

PRODUTO TOTAL E PRODUTO MARGINAL

A LEI DE MITSCHERLICH - Nas primeiras décadas do século XX, Eilhard Alfred Mitscherlich (1874-1956) publicou alguns trabalhos que estudavam a relação entre o produto de uma cultura vegetal e a oferta de nutrientes. A relação entre essas variáveis ficou conhecida como a Lei de Mitscherlich, que pode ser expressa como

$$y = A[1 - 10^{-c(x+b)}]$$

em que y é a quantidade produzida por unidade de área e x é a quantidade de nutriente aplicada por unidade de área da cultura. A , b , c são parâmetros que representam respectivamente a produção máxima possível da cultura, a oferta do nutriente presente naturalmente no solo, e o coeficiente de eficácia no nutriente na cultura considerada.

O produto marginal¹ do nutriente considerado é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(10)Ac}{10^{c(x+b)}}$$

Os Gráficos 1 e 2 representam respectivamente o produto total e o produto marginal do nutriente considerado.

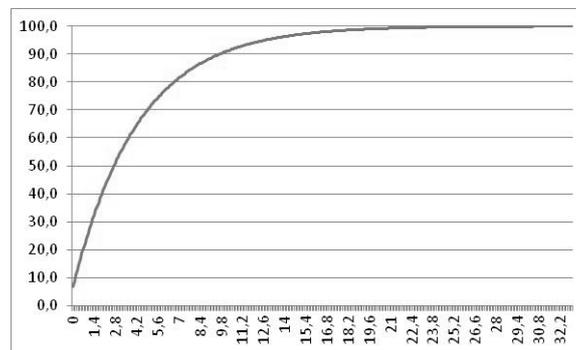


Gráfico 1 – Produto total do nutriente (função de produção): $A=100$; $b=0,3$; $c=0,1$

¹ O produto marginal de um insumo ou de um fator de produção é a contribuição de um pequeno incremento na quantidade do insumo ou fator para a quantidade total de produto. Seja x a quantidade de insumo; y , a de produto; e $y=f(x)$ uma função que relaciona o insumo ao produto (chamada de função de produção). O produto total é dado por $f(x)$. O produto médio é $y/x = f(x)/x$. O produto marginal é igual a $f(x+\Delta x)/\Delta x$ ou $\Delta y/\Delta x$ (se a função de produção for diferenciável, dy/dx).

Para uma exposição do conceito, além da “apostila” no e-disciplinas, veja:

<https://pt.khanacademy.org/economics-finance-domain/microeconomics/firm-economic-profit/labor-marginal-product-rev/v/a-firm-s-marginal-product-revenue-curve?modal=1>

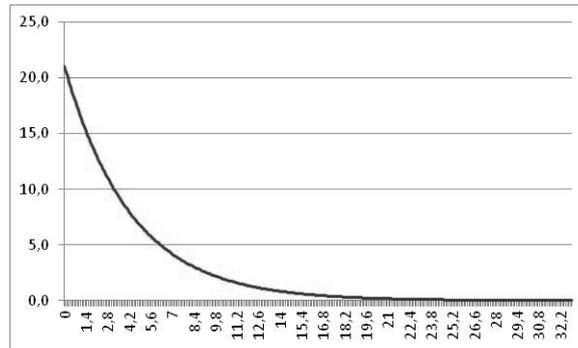


Gráfico 2 – Produto marginal do nutriente: $A=100$; $b=0,3$; $c=0,1$

$A=100$; $b=0,3$; $c=0,1$

Questões:

Considerando a aplicação de 4 unidades do nutriente em uma unidade de área da cultura:

1. Encontre o produto total correspondente. ($x = 4 \rightarrow y = ?$)
2. Encontre o produto marginal do nutriente ($x = 4 \rightarrow dy/dx = ?$)

Suponha agora que o preço do produto é $p = 2$, e o do nutriente, $w = 1$

3. Determine a quantidade de nutriente x^* que maximiza o lucro do produtor (π)

$$\max_x \pi = py - wx = p A [1 - 10^{-c(x+b)}] - wx$$

4. Encontre a demanda do insumo x , em função da quantidade produzida. ($x = f(y)$)
5. Escreva a função custo variável. $CV(y) = g(w, y)$

As quantidades dos demais insumos e serviços produtivos (sementes, água, trabalho ...) não variam. A despesa com esses insumos e serviços durante o ciclo de produção é igual a \$ 10.

6. Escreva a função Custo Total, $C(w, y)$, considerando que o custo total é a soma do custo fixo e do custo variável.

1. Produto Total, $x = 4$. (Quantas unidades de produto serão obtidas se forem aplicadas 4 unidades de insumo?)

$$y = A[1 - 10^{-c(x+b)}]$$

$$y = 100[1 - 10^{-0,1(4+0,3)}] = 100 [1 - 10^{-0,43}] = 62,8$$

2. Produto Marginal, $x = 4$. (Qual é a taxa de variação do produto total quando são aplicadas 4 unidades do insumo? A que “velocidade” ($\Delta y/\Delta x$) a produção cresce se às 4 unidades de insumo for acrescentada uma “pequena” quantidade adicional (Δx)?)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(10)Ac}{10^{c(x+b)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(10)100 \cdot 0,1}{10^{0,1(4+0,3)}} = \frac{2,3026 \cdot 10}{2,6915} = 8,56$$

3. Quantidade de insumo que maximiza o lucro (x^*)

$$\max_x \pi = py - wx = p A[1 - 10^{-c(x+b)}] - wx$$

$$\max_x \pi = 2y - x = 2 \cdot 100[1 - 10^{-0,1(x+0,3)}] - x$$

$$\frac{d\pi}{dx} = 2 \frac{\ln(10) 100 \cdot 0,1}{10^{0,1(x+0,3)}} - 1 = 0$$

Na quantidade ótima de insumo (x^* que é solução do problema), o valor do produto marginal ($p \, dy/dx$) é igual ao preço do insumo (w).

$$\frac{23,0259}{10^{0,1(x+0,3)}} = \frac{1}{2}$$

$$10^{0,1(x+0,3)} = 46,0517$$

$$0,1(x + 0,3) = \log_{10} 46,0517 = 1,6633$$

$$x = \frac{1,6633 - 0,03}{0,1} = 16,3$$

4. Demanda do insumo (x), condicionada à quantidade produzida (y) (Qual é a quantidade suficiente de insumo para produzir y unidades do produto?)

$$y = A[1 - 10^{-c(x+b)}]$$

$$\frac{y}{A} = 1 - 10^{-c(x+b)}$$

$$\frac{y}{A} - 1 = 10^{-c(x+b)}$$

$$1 - \frac{y}{A} = 10^{-c(x+b)}$$

$$-c(x+b) = \log\left(1 - \frac{y}{A}\right)$$

$$x = -\frac{1}{c} \log\left(1 - \frac{y}{A}\right) - b$$

A=100; b=0,3; c=0,1

$$x = -10 \log\left(1 - \frac{y}{100}\right) - 0,3$$

$$x = -10 \frac{\ln\left(1 - \frac{y}{100}\right)}{\ln(10)} - 0,3$$

5. Custo Variável (Quanto será preciso gastar para obter as x unidades de insumo necessárias para se obter a quantidade de produto desejada?)

$$CV(y) = wx = w \left(-10 \frac{\ln\left(1 - \frac{y}{100}\right)}{\ln(10)} - 0,3 \right)$$

6. Custo Total = Custo Variável + Custo Fixo (CF = 10; w = 1)

$$C(y) = 9,7 - 10 \frac{\ln\left(1 - \frac{y}{100}\right)}{\ln(10)}$$

Podemos recolocar o problema do produtor (questão 3), tendo como variável de escolha a quantidade produzida (y), ao invés da quantidade de insumo (x) a ser utilizada.

7. Qual a quantidade produzida que maximiza o lucro?
(CF = 10; w = 1; p = 2; firma tomadora de preços → preço não depende de y)

$$\text{Lucro } (\pi) = \text{Receita Total} - \text{Custo Total} = py - C(y)$$

$$\max_y \pi = py - C(y) = 2y - \left(9,7 - 10 \frac{\ln\left(1 - \frac{y}{100}\right)}{\ln(10)} \right)$$

Condição de primeira ordem da solução

$$\frac{d\pi}{dy} = p - \frac{dC}{dy} = 0 \Rightarrow \text{preço do produto} = \text{custo marginal}$$

$$2 = -\frac{10}{\ln(10)(y-100)} \Rightarrow y^* = 100 - \frac{10}{2 \ln(10)} = 97,8$$

8. A oferta da firma tomadora de preços

$$CV(y) = w \left(-\frac{1}{c} \log \left(1 - \frac{y}{A} \right) - b \right)$$

$$\frac{dC}{dy} = -\frac{w}{c \ln 10 (y-100)}$$

Como, para maximizar o lucro, a firma tomadora de preços produz a quantidade y^* para a qual o preço do produto é igual ao custo marginal, a oferta da firma será:

$$y = 100 - \frac{w}{p c \ln 10}$$

