo o Efeito da Força Normal

Seja a barra da Figura 11, submetida a uma carga distribuída genérica  $q(x)$  e a uma força normal constante e igual a  $P$ . Submetida a esse carregamento, ela sofrerá uma deflexão. A linha média da barra, inicialmente reta, pode ser representada, após a deflexão, por uma curva  $v(x)$  que é chamada de *curva de deflexão* ou *linha elástica*. Vamos assumir que o sentido positivo de  $v$  seja o mesmo de  $y$ .

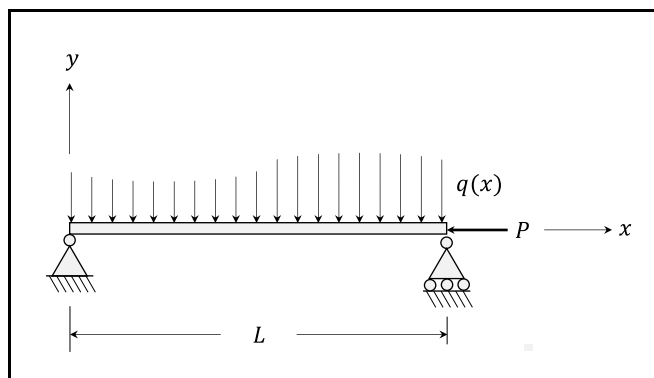


Figura 11 – Barra submetida a carga distribuída e força normal.

Se isolarmos um elemento infinitesimal de comprimento  $dx$  da barra, podemos montar a Figura 12 e, por meio dela, montar as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\Sigma F_V = 0 &\Rightarrow V - \left( V + \frac{dV}{dx} dx \right) - q dx = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q(x)\end{aligned}\quad (22)$$

e

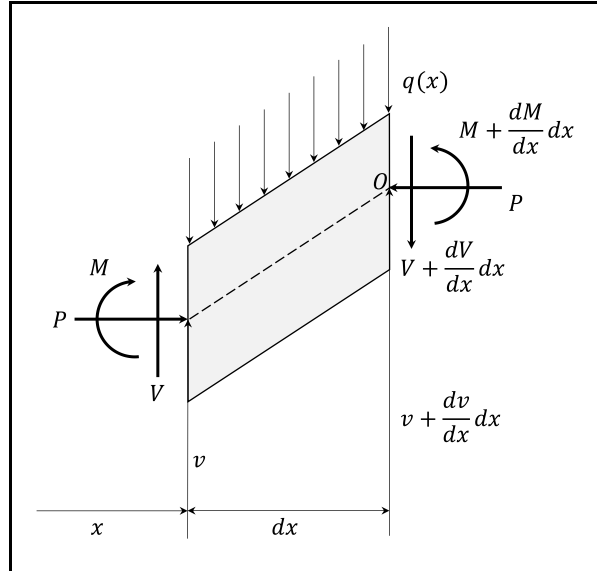
$$\begin{aligned}\Sigma M_O = 0 &\Rightarrow -M + \left( M + \frac{dM}{dx} dx \right) - V dx \\ &\quad + P \frac{dV}{dx} dx + q dx \frac{dx}{2} = 0 \\ &\Rightarrow V = \frac{dM}{dx} + P \frac{dv}{dx}\end{aligned}\quad (23)$$

Substituindo (23) em (22) temos:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dM}{dx} + P \frac{dv}{dx} \right) = -q(x)\quad (24)$$

e, como  $P$  é constante,

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = -q(x) \quad (25)$$



**Figura 12 – Elemento infinitesimal da barra.**

Já vimos, em Mecânica dos Sólidos I, que, se o material é de comportamento elástico-linear, o momento fletor é proporcional à curvatura  $\kappa$ ,

$$M = EI \kappa = EI \frac{d\theta}{ds} \quad (26)$$

onde  $s$  é a coordenada curvilínea medida ao longo da barra e que, para pequenos ângulos,

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (27)$$

e

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (28)$$

Assim, para pequenos ângulos,

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (29)$$

---

Substituindo (29) em (23) temos:

$$V = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + P \frac{dv}{dx} \quad (30)$$

Substituindo (29) em (25) temos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 v}{dx^2} = -q(x) \quad (31)$$

Se a barra for prismática a equação (31) pode ser escrita como

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = -q(x) \quad (32)$$

e a equação (30) como

$$V = EI \frac{d^3 v}{dx^3} + P \frac{dv}{dx} \quad (33)$$

ou, usando a notação de Lagrange,

$$EI v^{iv} + P v'' = -q(x) \quad (34)$$

e

$$V = EI v''' + P v' \quad (35)$$

Se não houver carga distribuída aplicada, a equação (34) se reduz à equação homogênea:

$$EI v^{iv} + P v'' = 0 \quad (36)$$

Definindo-se a constante  $k$  tal que

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (37)$$

a equação (36) pode ser colocada na forma:

$$v^{iv} + k^2 v'' = 0 \quad (38)$$

e a equação (35) na forma:

$$\frac{V}{EI} = v''' + k^2 v' \quad (39)$$

A solução geral da equação diferencial (38) pode ser escrita como:

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D \quad (40)$$

---

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes a determinar, que dependem das condições de vínculo da barra.

A partir de (27) e (40) podemos montar uma expressão para o ângulo:

$$\theta(x) = v' = kA \cos kx - kB \sin kx + C \quad (41)$$

A partir de (29) e (41) podemos mostra uma expressão para o momento fletor:

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2 A \sin kx - k^2 B \cos kx \quad (42)$$

A partir de (39) e (40), obtemos a expressão para a força cortante,

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2 C \quad (43)$$

As expressões (40), (41), (42) e (43) serão usadas no próximo item para estudar a flambagem de barras, considerando diferentes condições de vínculo. Mas note que elas foram obtidas a partir de uma equação que foi linearizada para pequenos ângulos e, portanto, elas permitirão o cálculo das cargas críticas, mas não permitirão a determinação da linha elástica da barra flambada, apenas a forma desta.

## 5 Flambagem de Colunas com Diferentes Condições de Vínculo

### 5.1 Coluna biapoçada

Consideremos a coluna biapoçada da Figura 13. Como ela é biapoçada, tanto o deslocamento horizontal quanto o momento nas duas extremidades são nulos:

$$\begin{aligned}v(0) = v(L) = 0 \\ M(0) = M(L) = 0\end{aligned}\tag{44}$$

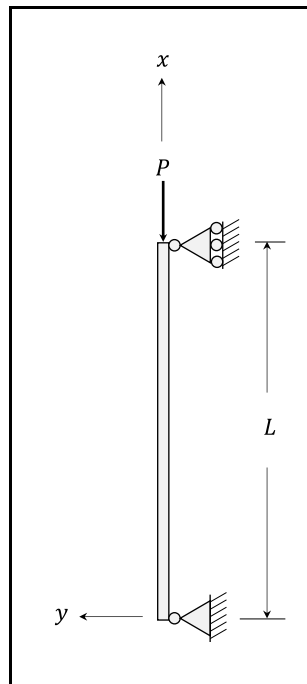


Figura 13 – Coluna biapoçada.

As condições de vínculo (44) podem ser aplicadas às expressões (40) e (42), obtendo-se:

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0 \tag{45}$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} kL + B \operatorname{cos} kL + CL + D = 0 \tag{46}$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \tag{47}$$

e



---

$$M(L) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} kL + B \cos kL = 0 \quad . \quad (48)$$

As expressões (45) a (48) formam um sistema de equações algébricas, cujas incógnitas são as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . É imediato verificar que

$$B = C = D = 0 \quad (49)$$

e que

$$A \operatorname{sen} kL = 0 \quad . \quad (50)$$

Para (50) estar satisfeita, existem duas possibilidades,

$$A = 0 \quad (51)$$

ou

$$\operatorname{sen} kL = 0 \quad . \quad (52)$$

A primeira possibilidade não nos interessa, pois aí teríamos

$$A = B = C = D = 0 \quad , \quad (53)$$

que corresponde à solução trivial, ou seja, à situação em que a barra permanece vertical. A segunda possibilidade é a equação característica do problema, que permitirá determinar quando existem soluções não triviais. De fato, a solução de (52) é

$$kL = n\pi \quad , \quad (54)$$

para

$$n = 1, 2, \dots \quad , \quad (55)$$

que, lembrando de (37), correspondem às forças axiais:

$$P_n = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad . \quad (56)$$

Para essas forças, existe uma solução não trivial para a equação diferencial da linha elástica, ou seja, a coluna flamba.

Normalmente nos interessa a menor força para a qual ocorre flambagem, que é a *carga crítica* ou *carga de Euler*:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad . \quad (57)$$

É importante notar que a carga crítica depende do valor de dois parâmetros: a rigidez flexional  $EI$  e o quadrado do comprimento  $L$  da coluna. Quanto maior for a rigidez

---

flexional, mas alta será a força axial necessária para a coluna flambar e quanto maior for o comprimento, menor será essa força.

Note, também que a coluna vai sempre flambar *em torno do eixo em relação ao qual o momento de inércia da seção é mínimo*. Se a coluna tiver seção circular, não haverá direção preferencial de flambagem. Mas se ela for retangular, por exemplo, o momento de inércia  $I$  a ser utilizado no cálculo da carga crítica é o menor momento de inércia. Veja o que acontece, por exemplo, para a experiência da régua fina: em torno de que direção ela flamba sempre?

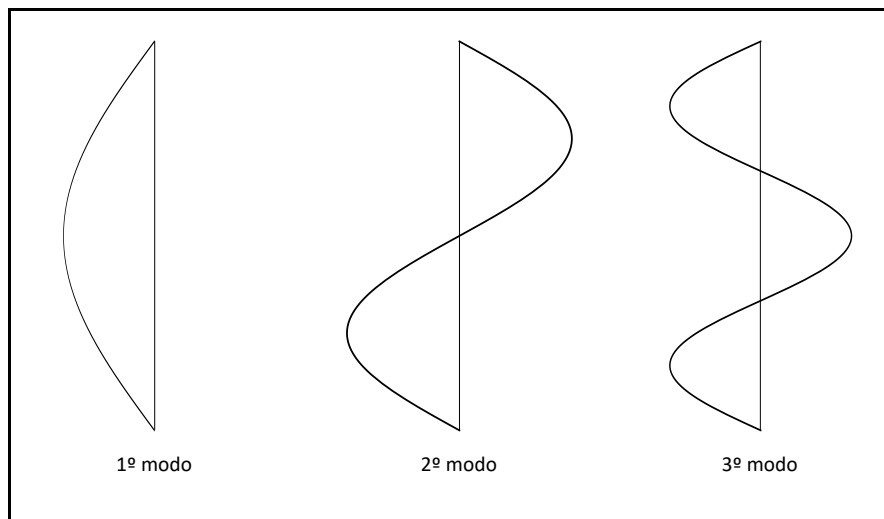
Por último, vamos investigar qual será a forma da coluna biapoçada após a flambagem. Por causa de (49), a equação da linha elástica (40) se reduz a

$$v(x) = A \operatorname{sen} kx \quad . \quad (58)$$

Então, para cada valor de  $n$  de (54), teremos:

$$v_n(x) = A \operatorname{sen} \left( n\pi \frac{x}{L} \right) \quad . \quad (59)$$

São os *modos de flambagem*. O modo de flambagem é a forma que a curva de deflexão assume quando é aplicada a força correspondente da expressão (56). Na Figura 14 estão esquematizados os três primeiros modos. O modo de maior interesse é o primeiro modo, que corresponde à carga crítica. Note que conseguimos determinar apenas a forma com que a estrutura flamba, mas não conseguimos determinar qual é a *flecha*, ou seja, qual é a máxima deflexão sofrida pela coluna pois, para isso, seria necessária uma análise não linear, conforme o capítulo anterior. A constante  $A$  fica indeterminada.



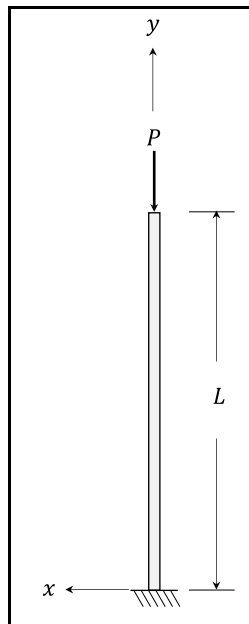
**Figura 14 – Três primeiros modos de flambagem para a coluna biapoçada.**

---

## 5.2 Coluna Engastada

Consideremos, agora, a coluna apresentada na Figura 15. Ela é engastada na extremidade inferior e livre na extremidade superior. Então, tanto o deslocamento quanto a rotação são nulos na extremidade inferior e tanto a força cortante quanto o momento fletor são nulos na extremidade superior. Esses vínculos podem ser traduzidos matematicamente como:

$$\begin{aligned}v(0) &= 0 \\v'(0) &= 0 \\M(L) &= 0 \\V(L) &= 0\end{aligned}\tag{60}$$



**Figura 15 – Coluna engastada.**

As condições de vínculo (60) podem ser aplicadas às expressões (40), (41), (42) e (43), obtendo-se:

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0 \quad , \quad (61)$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow kA + C = 0 \quad , \quad (62)$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} kL + B \operatorname{cos} kL = 0 \quad , \quad (63)$$

e

---

$$V(L) = 0 \Rightarrow C = 0 \quad . \quad (64)$$

As expressões (61) a (64) formam um sistema de equações algébricas, cujas incógnitas são as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . É imediato verificar que

$$A = C = 0 \quad , \quad (65)$$

que

$$B = -D \quad (66)$$

e que

$$B \cos kL = 0 \quad . \quad (67)$$

Para (67) estar satisfeita, existem duas possibilidades,

$$B = 0 \quad (68)$$

ou

$$\cos kL = 0 \quad . \quad (69)$$

A primeira possibilidade não nos interessa, pois aí teríamos

$$A = B = C = D = 0 \quad , \quad (70)$$

que corresponde à solução trivial, ou seja, à situação que a barra permanece vertical. A segunda possibilidade é a equação característica do problema, que permitirá determinar quando existem soluções não triviais. De fato, a solução de (69) é

$$kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad , \quad (71)$$

para

$$n = 1, 2, \dots \quad , \quad (72)$$

que, lembrando de (37) correspondem às forças axiais:

$$P_n = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad . \quad (73)$$

Para essas forças, existe uma solução não trivial para a equação diferencial da linha elástica, ou seja, a coluna flamba.

Normalmente nos interessa a menor força para a qual ocorre flambagem, que é a *carga crítica* ou *carga de Euler*:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad . \quad (74)$$

Se compararmos (74) com (57), verificamos a semelhanças da duas soluções. Novamente os parâmetros de que a carga crítica depende são a rigidez flexional  $EI$  e o quadrado do comprimento  $L$ . Note que a carga crítica para a coluna biapoada é quatro vezes a carga crítica da coluna engastada. É importante essa observação: a carga crítica depende das condições de vínculo! Lembre-se também que  $I$  é o mínimo momento de inércia da seção transversal coluna.

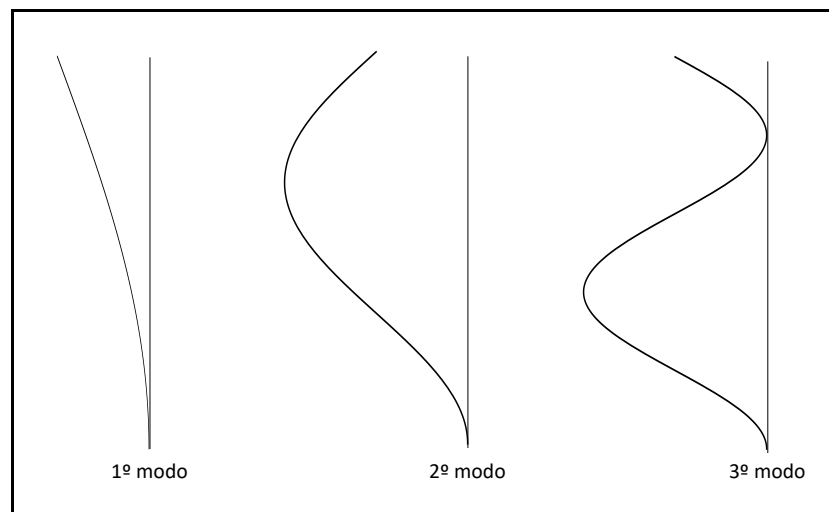
Por último, vamos investigar qual será a forma da coluna engastada após a flambagem. Por causa de (65) e (66), a equação da linha elástica (40) se reduz a

$$v(x) = D(1 - \cos kx) \quad (75)$$

Então, usando (71), teremos os modos de flambagem:

$$v_n(x) = D \left[ 1 - \cos \left( (2n - 1) \frac{\pi x}{2L} \right) \right] \quad (76)$$

Na Figura 16 estão esquematizados os três primeiros modos de flambagem para a coluna engastada. Compare-os com os modos da coluna biapoada que aparecem na Figura 14.



**Figura 16 – Três primeiros modos de flambagem para a coluna engastada.**

### 5.3 Coluna Biengastada

Consideremos a coluna da Figura 17. Ela está vinculada por um engaste na sua extremidade inferior e por um engaste deslizante no topo e está submetida a uma força axial  $P$ . Tanto na extremidade inferior, quanto na superior, são nulos os deslocamentos horizontais e as rotações. Assim, podemos escrever as condições de contorno:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (77)$$

$$\theta(0) = \theta(L) = 0$$

As condições de vínculo (77) podem ser aplicadas às expressões (40) e (41), obtendo-se:

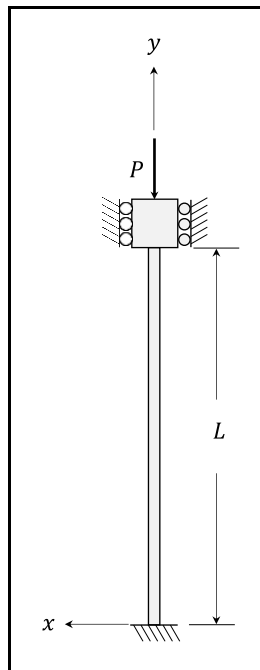
$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0 \quad (78)$$

$$\theta(L) = 0 \Rightarrow kA + C = 0 \quad (79)$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} kL + B \cos kL + CL + D = 0 \quad (80)$$

e

$$\theta(L) = 0 \Rightarrow kA \cos kL - kB \operatorname{sen} kL + C = 0 \quad (81)$$



**Figura 17 – Coluna biengastada.**

As expressões (78) a (81) formam um sistema de equações algébricas, cujas incógnitas são as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  e que pode ser colocado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} kL & \cos kL & L & 1 \\ k \cos kL & -k \operatorname{sen} kL & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

É imediato verificar que existe a solução trivial

---


$$A = B = C = D = 0 \quad , \quad (83)$$

que corresponde à situação de equilíbrio da coluna na posição vertical.

Para que o sistema (82) tenha uma outra solução, não trivial, é necessário que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } kL & \cos kL & L & 1 \\ k \cos kL & -k \text{sen } kL & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (84)$$

Desenvolvendo este determinante, chegamos à equação característica:

$$2 - 2 \cos kL - kL \text{sen } kL = 0 \quad (85)$$

Usando as relações trigonométricas:

$$\cos kL = 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{kL}{2} \quad (86)$$

e

$$\text{sen } kL = 2 \text{sen} \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} \quad (87)$$

a equação (85) pode ser escrita como:

$$\text{sen} \frac{kL}{2} \left( \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} - \text{sen} \frac{kL}{2} \right) = 0 \quad (88)$$

A solução desta equação é obtida por métodos numéricos. Porém, analisando o seu comportamento podemos obter diretamente a sua primeira raiz não nula. Para que (88) esteja satisfeita ou

$$\text{sen} \frac{kL}{2} = 0 \quad (89)$$

ou

$$\frac{kL}{2} = \tan \frac{kL}{2} \quad (90)$$

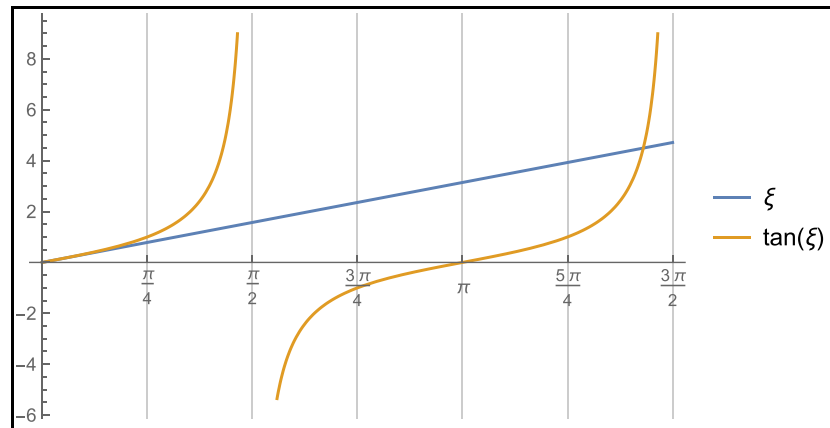
A primeira raiz não nula de (89) é

$$\frac{kL}{2} = \pi \quad (91)$$

Por outro lado, para obter a primeira raiz de (90) é necessário um método numérico, mas podemos estimá-la pelo gráfico da Figura 18, que mostra que a primeira raiz não nula de (90) está entre  $\frac{5\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{2}$ . Portanto, a primeira raiz de (85) é  $\pi$ . Assim, a carga crítica corresponderá à situação em que

---

$$kL = 2\pi \quad (92)$$



**Figura 18 – Gráfico das funções  $\xi$  e  $\tan(\xi)$ .**

Lembrando de (37),

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (93)$$

Se compararmos (93) com (74) e (57), verificamos a semelhanças das três soluções. Novamente os parâmetros de que a carga crítica depende são a rigidez flexional  $EI$  e o quadrado do comprimento  $L$ . Note que a carga crítica para a coluna biengastada é quatro vezes a carga crítica da coluna biapoada e dezesseis vezes a carga crítica da coluna engastada. Note como a carga crítica depende fortemente das condições de vínculo: quanto mais vinculada for a coluna, maior será a carga crítica. Não custa lembrar que o momento de inércia  $I$  é o momento de inércia mínimo da seção.

Aplicando (92) nas equações (78) a (81) podemos concluir que

$$A = C = 0 \quad (94)$$

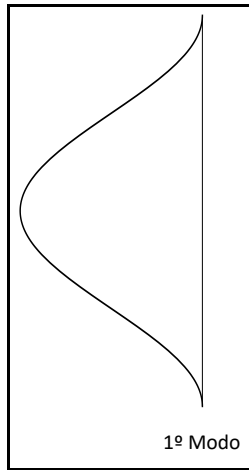
e que

$$B = -D \quad (95)$$

Então, de (40) e (92), o primeiro modo de flambagem, que está esquematizado na Figura 19, terá a forma

$$v_1(x) = D \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (96)$$





*Figura 19 – Primeiro modo de flambagem para a coluna biengastada.*

---

## 6 Comprimento de Flambagem

Comparando as expressões (57), (74) e (93), vemos que elas podem ser colocadas em um forma geral:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_f^2} \quad (97)$$

onde  $\ell_f$  é o *comprimento efetivo* ou *comprimento de flambagem*, que depende das condições de vínculo. A Tabela 1 traz os comprimentos de flambagem para as condições de vínculo que nós estudamos.

**Tabela 1 – Comprimentos de flambagem.**

Tipo de coluna	$\ell_f$
Engastada	$2L$
Apoiada	$L$
Biengastada	$\frac{L}{2}$

O comprimento de flambagem, geometricamente, é o comprimento de uma *meia-senoide* no modo de flambagem. Analise a Figura 14, a Figura 16 e a Figura 19 e verifique os valores da Tabela 1. Em muitos casos é possível esboçar o modo de flambagem, observadas as condições de vínculo. Desenhado o modo de flambagem é fácil obter o comprimento de flambagem e, da expressão (97), a carga crítica.

---

## 7 Tensões Críticas

Após calcular a carga crítica, podemos calcular a *tensão crítica*, dividindo a carga crítica pela área da seção transversal  $A$ . Da equação (97) :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A \ell_f^2} \quad (98)$$

Definindo-se o *raio de giração*:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (99)$$

a tensão crítica pode ser escrita como:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E r^2}{\ell_f^2} \quad (100)$$

Definindo-se, por último, a *razão de esbeltez*:

$$\lambda = \frac{\ell_f}{r} \quad (101)$$

a tensão crítica pode ser escrita como:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (102)$$

ou seja, ela fica dependendo apenas do módulo de elasticidade  $E$  e do índice de esbeltez  $\lambda$ . Para um aço com módulo de elasticidade:

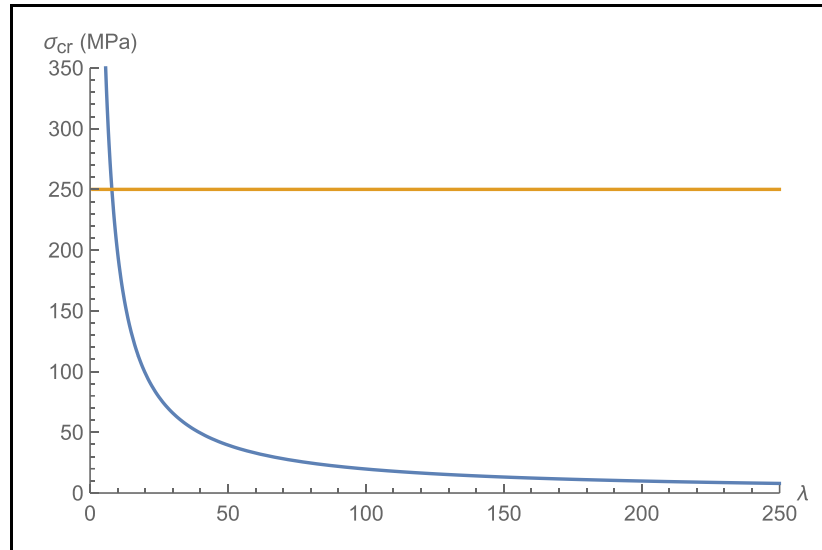
$$E = 200 \text{ GPa} \quad (103)$$

podemos esboçar o gráfico da Figura 20. A linha laranja na figura representa a tensão de escoamento para um material em que

$$\sigma_e = 250 \text{ MPa} \quad (104)$$

Se a tensão crítica for maior que a tensão de escoamento, não ocorrerá mais flambagem no regime elástico, o material plastifica antes de a flambagem ocorrer. Isto ocorre para baixos índices de esbeltez.

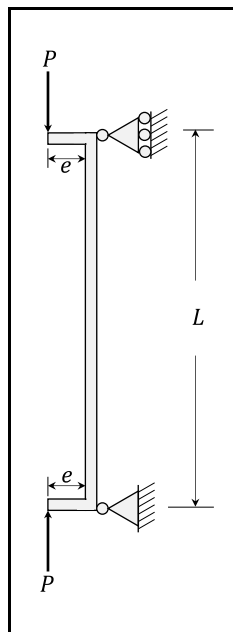
Se o material for frágil e a tensão crítica for maior que a tensão de ruptura, o material vai romper antes e não haverá flambagem no regime elástico.



**Figura 20 – Tensão crítica em função do índice de esbeltez.**

## 8 Colunas com Carregamentos Axiais Excêntricos

Na natureza nada é perfeito. A carga axial aplicada sobre uma coluna pode não estar perfeitamente centralizada. Vamos estudar, neste capítulo, o que acontece nesse caso. Para isso, vamos considerar a coluna da Figura 21 à qual está aplicada uma *carga excêntrica* com excentricidade  $e$ . Podemos transferir a carga excêntrica para o centro da coluna adicionando binários de transporte de magnitude  $Pe$  nas suas extremidades, conforme a Figura 22.



**Figura 21 – Coluna submetida a carga axial excêntrica.**

Temos, então, as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (105)$$

$$M(0) = M(L) = Pe$$

As condições de contorno (105) podem ser aplicadas às expressões (40) e (42), obtendo-se, lembrando de (37),

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0 \quad , \quad (106)$$

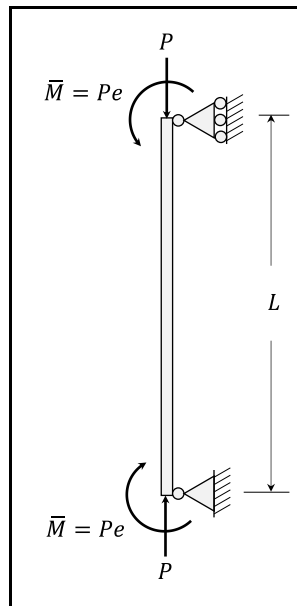
$$v(L) = 0 \Rightarrow A \operatorname{sen} kL + B \cos kL + CL + D = 0 \quad , \quad (107)$$

$$M(0) = Pe \Rightarrow B = -e \quad , \quad (108)$$

---

e

$$M(L) = Me \Rightarrow A \operatorname{sen} kL + B \cos kL = -e \quad (109)$$



**Figura 22 – Coluna submetida a carga axial + binário.**

As expressões (106) a (109) formam um sistema de equações algébricas, cujas incógnitas são as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . É imediato verificar que

$$B = -D = -e \quad (110)$$

que

$$C = 0 \quad (111)$$

e que

$$A = -e \frac{1 - \cos kL}{\operatorname{sen} kL} \quad (112)$$

Note que este sistema de equações *não possui uma solução trivial* e que a sua solução depende da excentricidade  $e$  da força. Ou seja, não haverá a solução de equilíbrio vertical.

Usando as relações trigonométricas (86) e (87) podemos escrever:

$$A = -e \tan \frac{kL}{2} \quad (113)$$

Assim, aplicando as constantes obtidas na expressão (40), podemos escrever a equação da curva de deflexão:

$$v(x) = -e \left( \tan \frac{kL}{2} \operatorname{sen} kx + \cos kx - 1 \right) \quad (114)$$

A deflexão máxima  $\delta_{m\acute{a}x}$  ocorre, por simetria, no meio da coluna. Assim,

$$\delta_{m\acute{a}x} = -v\left(\frac{L}{2}\right) = e \left( \tan \frac{kL}{2} \operatorname{sen} \frac{kL}{2} + \cos \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (115)$$

ou seja,

$$\delta_{m\acute{a}x} = e \left( \sec \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (116)$$

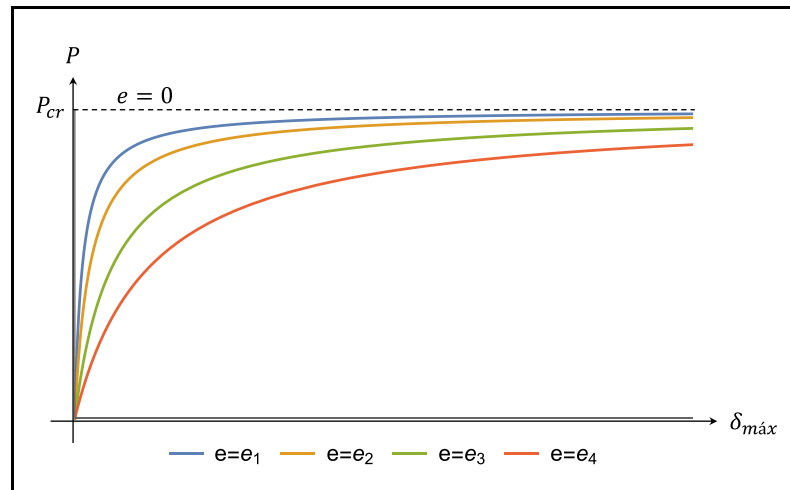
ou, ainda, usando(37) e (57),

$$\delta_{m\acute{a}x} = e \left( \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right) \quad (117)$$

Note que,

$$P \rightarrow P_{cr} \Rightarrow \delta_{m\acute{a}x} \rightarrow \infty \quad (118)$$

A partir de (117) podemos esboçar o gráfico da Figura 23 onde é possível ver como a deflexão máxima varia com a excentricidade e com a força, comparando com o caso da carga centralizada.

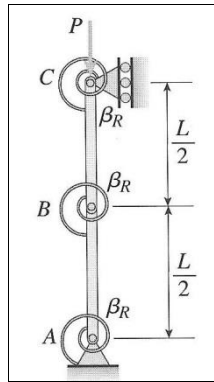


**Figura 23 – Deflexão máxima em função da força axial ( $0 < e_1 < e_2 < e_3 < e_4$ ).**

Não há flambagem bem definida para o caso da carga excêntrica, porque sempre haverá flexão. E a coluna poderá vir a falhar por tensões excessivas de flexão.

## 9 Exercícios Resolvidos

### Exercício 1:

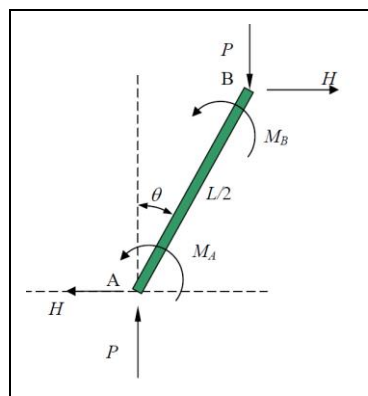


A figura mostra uma estrutura idealizada formada por duas barras rígidas AB e BC, cada uma com comprimento  $L/2$ . Em A, B e C existem molas, cada uma com rigidez à rotação  $\beta_R$ . Pode-se determinar o valor da carga crítica.

### Resolução:

Impondo o equilíbrio das barras AB e BC na configuração de equilíbrio não-trivial (isto é, após a flambagem do mecanismo), teremos:

- Equilíbrio da barra AB:



*Observações:*

- o esforço horizontal  $H$  poderia ser admitido imediatamente como nulo (em decorrência da simetria da estrutura), mas vamos considerá-lo em nossa solução;
- observe que o equilíbrio de forças verticais e horizontais já está garantido;
- os momentos  $M_A$  e  $M_B$  são esforços restauradores (tendem a fazer com que a configuração da estrutura volte à configuração de referência).

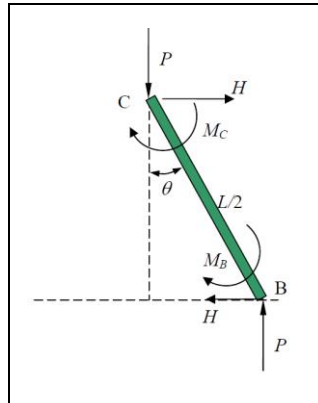


---

Impondo o equilíbrio de momentos tomando A como polo, virá

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + M_B = P \frac{L}{2} \sin \theta + H \frac{L}{2} \cos \theta$$

Equilíbrio da barra BC:



Impondo o equilíbrio de momentos tomando C como polo, virá:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_B + M_C = P \frac{L}{2} \sin \theta - H \frac{L}{2} \cos \theta$$

Somando as duas equações, virá:

$$M_A + 2M_B + M_C = PL \sin \theta$$

Da linearidade das molas A, B e C, teremos:

$$M_A = \beta_R \theta; \quad M_B = \beta_R (2\theta); \quad M_C = \beta_R \theta$$

(observe que o ângulo de rotação na mola B é o dobro do ângulo de rotação nas molas A e C).

Substituindo na equação anterior teremos:

$$6\beta_R \theta = PL \sin \theta$$

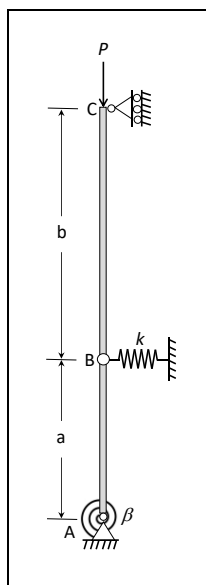
que linearizada fornece:

$$6\beta_R \theta = PL \theta \Rightarrow (PL - \beta_R) \theta = 0$$

E, para que haja soluções diferentes da trivial, devemos ter:

$$PL - 6\beta_R = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{6\beta_R}{L}$$

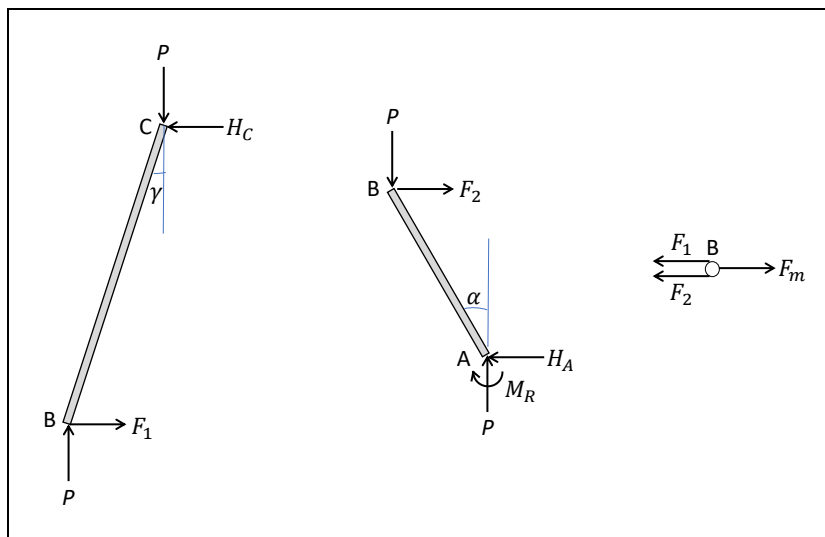
## Exercício 2:



A figura mostra uma estrutura idealizada formada por duas barras infinitamente rígidas, AB e BC, conectadas em B por uma articulação. A estrutura está vinculada em A por uma articulação ligada a uma mola rotacional linear de constante elástica  $\beta$  e em C, por um apoio simples. À articulação B está conectada uma mola translacional linear de constante elástica  $k$ . A estrutura está submetida a uma força vertical  $P$ . Pede-se determinar o valor crítico de  $P$ .

## Resolução:

Para calcular a carga crítica é necessário estudar o equilíbrio da estrutura na posição deformada com seus componentes separados. Assim pode-se montar o seguinte DCL:



O próximo passo é montar equações de equilíbrio para os três componentes. Como se deseja apenas obter a carga crítica, essas equações podem ser linearizadas:

i) Equilíbrio de momentos para a barra AB:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Pa\alpha - F_2a = M_R = \beta\alpha$$

---

ii) Equilíbrio de momentos para a barra BC:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow P\gamma - F_1 = 0$$

iii) Equilíbrio de forças para o nó B:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = ka\alpha = kb\gamma$$

De i, ii e iii:

$$[Pa(a + b) - b(ka^2 + \beta)]\alpha = 0$$

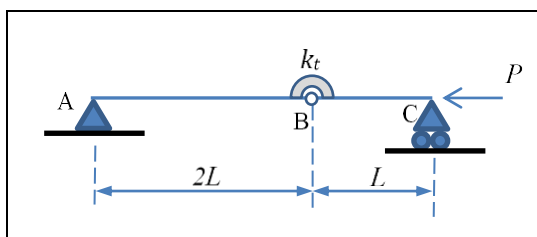
A carga crítica é o valor de  $P$ , para o qual existe uma solução não trivial ( $\alpha \neq 0$ ), ou seja,

$$P_{cr} = \frac{b(ka^2 + \beta)}{a(a + b)}$$

### **Exercício 3:**

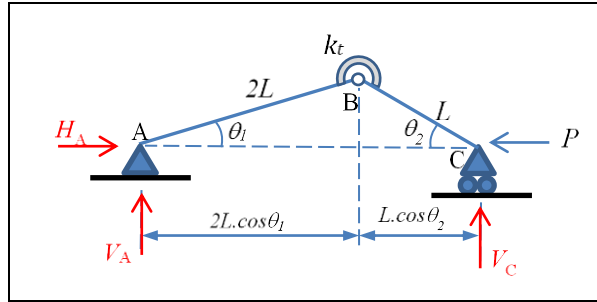
A estrutura idealizada indicada na figura é formada por duas barras rígidas (AB e BC) conectadas por uma mola de torção de constante  $k_t$ . Os comprimentos das barras AB e BC são respectivamente  $2L$  e  $L$ . Desprezando o peso próprio das barras e considerando que sobre o ponto C é aplicada uma força de compressão de magnitude  $P$ , pede-se:

- determinar as reações de apoio em A e em C;
- obter a equação diferencial para a determinação dos estados de equilíbrio considerando a possibilidade de não-linearidade geométrica;
- linearizar a equação diferencial obtida no item anterior e calcular a carga crítica de flambagem do sistema.



### **Resolução:**

- consideremos uma configuração de equilíbrio genérica como a indicada na figura abaixo:



Pelas equações de equilíbrio da estática, teremos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = P$$

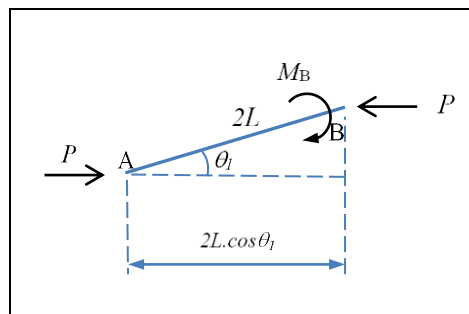
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C (2L \cos \theta_1 + L \cos \theta_2) = 0$$

De onde resultam:

$$H_A = P, \quad V_A = V_C = 0$$

b) Impondo o equilíbrio de momentos para o trecho AB, teremos:



$$P 2L \sin \theta_1 = M_B = k_t (\theta_1 + \theta_2)$$

Mas, da figura é imediato constatar que:

$$2L \sin \theta_1 = L \sin \theta_2 \Rightarrow 2 \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \arcsen(2 \sin \theta_1)$$

Logo, a equação de equilíbrio, considerando a possibilidade de não linearidade geométrica fica:

$$P 2L \sin \theta_1 = k_t (\theta_1 + \arcsen(2 \sin \theta_1))$$

c) Considerando a hipótese de linearidade geométrica (pequenos deslocamentos e pequenas rotações), teremos as relações linearizadas:

$$P 2L \theta_1 = k_t (\theta_1 + \theta_2)$$

e

$$2L \operatorname{sen} \theta_1 = L \operatorname{sen} \theta_2 \Rightarrow 2 \theta_1 \cong \theta_2$$

Logo:

$$P 2L \theta_1 = k_t (\theta_1 + 2\theta_1) \Rightarrow (2PL - 3k_t) \theta_1 = 0$$

De onde decorre:

$$\theta_1 = 0$$

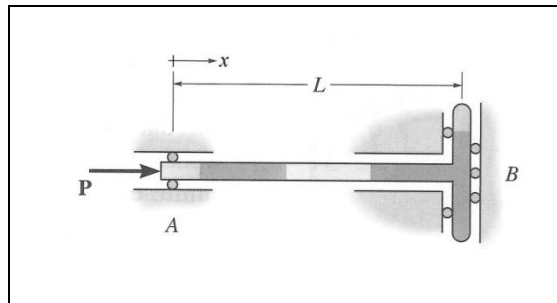
que é a solução trivial, ou,

$$P = \frac{3k_t}{2L} = P_{cr}$$

#### **Exercício 4:**

A coluna da figura está submetida a uma força axial  $P$ . O vínculo em A permite rotação e deslocamento horizontal, mas não permite deslocamento vertical. O vínculo em B permite deslocamento vertical, mas não permite nem deslocamento horizontal nem rotação. Pedem-se:

- a solução geral  $v(x)$  da equação diferencial da linha elástica;
- as condições de contorno que representam os vínculos;
- o valor crítico de  $P$ ;
- o modo de flambagem fundamental.



#### **Resolução:**

a)

$$v(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + Cx + D$$

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

b)

$$v(0) = 0$$

$$v''(0) = 0$$

---

$$v'(L) = 0$$

$$v'''(L) = 0$$

c)

$$v(0) = 0 \Rightarrow B + D = 0$$

$$v''(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$v'(L) = 0 \Rightarrow Ak \cos kL + C = 0$$

$$v'''(L) = 0 \Rightarrow Ak^3 \cos kL = 0$$

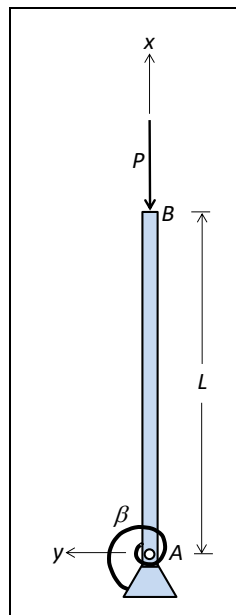
Para haver uma solução não trivial

$$\Rightarrow \cos kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

d)

$$v(x) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}$$

### **Exercício 5:**



A coluna da figura é prismática, possui rigidez flexional  $EI$  e está submetida a uma força de compressão  $P$ . A sua extremidade  $B$  é livre e a sua extremidade  $A$  está vinculada a um pino e a uma mola linear cuja constante de rigidez rotacional é  $\beta$ . Pede-se:

- obter a equação característica que permite calcular o valor crítico de  $P$ ;
- calcular o valor crítico de  $P$  para o caso em que a mola é muito rígida ( $\beta \rightarrow \infty$ );
- calcular o valor crítico de  $P$  para o caso em que a barra é muito rígida ( $EI \rightarrow \infty$ ).

---

### **Resolução:**

a) A linha elástica é descrita por:

$$v(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx + Cx + D$$

com

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

sujeita às condições de contorno:

$$\text{i) } v(0) = 0 \Rightarrow A + D = 0$$

$$\text{ii) } M(0) = \beta\theta(0) \Rightarrow EIv''(0) = \beta v'(0) \Rightarrow -EI k^2 A = \beta(kB + C)$$

$$\text{iii) } M(L) = 0 \Rightarrow v''(L) = 0 \Rightarrow -k^2 A \cos kL - k^2 B \operatorname{sen} kL = 0$$

$$\text{iv) } V(L) = 0 \Rightarrow v'''(L) + k^2 v'(L) = 0$$

$$\Rightarrow k^3 A \operatorname{sen} kL - k^3 B \cos kL - k^3 A \operatorname{sen} kL + k^3 B \cos kL + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Substituindo iv e ii em em iii, obtemos a equação característica:

b) Para  $\beta \rightarrow \infty$ , o problema é equivalente ao de uma coluna engastada/livre e a equação característica fica:

$$\cos kL = 0$$

Então:

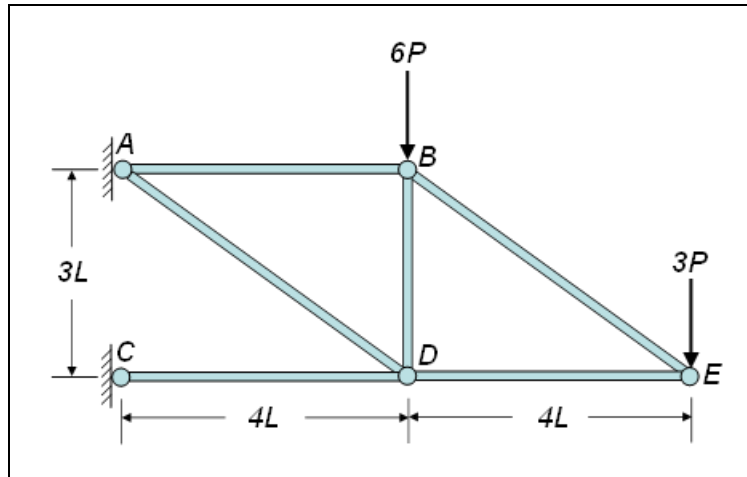
$$kL = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{cr} = EI \frac{\pi^2}{4L^2}$$

Para  $EI \rightarrow \infty$ , o problema equivale ao de um modelo de coluna rígida ligada a uma mola de rigidez finita:

$$PL \operatorname{sen} \theta = \beta \theta \Rightarrow PL \theta \cong \beta \theta \Rightarrow (PL - \beta) \theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{\beta}{L}$$

### **Exercício 6:**

Sabendo que na treliça da figura todas as barras são prismáticas e têm a mesma rigidez à flexão  $EI$ , pede-se determinar o máximo valor de  $P$  de forma a não ocorrer flambagem em nenhuma das barras.



**Resolução:**

a) Usando método dos nós obtêm-se as forças nas barras:

$F_{AB} = 4P$	tração
$F_{AD} = 15P$	tração
$F_{CD} = -16P$	compressão
$F_{BD} = -9P$	compressão
$F_{BE} = 5P$	tração
$F_{DE} = -4P$	compressão

c) As barras que podem sofrer flambagem são apenas aquelas que estão submetidas a esforços de compressão. Como são barras de treliça, todas elas são biarticuladas. Assim, a carga crítica de uma barra genérica será dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

Esta expressão deve ser aplicada a cada uma das barras em compressão; o valor crítico de  $P$  será o menor valor obtido.

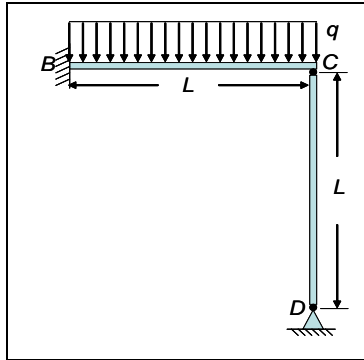
Barra $CD$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{256L^2}$
Barra $BD$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{81L^2}$



Barra DE	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{64L^2}$
----------	-----------------------------------

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{256L^2}$$

**Exercício 7:**

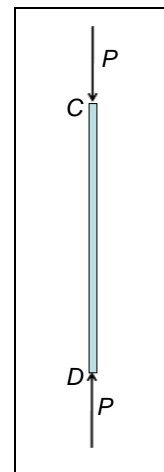
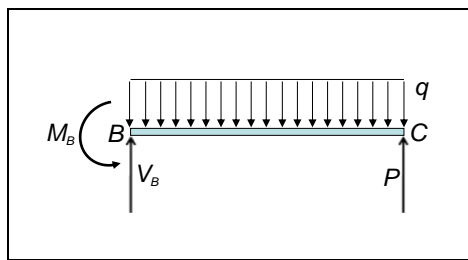


A estrutura da figura é composta por duas barras iguais, BC e CD, de comprimento L. A barra BC está engastada em B e articulada à barra CD em C. A barra CD, por sua vez, está articulada em D. Sobre a barra BC está aplicado um carregamento distribuído de intensidade q, constante. Conhecidos o módulo de elasticidade E, a área da seção transversal A e o momento de inércia I das barras, pede-se calcular:

- a) a força que atua na barra CD;
- b) o máximo valor de q para que não ocorra flambagem da barra CD.

**Resolução:**

a) Diagramas de corpo livre:



Para a barra BC:

$$M(x) = Px - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial U^*_{BC}}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{PL^3}{3} - \frac{qL^4}{8} \right]$$

Para a barra CD:

$$U_{CD} = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\frac{\partial U^*_{CD}}{\partial P} = \frac{PL}{EA}$$

Pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial P} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial U^*_{BC}}{\partial P} + \frac{\partial U^*_{CD}}{\partial P} = 0 \\ \Rightarrow \frac{PL^2}{3EI} + \frac{PL}{EA} &= \frac{qL^4}{8EI} \Rightarrow P = \frac{3}{8} \frac{L^3 A}{L^2 A + 3I} q \end{aligned}$$

d) Carga de Euler para coluna bi-apoiada:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Máximo valor de q para não ocorrer flambagem:

$$q_{cr} = \frac{8\pi^2 EI(L^2 A + 3I)}{3L^5 A}$$

### **Exercício 8:**

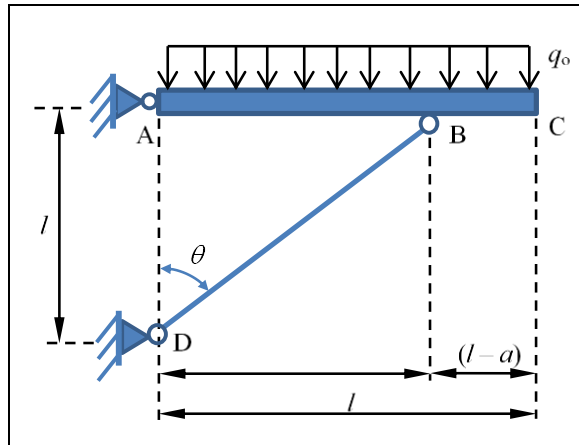
A viga ABC indicada na figura é rígida, possui comprimento  $l$ , e suporta um carregamento uniformemente distribuído de intensidade  $q_0$ . Considerando que a distância  $a$  entre os pontos A e B possa ser regulada (dentro do intervalo possível  $0 < a \leq l$ ) de modo a permitir um melhor desempenho estrutural do sistema, pede-se:

- determinar o coeficiente de segurança da barra BD em relação à flambagem (admita que a flambagem ocorra no regime elástico-linear do material);
- determinar o valor ótimo da distância  $a$  de modo a maximizar a coeficiente de segurança em relação à flambagem da barra BD. Determine, então, o valor do coeficiente de segurança para a geometria ótima encontrada.

Dados:

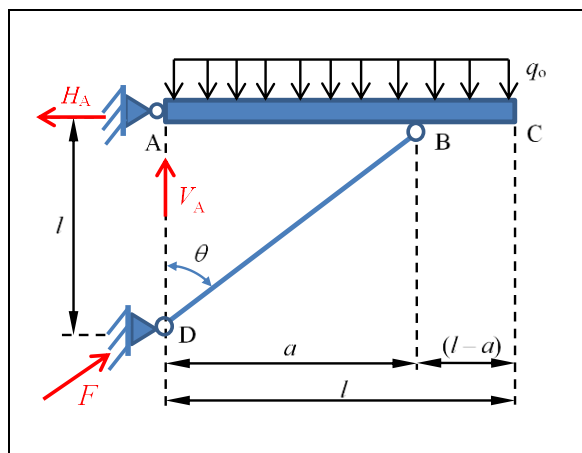
$l$  = distância entre pontos A e D = comprimento de ABC

$EI$  = rigidez flexional da barra AB



**Resolução:**

a) a figura a seguir ilustra o diagrama de corpo livre da estrutura:



As equações de equilíbrio fornecem as seguintes relações:

$$V_A + F \cos \theta = q_0 l$$

$$H_A = F \sin \theta$$

$$F \cos \theta \ a = \frac{q_0 l^2}{2}$$

Da geometria da estrutura, temos:

$$\tan \theta = \frac{a}{l} \Rightarrow a = l \tan \theta$$

$$F = \frac{q_0 l}{2 \sin \theta}$$

Como a barra BD está biapoiada, sua primeira carga crítica será:

---

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{a^2 + l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2((\tan \theta)^2 + 1)}$$

O coeficiente de segurança com relação à flambagem da barra BD será:

$$CS = \frac{P_{cr}}{F} = \frac{\pi^2 EI}{l^2((\tan \theta)^2 + 1)} \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{q_0 l} = \frac{2\pi^2 EI}{q_0 l^3} f(\theta)$$

onde:

$$f(\theta) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{(\tan \theta)^2 + 1}$$

O que se procura, de fato, é maximizar o coeficiente de segurança com relação à flambagem do membro BD. Assim, determinando os pontos críticos da função  $f(\theta)$ , teremos:

$$f'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{\cos \theta ((\tan \theta)^2 + 1) - \operatorname{sen} \theta \left( \frac{2 \tan \theta}{\cos^2 \theta} \right)}{[(\tan \theta)^2 + 1]^2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

portanto (utilizando a relação fundamental da trigonometria):

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Daí:

$$\tan \theta_{\text{ót}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resultando:

$$a_{\text{ót}} = l \tan \theta_{\text{ót}} = \frac{\sqrt{2}}{2} l \cong 0,707 l$$

Das relações já vistas anteriormente:

$$CS = \frac{2\pi^2 EI}{q_0 l^3} f(\theta)$$

Onde, para o valor ótimo de  $\theta$ , encontramos:

$$f(\theta) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{(\tan \theta)^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

---

logo:

$$CS = \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \frac{\pi^2 EI}{q_0 l^3}$$