

Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n e medida exterior

Vimos que a pré-medida de Lebesgue definida na álgebra \mathcal{A} das uniões finitas de intervalos $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$ estende-se a uma medida completa numa σ -álgebra \mathcal{L} que contém os borelianos. Chamaremos \mathcal{L} de σ -álgebra de Lebesgue.

Análogamente, podemos proceder em \mathbb{R}^2 com os retângulos semi abertos e também nos retângulos $[a, b] \times [c, d]$. No que segue trabalharemos em \mathbb{R} , mas será facilmente generalizável a \mathbb{R}^n .

O que acontece se definirmos a pré-medida de Lebesgue nas famílias \mathcal{F}_1 dada pela união finita de intervalos abertos (a, b) , $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ e \mathcal{F}_2 dada pela união finita de intervalos fechados $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$? Chegaremos à mesma medida? Note que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 não são álgebras.

Designaremos por λ_i^* a medida exterior associada à pré-medida de Lebesgue na família \mathcal{F}_i . Temos:

Proposição 1. $\lambda_2^* \leq \lambda_1^*$

Demonstração. Com efeito, $\lambda_i^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i(E_{i,j}) \mid A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_{i,j}\}$ onde $A \subset \mathbb{R}$ e $E_{i,j} \in \mathcal{F}_i$, por definição, com $E_{1,j} = (a_j, b_j)$ e $E_{2,j} = [a_j, b_j]$. Também, se $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ então $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j] \subset \cup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$. Por definição das pré-medidas, $\lambda_1((a_j, b_j)) = \lambda_2([a_j, b_j]) = b_j - a_j$, logo:

$$\lambda_1^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_1((a_j, b_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_2([a_j, b_j])$$

Portanto, mostramos que para cada cobertura de A por uniões de intervalos abertos temos uma cobertura por uniões de intervalos fechados, e com *mesma* pré-medida. Assim $\lambda_2^*(A) \leq \lambda_1^*(A)$. \square

Proposição 2. $\lambda_2^* \geq \lambda_1^*$

Demonstração. Se isso fosse falso, existiria $A \subset \mathbb{R}$ com $\lambda_1^*(A) - \lambda_2^*(A) = \alpha > 0$. Por definição de λ_2^* , existem $[a_j, b_j]$ com:

1. $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_2([a_j, b_j]) \leq \lambda_2^*(A) + \frac{\alpha}{4}$

Mas $\cup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j] \subset \cup_{j=1}^{\infty} (a_j - \frac{\alpha}{2^{j+2}}, b_j + \frac{\alpha}{2^{j+2}})$. Chamando $A_{j,\alpha} = (a_j - \frac{\alpha}{2^{j+2}}, b_j + \frac{\alpha}{2^{j+2}})$, temos que $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_{j,\alpha}$, portanto:

$$\lambda_2^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_1(A_{j,\alpha}) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \frac{\alpha}{2}$$

Mas, pela propriedade (2), sabemos que $\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \frac{\alpha}{2} \leq \lambda_2^*(A) + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} = \lambda_2^*(A) + \frac{3}{4}\alpha$, e assim:

$$\lambda_2^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_1^*(A_{j,\alpha}) \leq \lambda_2^*(A) + \frac{3}{4}\alpha \leq \lambda_1^*(A)$$

Isto é absurdo porque teríamos uma cobertura de A por abertos $\cup_{j=1}^{\infty} A_{j,\alpha}$ com valor menor do que o ínfimo.

Portanto, não existe A tal que $\lambda_1^*(A) > \lambda_2^*(A)$. Assim, $\lambda_2^*(A) \leq \lambda_1^*(A)$. \square

Corolário. Se tomarmos λ_3^* a medida exterior associada à pré-medida λ_3 sobre a álgebra das uniões finitas de intervalos semi-abertos, temos que $\lambda_3^* = \lambda_1^* = \lambda_2^*$.

Exercício. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável e $\varepsilon > 0$. Então existe aberto U com:

1. $A \subset U$.
2. $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$.

Exercício. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ com medida finita, $A \subset X$ Lebesgue mensurável e $\varepsilon > 0$. Então existe fechado F com:

1. $F \subset A$.
2. $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$.

Solução: Seja V aberto, $A^c \subset V$, com $\mu(V) \leq \mu(A^c) + \varepsilon$. Pela mensurabilidade temos $\mu(A^c) + \mu(A) = \mu(X)$ e $\mu(V^c) + \mu(V) = \mu(X)$. Seja $F = V^c$. Então substituindo na desigualdade, $\mu(X) - \mu(F) \leq \mu(X) - \mu(A) + \varepsilon$. Como $\mu(X)$ é finita, podemos cancelar dos dois lados e temos $-\mu(F) \leq -\mu(A) + \varepsilon$ ou $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$ ou $\varepsilon + \mu(F) \geq \mu(A)$.

Comentário: o que fizemos? Observe que ao cobrir A por um aberto U , estamos ao mesmo tempo achando um fechado $F = U^c$, contido em A^c . Se as medidas de U e de A diferem no máximo em ε , então, A sendo mensurável, implica que as medidas de F e de A^c também diferem no máximo por ε .

Definição: Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Dizemos que **X tem medida σ -finita** se existir $\{A_j\}$ sequência de conjuntos mensuráveis com $\mu(A_j) < \infty$; $\forall j \in \mathbb{N}$ e $X = \cup_1^\infty A_j$.

Exemplos: \mathbb{R}, \mathbb{R}^n , variedades diferenciáveis, subconjuntos de espaços σ -finitos.

Exercício. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset X$ Lebesgue mensurável com $\mu(A) < +\infty$ e $\varepsilon > 0$. Então existe fechado F com:

1. $F \subset A$.
2. $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$.

Solução: trabalhemos em \mathbb{R}^+ . Considere $X = \cup([n, n+1))$. A seguir considere $A_n = A \cap [n, n+1)$ e aplique os exercícios anteriores.

Definição: Seja X um espaço com uma medida exterior μ^* , e $\mu^*(X) < \infty$. Seja $A \subset X$. Definimos μ_* a **medida interior** do conjunto A por $\mu_*(A) = \mu^*(X) - \mu^*(A^c)$.

Esta era a definição de medida interior que Lebesgue usava e que resultava na seguinte definição de conjunto mensurável:

A é mensurável se

$$\mu_*(A) = \mu^*(A)$$

Esta definição é equivalente à de Caratheodory, para o caso em que trabalharmos com Borelianos ou seu completamento. Porque estamos falando

de conjuntos abertos e fechados. Ou seja, na própria definição de mensurabilidade de Caratheodory está embutida a concordância de medida interior e exterior, e evita a necessidade de falar de medida interior. De qualquer modo ela aparece naturalmente quando aproximamos as medidas dos conjuntos A pelos fechados (ou também compactos) contidos em A . Por outro lado, a definição de Caratheodory não precisa que o espaço X seja um espaço topológico ou métrico, e então estende-se a σ -álgebras quaisquer.