# Intervalo de Confiança para a diferença de proporções $(p_1 - p_2)$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$P(-z \leq Z \leq z) = \gamma$ coeficiente de confiança

$Z \sim N(0,1)$

## Exemplo

Uma companhia de seguros analisou a frequência com que duas amostras de 1000 homens e 1000 mulheres utilizaram o hospital. Deseja-se testar se a proporção de utilização do hospital é a mesma para homens e mulheres

| | Usaram Hospital | Não usaram | |
|---|---|---|---|
| Homens | 100 | 900 | 1000 |
| Mulheres | 150 | 850 | 1000 |

Parâmetros:

$p_1$ - proporção de mulheres que utilizam o hospital

$p_2$ - proporção de homens que utilizam o hospital

$H_0: p_1 = p_2$

$H_a: p_1 \neq p_2$

$\hat{p}_1 = \frac{150}{1000} = 0{,}15 \qquad \hat{p}_2 = \frac{100}{1000} = 0{,}10$

$$\hat{V} = \hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \qquad \hat{p} = \frac{100+150}{2000} = 0{,}125$$

$$\hat{V} = 0{,}125(1-0{,}125)\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}\right) = 0{,}00022$$

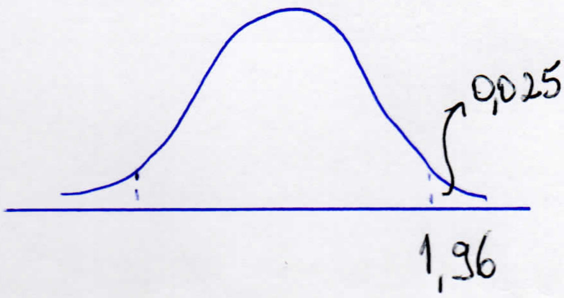
Estatística do Teste: $Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{V}}}$

Região Crítica $\quad Z \leq -z_c$ ou $Z \geq z_c$

$P(Z \geq z_c) = \frac{\alpha}{2} \qquad Z \sim N(0,1)$

No caso $\quad Z = \dfrac{0{,}15 - 0{,}10}{\sqrt{0{,}00022}} = \dfrac{0{,}05}{0{,}0148} = 3{,}38$

$\alpha = 0{,}05 \qquad P(Z \geq z_c) = 0{,}025$




RC: $Z \geq 1{,}96$ ou $Z \leq -1{,}96$

$Z_{obs} = 3{,}38 \in RC \Rightarrow$ Rejeita-se $H_0$.

Os dados sugerem desigualdade das proporções de utilização do hospital para homens e mulheres.

Quando Ho é rejeitada, é comum a construção de um intervalo de confiança para o parâmetro. No caso, o parâmetro é $p_1 - p_2$ e o IC é:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \quad , \quad P(-z \leq Z \leq z) = \gamma$$

$$\gamma = 0{,}95 \implies z = 1{,}96$$

$$IC: \quad 0{,}15 - 0{,}10 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15 . 0{,}85}{1000} + \frac{0{,}10 . 0{,}90}{1000}}$$

$$0{,}05 \pm 1{,}96 . 0{,}0147$$

$$[0{,}0212 \, ; \, 0{,}0788]$$

$0 \notin IC \implies$ Rejeita-se Ho ao nível $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05$.

Esta equivalência entre testes de hipóteses e intervalos de confiança funciona apenas para testes bicaudais.

# Teste de Hipóteses para a média de uma distribuição normal com variância desconhecida

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu$ e $\sigma^2$ desconhecidos

$\hat{\mu} = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2 = S^2$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

Resultado

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $X_1, X_2 \dots X_n$ é uma amostra aleatória dessa distribuição, a variável aleatória

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tem distribuição t de student com n-1 graus de liberdade. Tabela Apêndice A, pag. 372, Magalhães e Lima

Notação: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Teste bicaudal para $\mu$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu$ e $\sigma^2$ desconhecidos

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu \neq \mu_0$

Estatística de teste:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Região Crítica:

Fixado um nível de significância $\alpha$ e tomada uma amostra aleatória de $n$ observações

RC: $T > t_c$ ou $T < -t_c$ onde $t_c$ é tal que

$P(T > t_c) = \frac{\alpha}{2}$ $T \sim$ t-student com $n-1$ g l

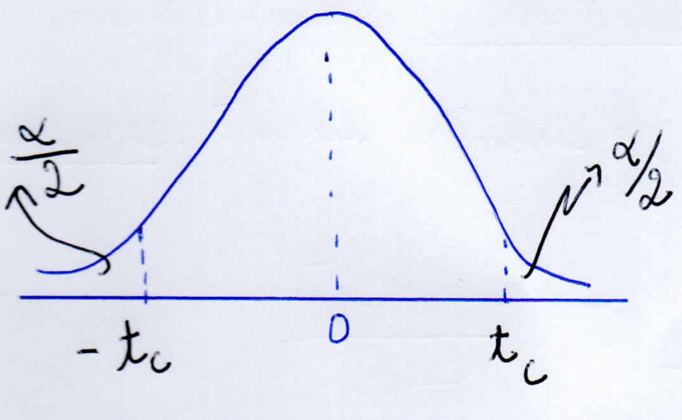


Tabela da distribuição t-student

Apêndice A, pág 372



**Distribuição $t$-Student : Valores $t_c$ tais que $P(-t_c \leq t \leq t_c) = 1 - p$**

| Graus de liberdade | p->90% | 80% | 70% | 60% | 50% | 40% | 30% | 20% | 10% | 5% | 4% | 2% | 1% | 0,2% | 0,1% | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 15,894 | 31,821 | 63,656 | 318,289 | 636,578 | 1 |
| 2 | 0,142 | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 4,849 | 6,965 | 9,925 | 22,328 | 31,600 | 2 |
| 3 | 0,137 | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 3,482 | 4,541 | 5,841 | 10,214 | 12,924 | 3 |
| 4 | 0,134 | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 2,999 | 3,747 | 4,604 | 7,173 | 8,610 | 4 |
| 5 | 0,132 | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 2,757 | 3,365 | 4,032 | 5,894 | 6,869 | 5 |
| 6 | 0,131 | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 2,612 | 3,143 | 3,707 | 5,208 | 5,959 | 6 |
| 7 | 0,130 | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,517 | 2,998 | 3,499 | 4,785 | 5,408 | 7 |
| 8 | 0,130 | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,449 | 2,896 | 3,355 | 4,501 | 5,041 | 8 |
| 9 | 0,129 | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,398 | 2,821 | 3,250 | 4,297 | 4,781 | 9 |
| 10 | 0,129 | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,359 | 2,764 | 3,169 | 4,144 | 4,587 | 10 |
| 11 | 0,129 | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,328 | 2,718 | 3,106 | 4,025 | 4,437 | 11 |
| 12 | 0,128 | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,303 | 2,681 | 3,055 | 3,930 | 4,318 | 12 |
| 13 | 0,128 | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,282 | 2,650 | 3,012 | 3,852 | 4,221 | 13 |
| 14 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,264 | 2,624 | 2,977 | 3,787 | 4,140 | 14 |
| 15 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,249 | 2,602 | 2,947 | 3,733 | 4,073 | 15 |
| 16 | 0,128 | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,235 | 2,583 | 2,921 | 3,686 | 4,015 | 16 |
| 17 | 0,128 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,224 | 2,567 | 2,898 | 3,646 | 3,965 | 17 |
| 18 | 0,127 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,214 | 2,552 | 2,878 | 3,610 | 3,922 | 18 |
| 19 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,205 | 2,539 | 2,861 | 3,579 | 3,883 | 19 |
| 20 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,197 | 2,528 | 2,845 | 3,552 | 3,850 | 20 |
| 21 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,189 | 2,518 | 2,831 | 3,527 | 3,819 | 21 |
| 22 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,061 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,183 | 2,508 | 2,819 | 3,505 | 3,792 | 22 |
| 23 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,060 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,177 | 2,500 | 2,807 | 3,485 | 3,768 | 23 |
| 24 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,172 | 2,492 | 2,797 | 3,467 | 3,745 | 24 |
| 25 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,167 | 2,485 | 2,787 | 3,450 | 3,725 | 25 |
| 26 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,162 | 2,479 | 2,779 | 3,435 | 3,707 | 26 |
| 27 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,158 | 2,473 | 2,771 | 3,421 | 3,689 | 27 |
| 28 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,154 | 2,467 | 2,763 | 3,408 | 3,674 | 28 |
| 29 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,150 | 2,462 | 2,756 | 3,396 | 3,660 | 29 |
| 30 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,147 | 2,457 | 2,750 | 3,385 | 3,646 | 30 |
| 35 | 0,127 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,682 | 0,852 | 1,052 | 1,306 | 1,690 | 2,030 | 2,133 | 2,438 | 2,724 | 3,340 | 3,591 | 35 |
| 40 | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,681 | 0,851 | 1,050 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,123 | 2,423 | 2,704 | 3,307 | 3,551 | 40 |
| 50 | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,528 | 0,679 | 0,849 | 1,047 | 1,299 | 1,676 | 2,009 | 2,109 | 2,403 | 2,678 | 3,261 | 3,496 | 50 |
| 60 | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,679 | 0,848 | 1,045 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,099 | 2,390 | 2,660 | 3,232 | 3,460 | 60 |
| 120 | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,526 | 0,677 | 0,845 | 1,041 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,076 | 2,358 | 2,617 | 3,160 | 3,373 | 120 |
| ∞ | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,675 | 0,842 | 1,036 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,054 | 2,327 | 2,576 | 3,091 | 3,291 | ∞ |



Ex:

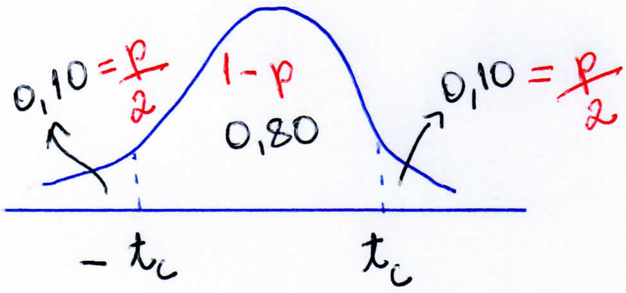
20 gl $t_c \mid P(-t_c \leq T \leq t_c) = 0{,}90 = 1 - p \Rightarrow p = 0{,}10$

p 10%

gl 20 ... 1,725

$t_c = 1{,}725$

22 gl $\quad t_c \mid \quad P(T \geq t_c) = 0{,}10$




$P(-t_c < T < t_c) = 0{,}8 \Rightarrow p = 0{,}2$

| | | |
|---|---|---|
| | p | 20% |
| gl | 22 | 1,321 |

$t_c = 1{,}321$

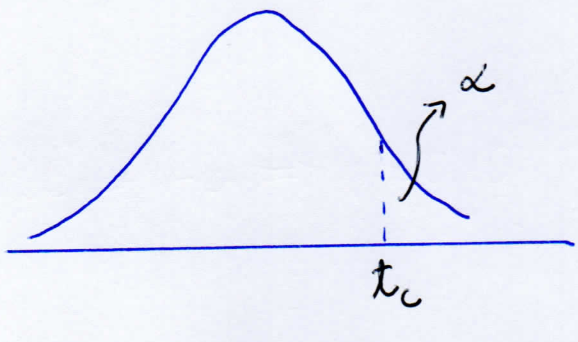
$t_c$ é obtido a partir da tabela para $n-1$ g.l.

Para gl > 120 usar a linha $\infty$ que é equivalente a consultar a tabela da distribuição normal.

Teste unicaudal à direita

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu > \mu_0$




Estatística de Teste

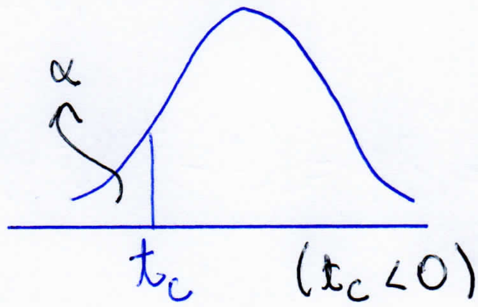
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad RC: T > t_c \quad t_c \mid P(T > t_c) = \alpha$$

$$T \sim t_{n-1}$$

# Teste unicaudal à esquerda

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu < \mu_0$




Estatística de Teste

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad RC: T < t_c \qquad t_c \mid P(T < t_c) = \alpha$$

$$T \sim t_{n-1}$$

## Exemplo

Deseja-se investigar se uma certa moléstia altera o consumo renal médio de oxigênio. Para indivíduos sãos, esse consumo tem distribuição normal com média 12 cm³/min. Os valores medidos para cinco pacientes com a moléstia foram:

14,4 12,9 15,0 13,7 13,5.

Qual seria a conclusão ao nível de significância de 1%?

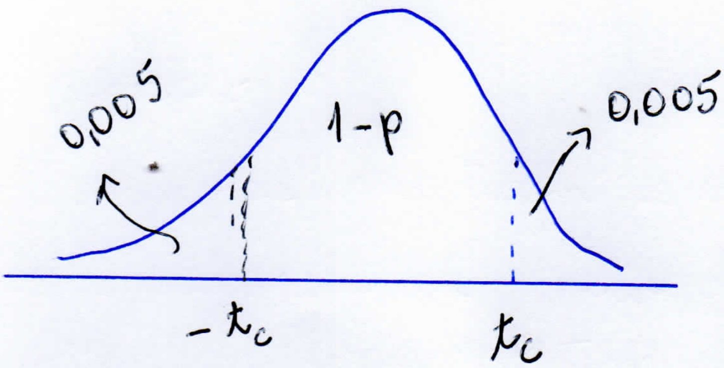
X - consumo renal de oxigênio de portadores da moléstia

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu$ e $\sigma^2$ desconhecidos

$H_0: \mu = 12$ (A moléstia não altera o consumo renal médio de oxigênio)

$H_a: \mu \neq 12$ (Portadores da moléstia têm a média alterada)

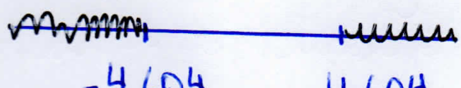
RC: $T > t_c$ ou $T < -t_c$ $\alpha = 0{,}01$ $n = 5$ 4 gl




Basta procurar na tabela a soma das caudas

| | p | 1% |
|---|---|---|
| gl | 4 | 4,604 |

RC:




Efetuando os cálculos: $\bar{x} = 13{,}9$ $s^2 = 0{,}67$

$$T_{obs} = \frac{13{,}9 - 12}{\sqrt{0{,}67}/\sqrt{5}} = 5{,}19 \in RC$$

Rejeita-se $H_0$. Ao nível de significância de 0,01, conclui-se que a moléstia altera o consumo renal médio de oxigênio.

Exemplo

Um fabricante afirma que a quantidade média de nicotina em seus cigarros não ultrapassa 30mg. Uma amostra de 25 cigarros forneceu quantidade média de nicotina de 31,5 mg e desvio padrão de 3mg. Ao nível de significância de 5%, podemos concordar com a afirmação do fabricante?

X - quantidade de nicotina por cigarro

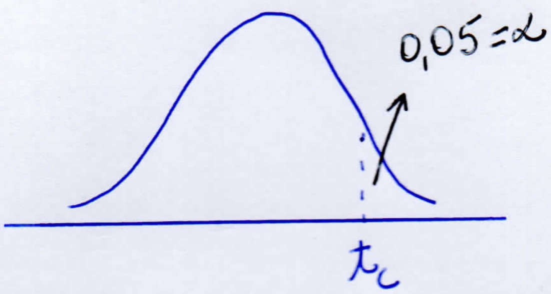
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu$ e $\sigma^2$ desconhecidos

$H_0: \mu = 30$

$H_a: \mu > 30$

RC: $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_c$

24 gl




$n = 25$ $\bar{x} = 31,5$ $\alpha = 0,05$

$S = 3$

gl P = 10%

⋮ ⋮

24 - - - - 1,711

$t_c = 1,711$

RC: $T > 1{,}711$

$$T_{obs} = \frac{31{,}5 - 30}{3/5} = 2{,}5 \in RC$$

Rejeitamos $H_0$. Ao nível de significância de 0,05, os dados sugerem que a quantidade média de nicotina é superior a 30 g.

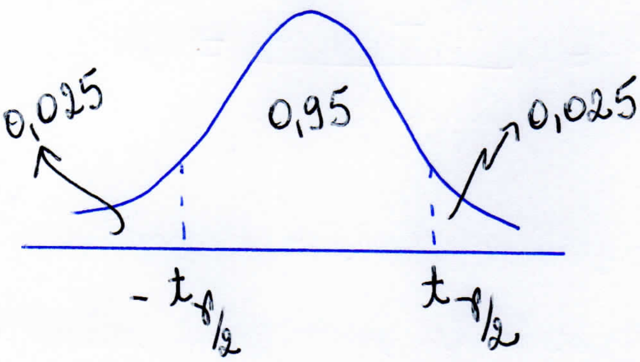
Intervalos de Confiança para a média da distribuição normal com variância desconhecida

$$\left[ \bar{X} - t_{\gamma/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + t_{\gamma/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$t_{\gamma/2}$ tal que $P\left(-t_{\gamma/2} \leq t \leq t_{\gamma/2}\right) = \gamma$

$\gamma$ coeficiente de confiança do intervalo

No exemplo, para $\gamma = 0{,}95$




| gl | $p = 0{,}05$ |
| --- | --- |
| ⋮ | ⋮ |
| 24 | 2,064 |

IC: $31{,}5 \pm 2{,}064 \cdot \frac{3}{5}$

$[30{,}27 \; ; \; 32{,}73]$