

06/11/2020

(1)

Em materiais magnéticos lineares, a magnetização  $\vec{M}$  é diretamente proporcional ao campo  $\vec{H}$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (*)$$

onde  $\chi_m$  é a susceptibilidade magnética do material. Portanto em tais materiais, o próprio campo magnético

$\vec{B}$  é proporcional a  $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (**)$$

onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do material.

$\chi_m > 0 \longrightarrow$  material paramagnético

$\chi_m < 0 \longrightarrow$  " diamagnético

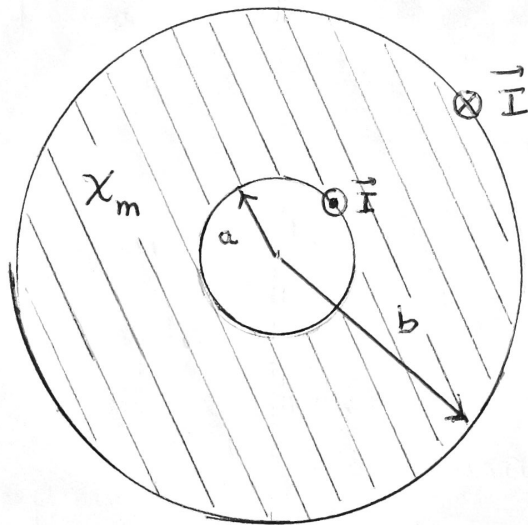
Já materiais ferromagnéticos são intrinsecamente não-lineares e, portanto, a rigor não faria muito sentido falar em susceptibilidade para tais materiais.

Quando  $\chi_m$  aparece na literatura associado a materiais ferromagnéticos, ela expressa uma relação distinta de (\*). Mais precisamente  $\chi_m = \frac{dM}{dH}$ .

Aplicação:

Calcular o campo magnético gerado em todo o espaço por um cabo coaxial longo formado por dois tubos condutores cilíndricos coaxiais separados por um material magnético isolante de susceptibilidade  $\chi_m$ .

A corrente  $I$  flui num sentido no condutor interno de raio  $a$  e no sentido oposto no condutor externo de raio  $b$ .



Como trata-se de material linear, no seu interior  $\vec{M}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  estão alinhados.

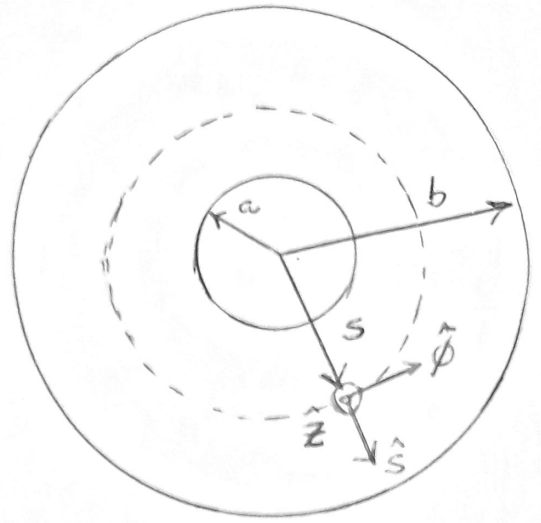
Por simetria,  $\vec{H}$  só poder ter componente na direção  $\hat{\phi}$ .

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$$

(3)

$$(2\pi s) H = I_f$$

$$I_f = \begin{cases} 0, & s < a \\ I, & a < s < b \\ 0, & s > b \end{cases}$$



Portanto

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{0}, & s < a \\ \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi}, & a < s < b \\ \vec{0}, & s > b \end{cases} \Rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \begin{cases} \vec{0}, & s < a \\ \frac{\chi_m I}{2\pi s} \hat{\phi}, & a < s < b \\ \vec{0}, & s > b \end{cases}$$

Portanto, o campo magnético  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$  é

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{0}, & s < a \\ \mu_0 (1 + \chi_m) \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi}, & a < s < b \\ \vec{0}, & s > b \end{cases}$$

O campo magnético  $\vec{B}$  obtido anteriormente deve ser consistente com as correntes totais

(4)

$$\vec{K} = \vec{K}_f + \vec{K}_b \quad e \quad \vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$$

Neste problema  $\vec{J}_f = \vec{D}$  e

$$\vec{K}_f = \begin{cases} \frac{I}{2\pi a} \hat{z}, & s=a \\ -\frac{I}{2\pi b} \hat{z}, & s=b \end{cases}$$

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = - \frac{\partial M_\phi}{\partial z} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial (s M_\phi)}{\partial s} \hat{z} = \vec{D}$$

Por as densidades superficiais de corrente ligadas em  $s=a$  e  $s=b$  são

$$\vec{K}_b(s=a) = \vec{M} \times \hat{n} = \left( \frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{\phi} \right) \times (-\hat{s}) = \frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{z}$$

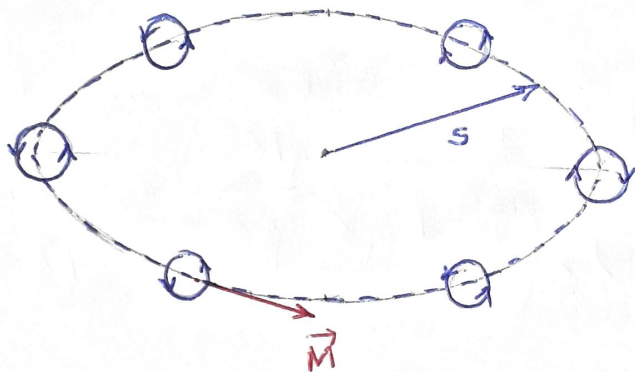
$$\vec{K}_b(s=b) = \vec{M} \times \hat{n} = \left( \frac{\chi_m I}{2\pi b} \hat{\phi} \right) \times \hat{s} = -\frac{\chi_m I}{2\pi b} \hat{z}$$

Coplicando então a lei de Ampère p/  $\vec{B}$

(5)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{I}_{\text{corrente total}}$$

$$\vec{K} = \vec{K}_f + \vec{K}_b = \begin{cases} \frac{I}{2\pi a} (1 + \chi_m) \hat{z}, & s = a \\ -\frac{I}{2\pi b} (1 + \chi_m) \hat{z}, & s = b \end{cases}$$



Logo

$$I = \begin{cases} 0, & s < a \\ (1 + \chi_m) I, & a < s < b \\ 0, & s > b \end{cases}$$

e, portanto

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{0}, & s < a \\ \mu_0 (1 + \chi_m) \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi}, & a < s < b \\ \vec{0}, & s > b \end{cases}$$

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{K}_f \times \hat{n}$$

## Teoria microscópica do paramagnetismo

(6)

Como dito anteriormente, o paramagnetismo está associado ao alinhamento de spins eletrônicos em orbitais semi-cheios com um campo magnético externo. Em tais materiais, os átomos, portanto, possuem momento de dipolo magnético permanente.

O alinhamento tende a ocorrer porque um dipolo de momento  $\vec{m}$  na presença de um campo magnético  $\vec{B}$ , sofre um torque  $\vec{N}$  dado por

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (\text{prove!})$$

Entretanto, a uma certa temperatura, o alinhamento completo tende a ser destruído por flutuações térmicas.

Se há  $N$  átomos por unidade de volume num material paramagnético e o momento de dipolo médio por átomo é  $\langle \vec{m} \rangle$ , então a magnetização  $\vec{M}$  é dada por

$$\vec{M} = N \langle \vec{m} \rangle$$

Além do torque  $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ , o dipolo adquire também uma energia

(7)

$$U = - \vec{m} \cdot \vec{B} \quad (\text{lista 3a})$$

No equilíbrio térmico a temperatura finita  $T$ , a Mecânica Estatística diz que a probabilidade de encontrar um átomo com energia  $U$  é proporcional a um fator de Boltzmann

$$e^{-U/KT}$$

Quanticamente, no entanto, na presença do campo  $\vec{B}$ , como o elétron no orbital semi-cheio é uma partícula de spin  $1/2$ , há apenas 2 valores possíveis para a componente do seu spin ao longo de  $\vec{B}$ , o que deve levar a 2 valores possíveis da componente de  $\vec{m}$  paralela a  $\vec{B}$

$$m_z = \pm g \frac{e\hbar}{4m_e} = \pm m$$

já que  $\vec{m} = - \frac{e}{2m_e} \vec{J}$

$|\vec{J}| = \frac{\hbar}{2} \sqrt{l(l+1)}$   $\vec{L} = \vec{O}$  momento angular orbital

momento angular total do  $e^-$   
 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Portanto, o número de átomos por unidade de volume com **spin** na mesma direção e sentido de  $\vec{B}$  é

$$N_{\uparrow} = a e^{-mB/KT}$$

e no sentido oposto a  $\vec{B}$

$$N_{\downarrow} = a e^{mB/KT}$$

A constante  $a$  pode ser determinada lembrando que

$$N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = N$$

portanto

$$a = \frac{N}{e^{mB/KT} + e^{-mB/KT}}$$

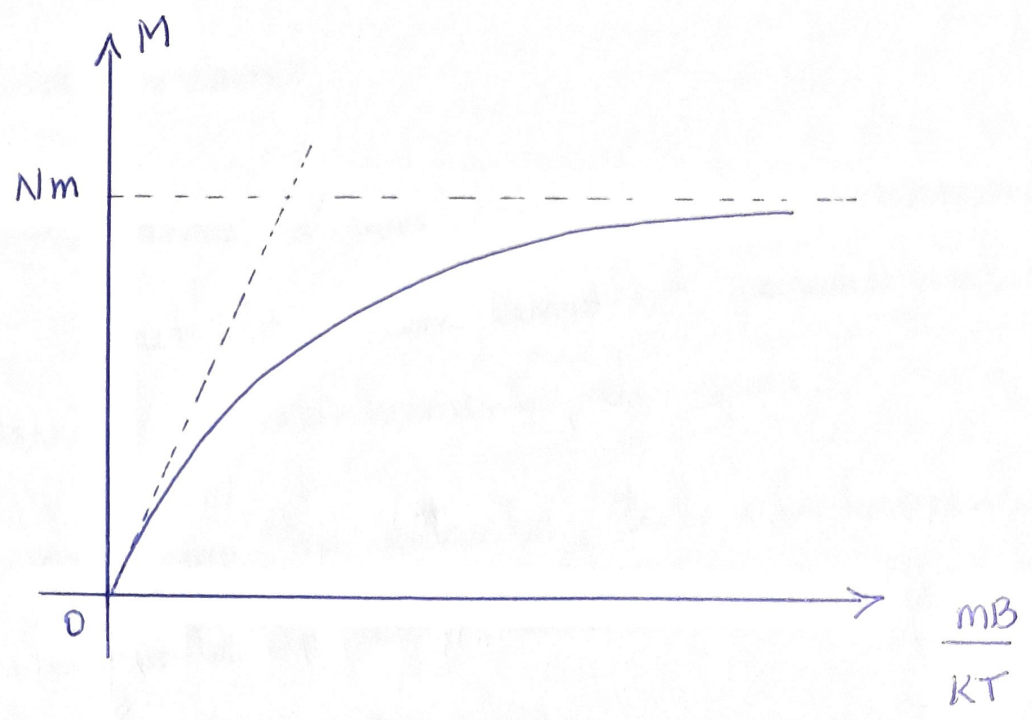
Lembre-se de que, para o elétron, o momento magnético e o spin estão em sentidos opostos

Dessa forma, a magnetização é

$$M = N \langle m \rangle = N \left\{ \frac{N_{\uparrow}(-m) + N_{\downarrow}(m)}{N} \right\}$$

$$M = Nm \left[ \frac{e^{mB/KT} - e^{-mB/KT}}{e^{mB/KT} + e^{-mB/KT}} \right] = Nm \tanh \left( \frac{mB}{KT} \right)$$





Perceba que para campos intensos e baixas temperaturas, a magnetização satura, atingindo seu valor máximo  $Nm$ , quando todos os momentos de dipolo magnéticos estão alinhados na mesma direção e sentido do campo  $\vec{B}$ .

Nessa região, entretanto, o material possui propriedades magnéticas não lineares.

Por outro lado, para altas temperaturas e campos fracos, há uma região de linearidade entre  $M$  e  $B$

$$M = \frac{N m^2}{KT} B = \frac{\chi_m}{\mu_0(1 + \chi_m)} B$$

Portanto

$$\chi_m = \frac{\mu_0 N m^2}{KT - \mu_0 N m^2}$$

## Ferromagnetismo

10

O ferromagnetismo é um fenômeno intrinsecamente não-linear. Entretanto, assim como no paramagnetismo, ele surge devido ao alinhamento de spins.

No ferromagnetismo, no entanto, tal alinhamento não depende somente do campo externo, mas também das interações entre spins vizinhos.

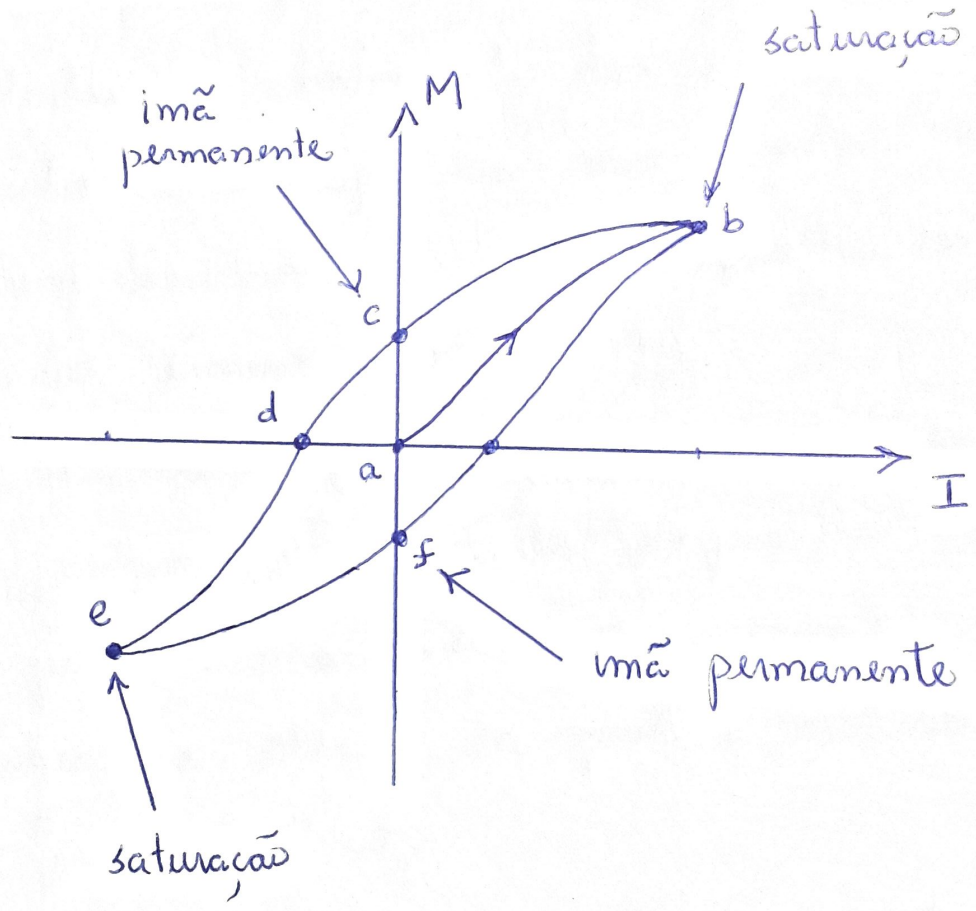
Essa interação é tal que spins vizinhos tendem a se alinhar na mesma direção e sentido, formando regiões no interior do material chamadas de domínios ferromagnéticos, contendo bilhões de dipolos magnéticos alinhados.

Num material ferromagnético não magnetizado, o campo magnético total do material é nulo porque em cada domínio a orientação do campo é aleatória.

Para magnetizar o material é preciso um campo externo.

Num material ferromagnético, o fenômeno de histerese implica que a magnetização não depende somente do valor atual do campo externo aplicado, mas de toda a história magnética do material

### Curva de histerese



No caso geral temos

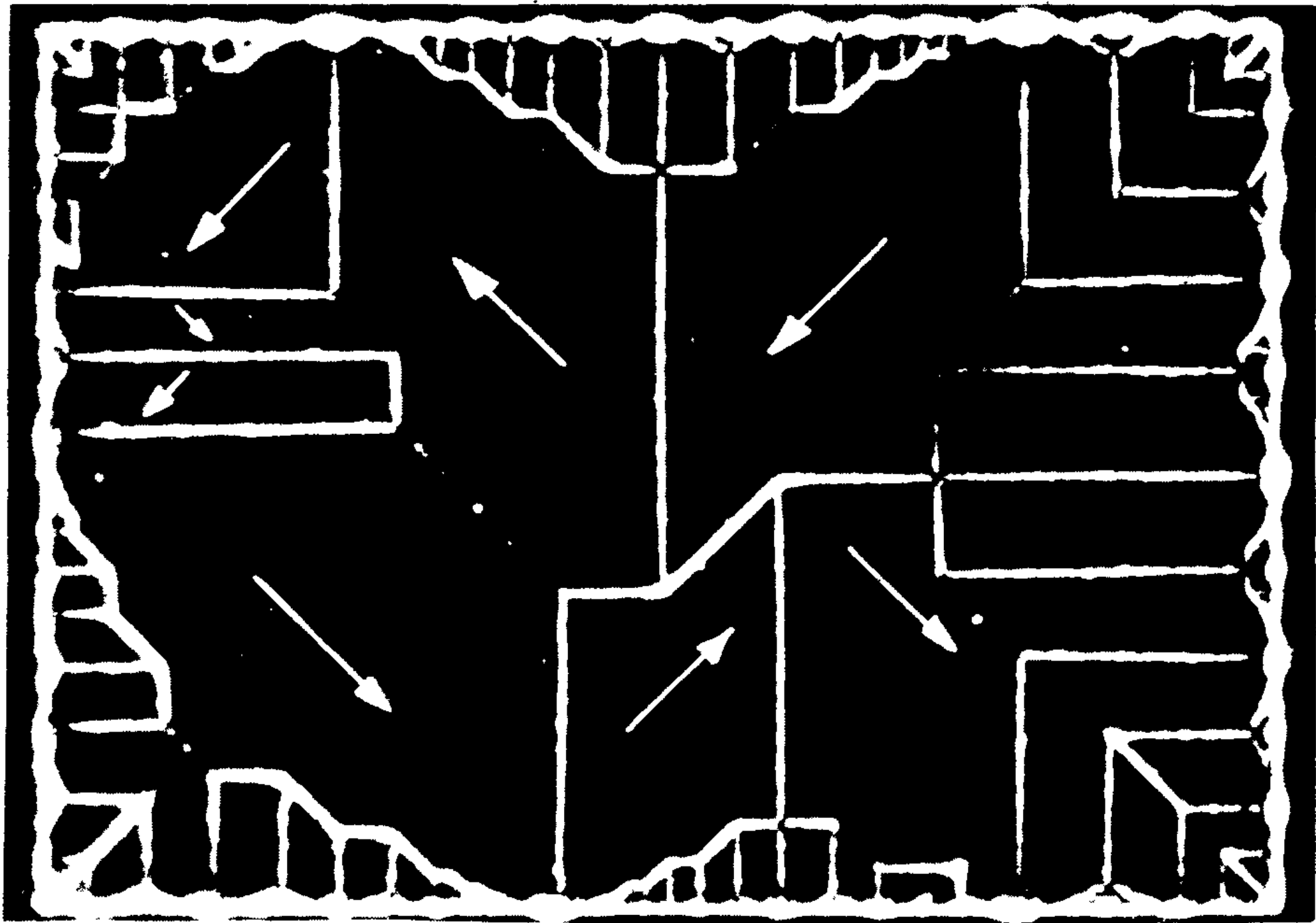
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Num material ferromagnético magnetizado,  $M \gg H$  e, portanto,  $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{M}$  na prática.

Assim como no caso paramagnético, flutuações térmicas tendem a destruir o alinhamento dos spins. A tendência de alinhamento de um spin com seus vizinhos no interior de um domínio, entretanto, dificulta esse desalinhamento térmico.

Para cada material ferromagnético existe uma temperatura crítica, chamada de temperatura de Curie, acima da qual o material é paramagnético e, portanto linear e abaixo da qual o material é, de fato, ferromagnético.

Diferentemente do caso paramagnético, a transição entre o regime linear e o não-linear não é contínua mas abrupta na temperatura de Curie e que em Mecânica Estatística é denominada de uma transição de fase.



Ferromagnetic domains. (Photo courtesy of R. W. DeBlois)