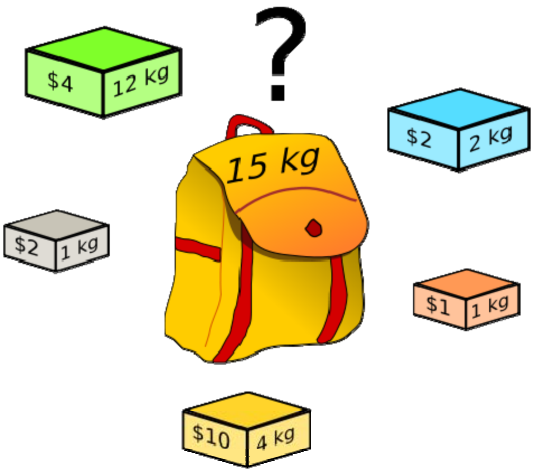
PQI-5884 - Programação Inteira Mista Aplicada à Otimização de Processos
3º Período 2020

Data	Atividade	Conteúdo
17/09	Aula 1	Introdução, formulação, classes, representação
24/09	Aula 2	Condições de otimalidade
01/10	Aula 3	Condições KKT, multiplicadores
08/10	Aula 4	Otimização irrestrita
15/10	Aula 5	LP
22/10	Aula 6	NLP
29/10	Aula 7	MILP
05/10	**Aula 8**	**MILP, problemas clássicos**
12/11	Aula 9	MILP, problema de scheduling
19/11	Aula 10	MINLP, problema de síntese
26/11	-	-
03/12	Aula 11	Apresentações

Problemas clássicos MILP (pág. 92)

- Mochila
- Alocação
- Localização de plantas
- Caixeiro viajante

Problema da Mochila
Knapsack Problem



3

Variáveis de decisão:

$y_i =$ 1 se o item i é selecionado
0 caso contrário

Formulação:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} p_i . y_i$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i . y_i \leq W$$

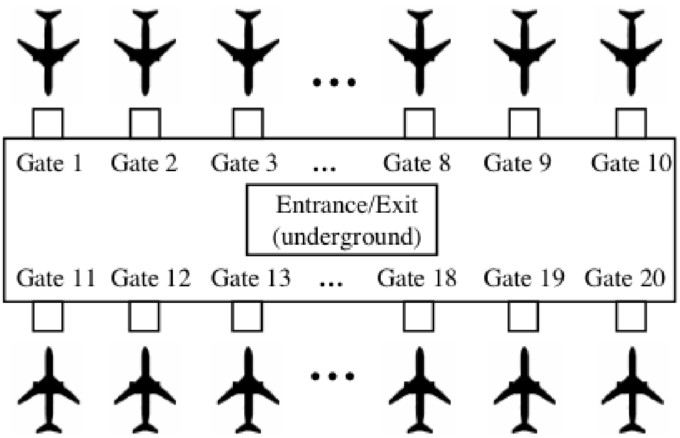
Exemplos:

-O aluno percebe que não poderá resolver toda a prova no tempo limite imposto. Cada questão tem um valor e um tempo estimado de resolução. Maximizar a nota da prova.

-Um drive virtual na nuvem tem uma capacidade máxima em gigabytes que é inferior à necessária. Quais arquivos selecionar para deixar na nuvem de forma a maximizar o uso do espaço?

-Selecionar alimentos para uma dieta respeitando o limite máximo de calorias diárias e maximizando o valor nutritivo.

Alocação
Assignment Problem



5

Variáveis de decisão:

$y_{ij} =$ 1 se a tarefa i for atribuída ao agente j
0 caso contrário

Formulação:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} . y_{ij}$$

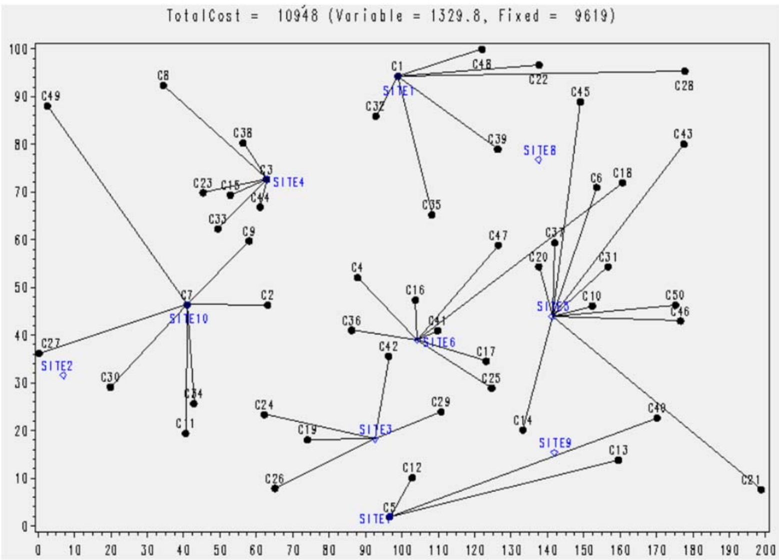
$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 1 \qquad \forall\, i$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = 1 \qquad \forall\, j$$

Exemplos:
-Uma fábrica tem m equipamentos para os quais deve atribuir m tarefas de produção. Um tempo de ajuste Δt_{ij} é necessário para que um equipamento esteja pronto para executar uma tarefa. Atribua as tarefas de modo a minimizar o tempo total de ajuste.
-Sua equipe de vendas consistes de m pessoas, que estão em diferentes cidades do Brasil. Há m clientes que demandam visitas nesta semana. Atribua os clientes aos vendedores de modo a minimizar os custos de transporte.

Localização de Plantas

Facility Location Problem



7

Variáveis de decisão:

y_i = 1 se a planta i é construída

0 caso contrário

x_{ij} quantidade de produto da planta i para o cliente j (ton/período)

Parâmetros:

f_i custo fixo amortizado para construção da planta i ($/período)

c_{ij} custo variável: abastecimento do cliente j pela planta i ($/ton)

U_i capacidade máxima de produção da planta i (ton/período)

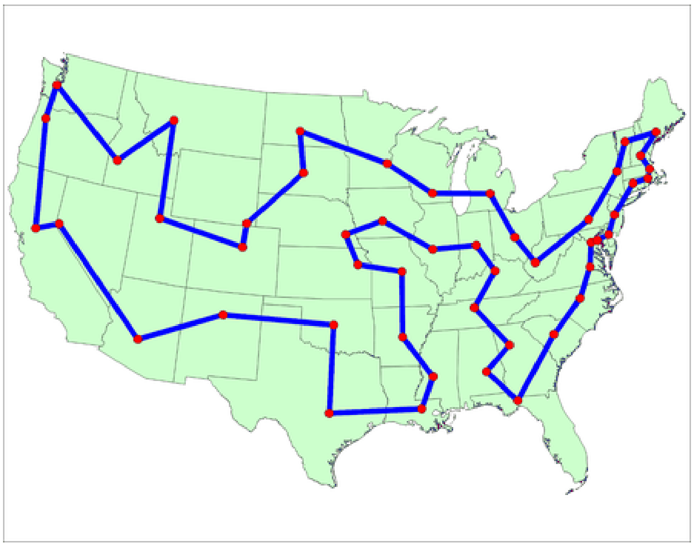
Formulação:

$$\min \sum_{i=1}^{n} f_i . y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} . x_{ij}$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \qquad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq U_i . y_i \quad \forall i$$

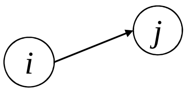
Caixeiro Viajante
Travelling Salesman Problem



9

Variáveis de decisão:

y_{ij} = 1 se a viagem de i para j é realizada ($i \neq j$)
0 caso contrário



Formulação:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} c_{ij} . y_{ij}$$

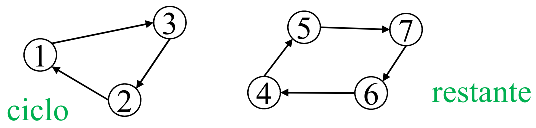
$$\text{s.a.:} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} y_{ij} = 1$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} y_{ij} = 1$$

Ocorrência de ciclos:

Introduza no problema uma restrição que torne inviável a ocorrência dos ciclos detectados.

Exemplo:

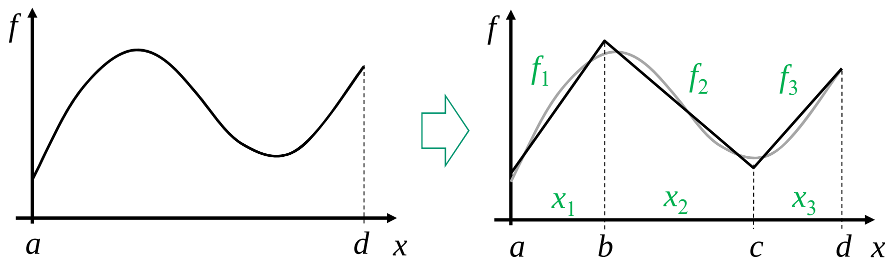


Deve haver pelo menos uma viagem do ciclo para o restante

$$(Y_{14} \vee Y_{15} \vee Y_{16} \vee Y_{17}) \vee (Y_{24} \vee Y_{25} \vee Y_{26} \vee Y_{27}) \vee (Y_{34} \vee Y_{35} \vee Y_{36} \vee Y_{37})$$

$$y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{24} + y_{25} + y_{26} + y_{27} + y_{34} + y_{35} + y_{36} + y_{37} \geq 1$$

LINEARIZAÇÃO DE PROBLEMAS NLP OU MINLP



Modelagem linear:

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$
$$f_1 = \alpha_1 . y_1 + \beta_1 . x_1$$
$$f_2 = \alpha_2 . y_2 + \beta_2 . x_2$$
$$f_3 = \alpha_3 . y_3 + \beta_3 . x_3$$

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$
$$a.y_1 \leq x_1 \leq b.y_1$$
$$b.y_2 \leq x_2 \leq c.y_2$$
$$c.y_3 \leq x_3 \leq d.y_3$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Identificação de Outras Soluções Discretas

Introduzir uma restrição que torne inviável a combinação ótima $\underline{y}^*$ e resolver o problema novamente

Solução ótima do MILP: $\underline{y}^* = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \ldots\ ]^T$

$i \in B \,/\, y_i^* = 1$

$i \in N \,/\, y_i^* = 0$

a) Remover pelo menos um elemento do conjunto B

$$\sum_{i \in B} y^i \leq |B| - 1$$

b) Eliminar apenas a solução atual

$$\sum_{i \in B} y^i - \sum_{i \in N} y^i \leq |B| - 1$$

Exemplo: $\underline{y}^* = [1\ 0\ 1\ 0]^T$

$B = \{1, 3\}$ $\qquad |B| = 2$

$N = \{2, 4\}$ $\qquad |N| = 2$

Caso (a): $y_1 + y_3 \leq 1$

Torna inviável: $[1\ 0\ 1\ 0]^T$, $[1\ 1\ 1\ 0]^T$, $[1\ 0\ 1\ 1]^T$, e $[1\ 1\ 1\ 1]^T$.

Caso (b): $y_1 + y_3 - y_2 - y_4 \leq 1$

Torna inviável: $[1\ 0\ 1\ 0]^T$

A escolha da estratégia vai depender do tipo do problema.

Síntese de Sequência de Destilação

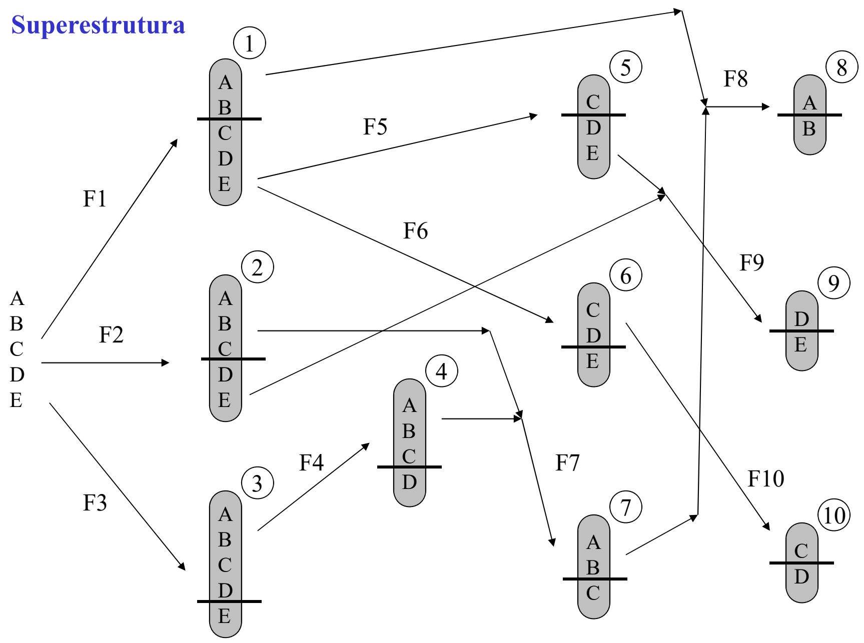
Separar uma mistura de cinco componentes: A, B, C, D e E.

Alimentação: 1.250 kmol/h com 10% de A, 15% de B, 20% de C, 20% de D e 35% de E.

O custo variável do vapor é de 32 $/MW.ano e da água de resfriamento é 2,0 $/MW.ano.

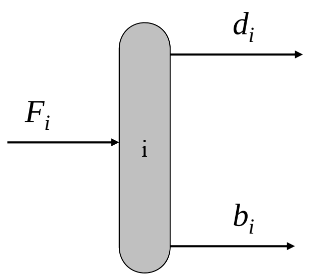
Separador	Custo fixo amortizado, α ($/ano)	Custo variável, β ($/(kmol/h).ano)	Coeficiente de carga térmica, K (MW/(kmol/h))
AB / CDE	119 000	320	39
ABC / DE	97 000	234	24
ABCD / E	45 000	77	44
ABC / D	50 000	91	33
C / DE	88 000	110	28
CD / E	42 000	100	47
AB / C	75 000	167	36
A / B	105 000	275	42
D / E	35 000	90	54
C / D	61 000	144	21

Superestrutura



16

Modelagem das colunas de separação (separação completa)



$$d_i = \gamma_i \, . \, F_i$$

$$b_i = (1 - \gamma_i). \, F_i$$

γ_i = fração de recuperação

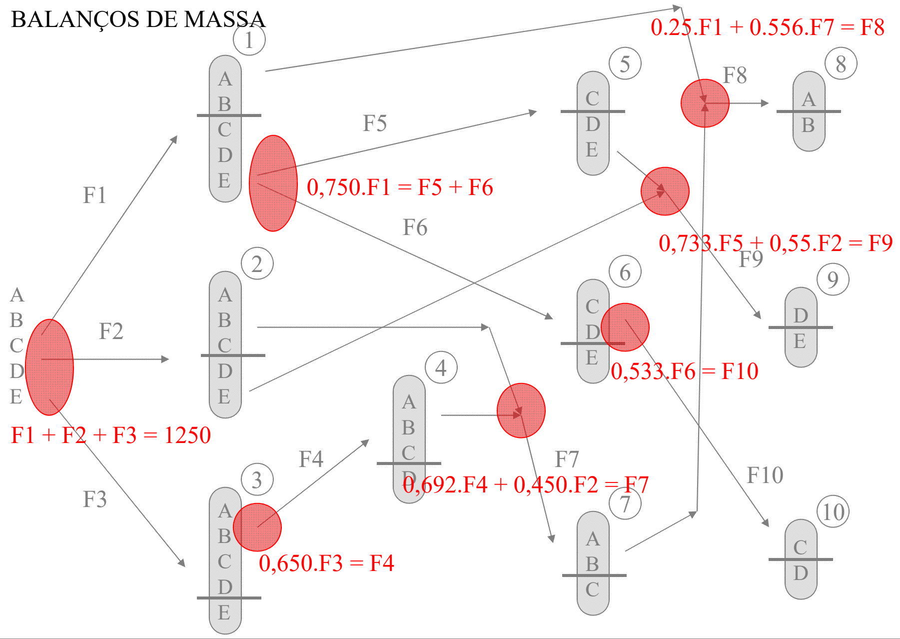
y_i = 1 se a coluna é usada
0 c.c.

Alimentação:

$x_A = 0{,}10$ $x_D = 0{,}20$
$x_B = 0{,}15$ $x_E = 0{,}35$
$x_C = 0{,}20$

17

BALANÇOS DE MASSA



18

Balanços de massa:

F1 + F2 + F3 = 1250
0,750.F1 = F5 + F6
0,650.F3 = F4
0,692.F4 + 0,450.F2 = F7
0,533.F6 = F10
0,733.F5 + 0,55.F2 = F9
0.25.F1 + 0.556.F7 = F8

Vazões de alimentação:

$F_i \geq 0$
$F_i \leq 1500.y_i$ *(big M)*

Custo:

$C = \Sigma\ (\alpha_i.y_i + \beta_i.F_i)\ +\ (32 + 2)\ .\ \Sigma\ K_i.F_i$

fixo variável vapor água coef. carga

19

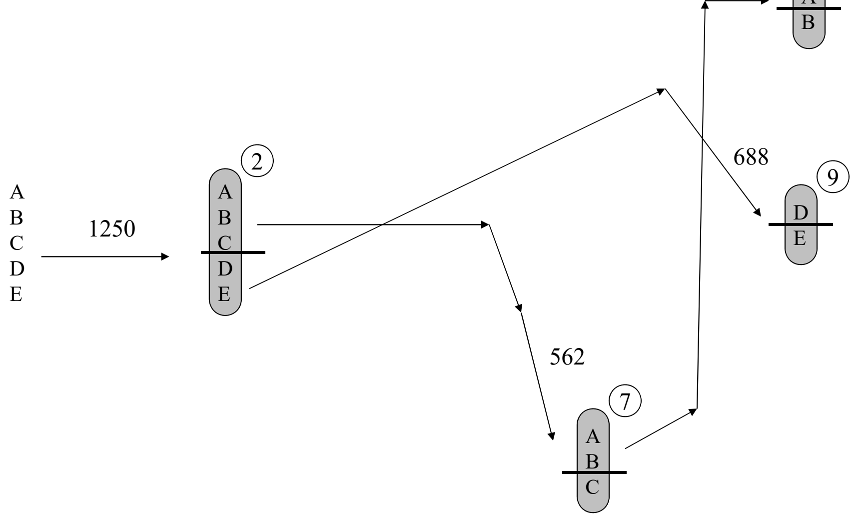
Modelo MILP:

$$\min \quad C = \sum_i (\alpha_i.y_i + \beta_i.F_i) + (32 + 2).\sum_i K_i.F_i$$

s.a.:

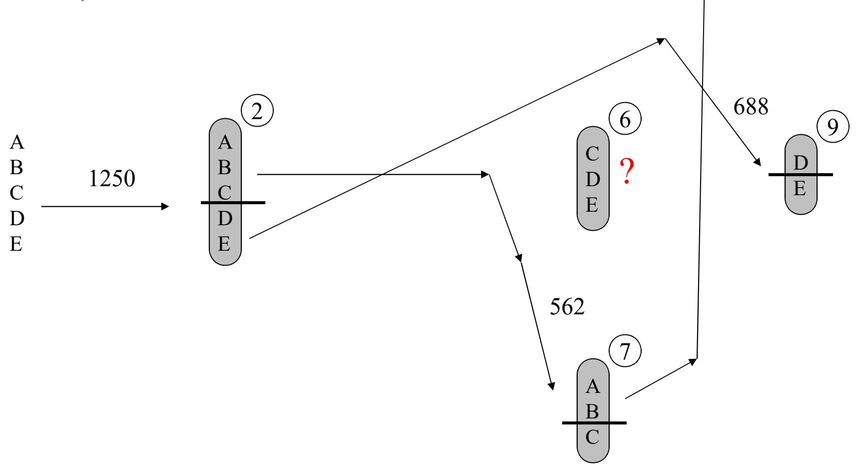
$$F_1 + F_2 + F_3 - 1250 = 0$$
$$0{,}750.F_1 - F_5 - F_6 = 0$$
$$0{,}650.F_3 - F_4 = 0$$
$$0{,}692.F_4 - 0{,}450.F_2 - F_7 = 0$$
$$0{,}533.F_6 - F_{10} = 0$$
$$0{,}733.F_5 + 0{,}55.F_2 - F_9 = 0$$
$$0.250.F_1 + 0.556.F_7 - F_8 = 0$$
$$0 \leq F_i \leq 1500.y_i \qquad \forall\ i$$
$$F_i \in \Re$$
$$y_i \in \{0,1\}$$

Solução 1:
Separadores 2, 7, 8 e 9
$C^* = 4{,}263$ M$/ano



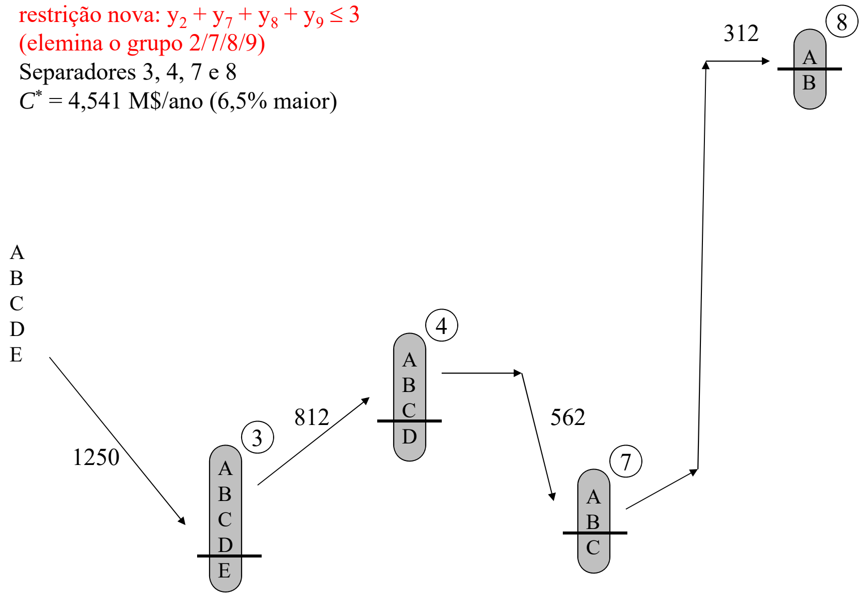
21

Solução 2A:
restrição nova: $y_2 + y_7 + y_8 + y_9 - y_1 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 - y_{10} \le 3$
(elimina apenas a Solução 1)
Separadores 2, 6, 7, 8 e 9
$C^* = 4{,}305$ M$/ano

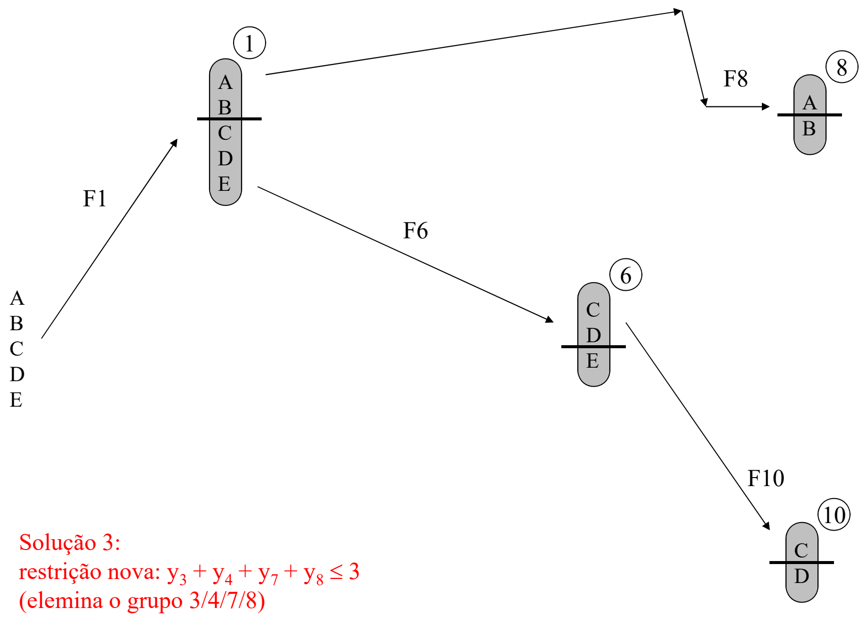


22

Solução 2B:
restrição nova: $y_2 + y_7 + y_8 + y_9 \leq 3$
(elemina o grupo 2/7/8/9)
Separadores 3, 4, 7 e 8
C^* = 4,541 M\$/ano (6,5% maior)



23



Solução 3:
restrição nova: $y_3 + y_4 + y_7 + y_8 \leq 3$
(elemina o grupo 3/4/7/8)
Separadores 1, 6, 8, 10
C^* = 4,953 M\$/ano

24

GAMS - *General Algebraic Modeling System*
Guia de utilização – Parte 2

PROBLEMA: As plantas de Seattle e de San Diego têm capacidades de produção mensal de 350 e 600 lotes de enlatados, respectivamente. A produção deve atender às demandas mensais de New York, Chicago e Topeka, que são de 325, 300 e 275 lotes, respectivamente. Formule um LP para minimizar os custos de distribuição dos enlatados. A tabela abaixo apresenta a distância em milhares de milhas entre plantas e centros de distribuição. O custo de transporte é de $90,00 por lote por mil milhas.

	Mercados		
Plantas	New York	Chicago	Topeka
Seattle	2,5	1,7	1,8
San Diego	2,5	1,8	1,4

Variáveis:

- z custo total (k$)
- x_{ij} quantidade transportada de i para j (lotes)

Parâmetros:

- a_i capacidade da planta i (lotes)
- b_j demanda do mercado j (lotes)
- d_{ij} distância de i para j (milhares de milhas)
- f custo de transporte (0,090 $/lote.milha)
- $c_{ij} = f.d_{ij}$ custo de transporte de i para j (k$/lote)

Modelagem:

$$\min \quad z = \sum_i \sum_j c_{ij}.x_{ij} \qquad \text{custo total}$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_j x_{ij} \le a_i \quad \forall\, i \qquad \text{fornecimento}$$

$$\sum_i x_{ij} \ge b_j \quad \forall\, j \qquad \text{demanda}$$

GAMS:

```
cost        ..  z =E= sum((i,j), c(i,j)*x(i,j)) ;
supply(i) ..  sum(j, x(i,j)) =L= a(i) ;
demand(j) ..  sum(i, x(i,j)) =G= b(j) ;
```

Parte 1: declaração dos índices e conjuntos

```
***************** Problema de Otimização *******************
*****************  Conjuntos  ******************************
Sets
  i plantas   / seattle, san-diego / ,
  j mercados  / new-york, chicago, topeka /  ;
```

Parte 2: Declaração e especificação de parâmetros

```
********************  Parâmetros  ************************
Parameters
   a(i) capacidade da planta i (lotes)
       / seattle   350
         san-diego 550 / ,
   b(j) demanda do mercado j (lotes)
       / new-york  325
         chicago   300
         topeka    275 / ;

Table d(i,j) distâncias (milhares de milhas)
               new-york  chicago  topeka
    seattle      2.5        1.7      1.8
    san-diego    2.5        1.8      1.4  ;

Scalar f custo de transporte (dolares por lote por milhas)
/ 0,090 / ;

Parameter c(i,j) custo de transporte (milhares de dolares
por lote) ;
  c(i,j) = f * d(i,j) ;
```

Parte 3: Declaração das variáveis

```
*******************  Variáveis  ***************************
Free Variable
  z        custo total de transporte (milhares de dólares) ;

Positive Variable
  x(i,j)  quantidade transportada (lotes);
```

Parte 4: Declaração e listagem das equações

```
********************  Equações  *****************************
Equations
  cost        definição da função objetivo,
  supply(i)  respeitar capacidade planta i,
  demand(j)  satisfazer demanda mercado j ;

cost      ..  z =E= sum((i,j), c(i,j)*x(i,j)) ;
supply(i) ..  sum(j, x(i,j)) =L= a(i) ;
demand(j) ..  sum(i, x(i,j)) =G= b(j) ;
```

Parte 5: Especificação do modelo e chamada do solver

```
***********************  Solução  ***************************
Model problema / all / ;
Solve problema using LP minimizing z ;
```

Dicas para problema de caixeiro viajante

Um pseudônimo pode ser atribuído a um conjunto usando `alias(i,j).`

Como fazer uma soma condicional do tipo “de i=1 até N com $i \neq j$”?
antes: `sum(i,Y(i,j))`
depois: `sum(i$(ord(i) ne ord(j)),Y(i,j))`
`$` significa "tal que"
`ne` significa "not equal"
função `ord()` retorna o valor da posição do elemento no set

Como eliminar um subciclo de forma elegante?

Poderia se criar uma equação específica para um ciclo como:

```
Y('1','3') + Y('1','5') + Y('2','3') + Y('2','5') +
Y('4','3') + Y('4','5') + Y('6','3') + Y('6','5') =G= 1 ;
```

outra forma é declarar um subconjunto de (i,j):

```
Set ciclo(i,j) /1.3, 1.5, 2.3, 2.5, 4.3, 4.5, 6.3, 6.5/;
```

e lançar uma equação limpa:

```
Equation Rciclo;
Rciclo..  sum(ciclo(i,j),Y(i,j)) =G= 1
```

Como zerar variáveis binárias específicas?

Criar um *subset*

```
Set
prb(i,j) viagens proibidas  / 3.1, 4.1 /   ;
```

e lançar equação direcionada

```
Equation RPRB(i,j);
RPRB(prb(i,j)).. Y(i,j) =E= 0;
```