Gabarito do 10ª Práticas de demonstrações

Ferramentas disponíveis:

Definição 1: Transposta de uma matriz A = [a_{ij}] é construída por reflexão de seus elementos em relação à diagonal principal. O elemento da linha i-ésima e j-ésima coluna de A deve corresponder ao elemento da j-ésima linha e e i-ésima coluna da matriz A^T.

Definição 2: O produto de matrizes A e B, ambas 3x3, corresponde à matriz C 3x3 cujo elemento [c_{ij}] corresponde à: $a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j}$.

Enunciados a demonstrar

Exemplo) Prove que para A e B matrizes 3x3 quaisquer, $(A.B)^T = B^T.A^T$.

Demonstração:

Seja A = [a_{11}, a_{12}, a_{13}] Seja B = [b_{11}, b_{12}, b_{13}]

[a_{21}, a_{22}, a_{23}] [b_{21}, b_{22}, b_{23}]

[a_{31}, a_{32}, a_{33}] [b_{31}, b_{32}, b_{33}]

Seja A^T= [a_{11}, a_{21}, a_{31}] Seja B^T= [b_{11}, b_{21}, b_{31}]

[a_{12}, a_{22}, a_{32}] [b_{12}, b_{22}, b_{32}]

[a_{13}, a_{23}, a_{33}] [b_{13}, b_{23}, b_{33}]

A.B = [$a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31}$ $a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21}+a_{23}.b_{31}$ $a_{31}.b_{11}+a_{32}.b_{21}+a_{33}.b_{31}$]

[$a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32}$ $a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32}$ $a_{31}.b_{12}+a_{32}.b_{22}+a_{33}.b_{32}$]

[$a_{11}.b_{13}+a_{12}.b_{23}+a_{13}.b_{33}$ $a_{21}.b_{13}+a_{22}.b_{23}+a_{23}.b_{33}$ $a_{31}.b_{13}+a_{32}.b_{23}+a_{33}.b_{33}$]

$(A.B)^T$ = [$a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31}$ $a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32}$ $a_{11}.b_{13}+a_{12}.b_{23}+a_{13}.b_{33}$]

[$a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21}+a_{23}.b_{31}$ $a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32}$ $a_{21}.b_{13}+a_{22}.b_{23}+a_{23}.b_{33}$]

[$a_{31}.b_{11}+a_{32}.b_{21}+a_{33}.b_{31}$ $a_{31}.b_{12}+a_{32}.b_{22}+a_{33}.b_{32}$ $a_{31}.b_{13}+a_{32}.b_{23}+a_{33}.b_{33}$]

$B^T.A^T$ = [$a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31}$ $a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32}$ $a_{11}.b_{13}+a_{12}.b_{23}+a_{13}.b_{33}$]

[$a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21}+a_{23}.b_{31}$ $a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32}$ $a_{21}.b_{13}+a_{22}.b_{23}+a_{23}.b_{33}$]

[$a_{31}.b_{11}+a_{32}.b_{21}+a_{33}.b_{31}$ $a_{31}.b_{12}+a_{32}.b_{22}+a_{33}.b_{32}$ $a_{31}.b_{13}+a_{32}.b_{23}+a_{33}.b_{33}$]

1) Prove que para uma matriz A_{3x3} qualquer, $(A^T)^T = A$.

Demonstração:

Seja A = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]
[a_{21}, a_{22}, a_{23}]
[a_{31}, a_{32}, a_{33}]

Seja A^T= [a_{11}, a_{21}, a_{31}]
[a_{12}, a_{22}, a_{32}]
[a_{13}, a_{23}, a_{33}]

Seja $(A^T)^T$ = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]
[a_{21}, a_{22}, a_{23}]
[a_{31}, a_{32}, a_{33}]