MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Gabarito de alguns dos exercícios da Lista 3

Exercício 2(c) Prove que o conjunto $S = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots) : x_i \in \mathbb{N},\ \text{para todo } i \in \mathbb{N}\}$ formado por todas as sequências cujos termos são números naturais é infinito não enumerável.

Solução. A prova é muito semelhante à demonstração vista em sala de que $]0,1[\in \mathbb{R}$ é infinito não-enumerável.

Primeiramente, notemos que S é infinito. De fato, seja $B = \{(n,1,1,\ldots) : n \in \mathbb{N}\}$. É evidente que $B \subseteq S$. Além disso, $\mathbb{N} \sim B$, por meio da seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{N} & \to & B \\ & n & \mapsto & (n,1,1,\ldots) \end{array}$$

A função ϕ é claramente sobrejetora, uma vez que todo elemento de B é da forma $(n,1,1,\ldots)$. Por outro lado, se $(n,1,1,\ldots) = (m,1,1,\ldots)$ então $n = m$, (pois duas sequências são iguais se e somente se possuem os mesmos valores em cada índice). Logo, ϕ também é injetora. Em suma, encontramos uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e B, e como $\mathbb{N}$ é infinito, B também o é. Como $B \subseteq S$, S é necessariamente infinito.

Agora, vejamos que S não é enumerável. Suponha por absurdo que seja. Então podemos *enumerar* S, isto é, escrever S como $\{s_1,s_2,s_3,\ldots\}$, em que cada $s_j = (s_{j1},s_{j2},s_{j3},\ldots)$ é uma sequência de números naturais. Construa então uma nova sequência $r = (r_1,r_2,r_3,\ldots)$ da seguinte maneira: Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{cases} r_i = 1, & \text{se } s_{ii} \neq 1; \\ r_i = 2, & \text{se } s_{ii} = 1. \end{cases}$$

Assim, dado um $i \in \mathbb{N}$ arbitrário, temos que $r_i \neq s_{ii}$, isto é, o i-ésimo termo de r é diferente do i-ésimo termo de s_i. Logo, $r \neq s_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, $r \notin S = \{s_1,s_2,s_3,\ldots\}$. Mas r é uma sequência cujos termos são iguais a 1 ou 2, e, portanto, pertence a S. Isso contradiz o fato de $\{s_1,s_2,s_3,\ldots\}$ ser uma lista com todos os elementos de S.

Enfim, concluímos que S não pode ser enumerável.

$\square$

Observação:. A demonstração acima é o clássico argumento da diagonal de Cantor.

Exercício 6 Use a definição de limite para provar que $\lim \dfrac{5n^2}{n^2+1} = 5$

Solução. Queremos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{5n^2}{n^2+1} - 5\right| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Então, seja $\varepsilon > 0$ dado. Notemos antes de tudo que:

$$\left|\frac{5n^2}{n^2+1} - 5\right| = \left|\frac{5n^2 - 5n^2 - 5}{n^2+1}\right| = \left|\frac{-5}{n^2+1}\right| = \frac{5}{n^2+1} \ (*)$$

Agora, pela propriedade arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Daí, se $n \geq n_0$:

$$n^2 + 1 > n^2 \geq n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow \frac{5}{n^2+1} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Já temos então que, se $n \geq n_0$, então $\left|\dfrac{5n^2}{n^2+1} - 5\right| = \dfrac{5}{n^2+1} < \varepsilon$.

Provamos então que 5 é o limite de sequência dada.

$\square$

Exercício 9 Sejam a e c números reais fixados e sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sequências tais que $|a_n - a| < c\,|b_n|$ para todo n. Usando a definição de limite, mostre que se $\lim b_n = 0$ então $\lim a_n = a$.

Solução. Seja $\varepsilon > 0$. Note que, como vale que $|a_n - a| < c\,|b_n|$, c tem de ser um real positivo (se tivéssemos $c \leq 0$, valeria que $|a_n - a| < 0$). Assim, $\dfrac{\varepsilon}{c} > 0$.

Se $\lim b_n = 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $|b_n - 0| = |b_n| < \dfrac{\varepsilon}{c}$. Logo, para esse mesmo n_0, temos que, se $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < c|b_n| < c\,\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

Isso mostra que $\lim a_n = a$.

$\square$

Exercício 11 Determine se a sequência (a_n) dada é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule o limite.

Respostas: (Entre parêntesis está a indicação do teorema utilizado na resolução, de acordo com a numeração encontrada nos slides das aulas.)

a) $\lim \dfrac{1 - n + 2n^4}{2 + 3n^4} = \dfrac{2}{3}$ (T. 1)

b) $\lim\ [\sqrt{n}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})] = \frac{5}{2}$

c) $\lim\ (\sqrt{n^2+n}-n) = \frac{1}{2}$

d) $\lim\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ (T. 4)

e) $\lim \dfrac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$ (T. do Confronto)

f) $\lim \dfrac{\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}} = 1$

g) $\lim \dfrac{n}{1+\sqrt{n}} = +\infty$ (divergente, "tendendo" a $+\infty$)

h) $\lim ne^{-n} = 0$ (T. 3)

i) $\lim \operatorname{arctg} n = \dfrac{\pi}{2}$ (T. 3)

j) $\lim \cos(n^3)2^{-n} = 0$ (T. do Confronto)

k) $\lim \dfrac{n!}{(n+2)!} = 0$ (T. 1)

l) $\lim \dfrac{7^{n+1}}{10^n} = 0$

m) $\lim \dfrac{n^2}{\ln(n^2+1)} = +\infty$ (divergente, "tendendo" a $+\infty$)

□

Exercício 13 Prove que se $a_n < 1$ para todo n e se $(a_n)_n$ é uma sequência convergente, então $\lim a_n \leq 1$.

Solução. Seja $L = \lim a_n$, e suponha por absurdo que $L > 1$. Tome então $\varepsilon = L-1 > 0$. Da definição de convergência, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon = L - 1$$

Mas, abrindo o módulo, temos que, para $n \geq n_0$:

$$L - (L-1) < a_n < L + (L-1)$$

Isso implica que $1 < a_n$ para $n \geq n_0$, contradizendo a hipótese de que $a_n < 1$ para todo n. Logo, $L \leq 1$.

□

Observação:. Note que não há nada de especial no número 1 no último exercício. De forma geral, se temos uma sequência tal que $a_n < k$ para todo n, então $\lim a_n \leq k$.