Matemática III

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2020

$2^{\underline{a}}$ Prova - Peso 1 - 2020

Entrega: 16/11/2020

Nesta prova você deve escolher e fazer uma Questão de cada Grupo para entregar. Deve também entregar tabela abaixo preenchida com suas escolhas, **apresentada no início do seu arquivo**.

Tabela a ser preenchida que deve vir no início de seu arquivo:

Questão	Se fez, preencha com X	Questão	Se fez, preencha com X
Questão 1 1,5		Questão 7 1,5	
Questão 2 1,5		Questão 8 1,5	
Questão 3 1,5		Questão 9 1,5	
Questão 4 1,5		Questão 10 1,5	
Questão 5 1,5		Questão 11 1,5	
Questão 6 1,5		Questão 12 1,5	

Grupo I

Questão 1 Seja $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ o espaço das matrizes 2×2.

Considere em V o produto escalar definido por $\langle\, H \mid K \,\rangle = h_{11}k_{11} + 2h_{12}k_{12} + 3h_{21}k_{21} + 4h_{22}k_{22}$.

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in V$.

(a) Ache $C = proj_A B$.

(b) Calcule o ângulo entre A e B.

Grupo II

Questão 2 Considere o espaço vetorial $V_3 \cong \mathbf{R}^3$. Calcule:

(a) A área do paralelogramo de arestas adjacentes $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ onde $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 3, 5)$.

(b) A área do triângulo de vérices $(0, 0, 0), (1, 2, 3)$ e $(3, 3, 5)$.

(c) O volume do paralelepípedo de arestas adjacentes $\overline{OA}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$ onde $A = (1, 2, 3), B = (3, 3, 5)$ e $C = (1, 3, 2)$.

Questão 3 Ache uma base ortonormal de $V_0 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid Ax = 0\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

Questão 4 Considere o sistema linear $Ax = b$ dado por

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 5 & 10 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 4 & 3 \\ 5 & 10 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Ache a forma escalonada de Gauss da matriz aumentada do sistema.

(b) Calcule o determinante da submatriz de A em que a última linha é suprimida.

Grupo III

Exercício 1 Seja $E = \mathbf{R}^3$. Neste exercício, $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ representará o vetor $(\alpha, \beta, \gamma) \in E$. Dados dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in E$ considere o vetor $u \times v \in E$ definido por

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Note que podemos escrever formalmente

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.$$

Para $u, v, w \in E$, justifique as seguintes afirmações (a), (b) e (c):

(a) $u \times v = (0, 0, 0)$ se u é múltiplo de v.
(b) $u \times v$ é ortogonal a u e a v.
(c) $\langle\ u \times v \mid w\ \rangle = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$.

Questão 5 Use produto vetorial para obter um vetor $\vec{a}$, que seja unitário, e que seja ortogonal ao plano de equação

$$X = (1, 3, -4) + t(2, 3, 1) + s(4, -3, 0), t, s \in \mathbf{R}.$$

Grupo IV

Questão 6 $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ é linear tal que $T(1, 2) = (1, 1, 1)$ e $T(3, 3) = (2, 2, 2)$.
(a) T é injetora? Justifique. (b) Para cada $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, calcule $T(x, y)$.

Questão 7 Seja T a transformação linear que a cada $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ associa seu simétrico em relação à reta $x = y$.
(a) Calcule $T(x, y)$. (b) Ache uma base de $\ker T$.

Grupo V

Questão 8 Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ definida por

$$T(A) = (a_{11} + a_{22}) + (a_{11} + a_{12})x + (a_{22} + a_{21})x^2 + (a_{22} + a_{12} + a_{21})x^3.$$

Sejam $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3$ e

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ache a matriz de T em relação às bases

$$B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\} \text{ de } \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R}) \text{ e } D = \{p_0, p_1, p_2, p_3\} \text{ de } \mathcal{P}_3(\mathbf{R}).$$

Grupo VI

Questão 9 Seja $V = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ = espaço vetorial das sequências de números reais $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$.

Considere a transformação linear $\sigma : V \to V$ dada por $\sigma(x) = (x_{n+1})_{n\in\mathbf{N}} = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$.
Determine os autovalores e correspondentes autovetores de σ.

Questão 10 Seja $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbf{R})$ e $F : V \to V$ definida por $F(A) = A^t, \forall A \in V$.
Ache os autovalores de F e os correspondentes autovetores.

Grupo VII

Questão 11 Mostre que em $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ com o produto interno $\langle\ h \mid k\ \rangle = \int_{-1}^{1} h(t)k(t)dt$, a transformação linear $T : V \to V$ que a cada p associa $T[p]$ definido por $T[p](x) = p(-x)$ é simétrica.

Questão 12 Mostre que em $V = \mathcal{P}_0(\mathbf{R})$ = espaço dos polinômios reais que se anulam em -1 e em 1, com o produto interno $\langle\ h \mid k\ \rangle = \int_{-1}^{1} h(t)k(t)dt$, a transformação linear $T : V \to V$ que a cada p associa $T[p]$ definido por $T[p](x) = p'(x)$ é antissimétrica.