Matemática III

$3^{\underline{o}}$ Semestre de 2020

$3^{\underline{a}}$ Prova - Peso 1 - 2020

Entrega: 16/11/2020

Nesta prova você deve escolher 10 "Afirmações" para analisar, responder, justificar e entregar. Deve também entregar tabela abaixo preenchida com suas 10 escolhas, **apresentada no início do seu arquivo**.

Tabela a ser preenchida que deve vir no início de seu arquivo:

Afirmação	V ou F?	Afirmação	V ou F?	Afirmação	V ou F?
Afirmação 1		Afirmação 6		Afirmação 11	
Afirmação 2		Afirmação 7		Afirmação 12	
Afirmação 3		Afirmação 8		Afirmação 13	
Afirmação 4		Afirmação 9		Afirmação 14	
Afirmação 5		Afirmação 10		Afirmação 15	

Responda se cada uma das afirmações abaixo é Verdadeira ou Falsa, e apresente uma breve justificativa.

Afirmação 1 Se V um espaço vetorial com produto interno e $u, v, w \in V$ são linearmente independentes, então a projeção ortogonal de w no subespaço vetorial gerado por u e v é dada por

$$proj_{L(\{u,v\})}w = proj_u w + proj_v w = \frac{\langle\, w \mid u \,\rangle}{\langle\, u \mid u \,\rangle}u + \frac{\langle\, w \mid v \,\rangle}{\langle\, v \mid v \,\rangle}v.$$

Afirmação 2 Se V é um espaço vetorial com produto interno e $A = \{v_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset V$ é ortogonal e não contém o vetor nulo então A é l.i.

Afirmação 3 Se V é um espaço vetotial com o produto interno, e $S \subset V$ um subespaço vetorial, e $A = \{u_1, \ldots, u_k\}$ é gerador de S, então $x \in V$ é ortogonal a S se e somente se x é ortogonal a u_j, para todo $j = 1, \ldots, k$.

Afirmação 4 A função $f\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definida por $f(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, satisfaz o primeiro e o segundo axiomas (homogeneidade em cada linha e aditividade em cada linha) que definem função determinante.

Afirmação 5 Se $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ for obtida escalonando $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ e tiver exatamente uma linha nula, então a imagem da transformação linear $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definida por $T(x) = Ax$ tem dimensão 3.

Afirmação 6 Se $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ é obtida de $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ com a sequência de operações: (1) permuta-se duas linhas distintas, (2) tira-se o dobro de uma linha de outra linha, (3) multiplica-se uma linha por 5, (4) divide-se uma linha por 11, e $\det B = 3$, então $\det A = \frac{15}{11}$.

Afirmação 7 O volume do paralelepípedo de $\mathbf{R}^3$ com um vértice em A cujas arestas incidentes em A são $\overline{AB}, \overline{AC}$ é dado por

$$|\langle\, (B - A) \times (C - A) \mid D - A \,\rangle|.$$

Afirmação 8 $G : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbf{R}$ definida por $G(f) = f(0) + f(1)$, $\forall f \in \mathcal{C}([0,1])$, é uma transformação linear.

Afirmação 9 Se $T : V = \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}^2$ é dada por $T(A) = (a_{11} + a_{22}, a_{21} + a_{22})$, $\forall A \in V$, então $\dim \ker(T) = 2$.

Afirmação 10 Se $T : V = \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}^3$ é dada por $T(A) = (a_{11} + a_{22}, a_{21} + a_{22}, a_{11} + a_{22} + a_{21} + a_{22})$, $\forall A \in V$, então $\dim \ker(T) = 1$.

Afirmação 11 Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$ e $T_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ dada por $T_A(x) = Ax$, então os vetores associados às colunas de A formam um conjunto de geradores para a imagem de $\mathrm{Im}(T_A)$, e os vetores associados às linhas de A formam um conjunto de geradores para $(\ker(T_A))^{\perp}$

Afirmação 12 Se $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ é dada por $T(x) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + x_2, x_1 + 5x_3)$ então **existe** base de $\mathbf{R}^3$ formada por autovetores de T.

Afirmação 13 Se $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ é dada por $T(x) = (2x_1 + x_2, -x_1 + 4x_2, 2x_3)$ então **não existe** base de $\mathbf{R}^3$ formada por autovetores de T.

Afirmação 14 Existe base de $\mathbf{C^3}$ formada de autovetores de $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & -i \\ i & 2 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$.

Afirmação 15 *(1.0)* Se V um espaço vetorial euclidiano sobre $\mathbf{R}$ e $T : V \to V$ linear, anti-simétrica, e λ é autovalor de T então $\lambda = 0$.