MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 16 (05/11/2020)

Retomando parte da aula passada

Vimos, na última aula, um importante resultado:

Teorema 5

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Também começamos a analisar a sequência

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Na aula de hoje vamos demonstrar que $(a_n)_n$ é crescente e limitada para que possamos usar o Teorema 5 e concluir que existe $\lim a_n$.

Só com esse conhecimento é que podemos <u>definir</u> o número e:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Um pré-requisito

Para demonstrar que a sequência é crescente e limitada, iremos precisar da fórmula

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \\
&\quad + \binom{n}{3} a^{n-3}\, b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}
$$

em que são usadas as seguintes notações:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad \text{e} \qquad 0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

Um pré-requisito

Em particular:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$$

etc

Note que

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!\,2!} = \binom{3}{1} \text{ e } \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,3!} = \binom{4}{3}$$

Em geral, vale:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

A sequência $(a_n)_n$ é limitada

Vamos provar, mais precisamente, que $2 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $a_1 = 2$. Para $n \geq 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

Note que as duas primeiras parcelas somam 2 e as demais são positivas. Portanto, $a_n \geq 2$ para todo n.

Por outro lado, podemos reescrever a soma acima:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{<1}\frac{1}{2!} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}}_{<1}\frac{1}{3!} + \ldots + \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{<1}\frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

A sequência $(a_n)_n$ é limitada - continuação

Retomando,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&\overset{*}{\leq} 1+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&< 2+1=3
\end{aligned}$$

Na desigualdade * usamos o fato que $k! \geq 2^{k-1}$ para todo $k \geq 1$, cuja demonstração é um exercício.

$\square$

A sequência $(a_n)_n$ é crescente

Vamos agora provar que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.
Já vimos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\,\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\,\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n^n}\,\frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Portanto, vale a mesma igualdade para $n+1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1+1+\frac{(n+1)\,n}{(n+1)^2}\,\frac{1}{2!}+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{(n+1)^3}\,\frac{1}{3!}+\ldots+ \\ &\quad +\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\cdots 2}{(n+1)^n}\,\frac{1}{n!}+\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

A sequência $(a_n)_n$ é crescente - continuação

Na expressão de a_n, a k-ésima parcela é

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{n^k}\,\frac{1}{k!} &= \\ = \quad \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n}\,\frac{1}{k!} \\ = \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Analogamente, na expressão de a_{n+1}, a k-ésima parcela é

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, e para cada $m = 1, 2, \ldots, k-1$, vale:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow 1-\frac{1}{n+1} > 1-\frac{1}{n} \Rightarrow 1-\frac{m}{n+1} > 1-\frac{m}{n}$$

Assim, podemos concluir que cada parcela da expressão de a_n é menor do que a parcela correspondente da expressão de a_{n+1}.

A sequência $(a_n)_n$ é crescente - continuação

Além disso, o desenvolvimento de a_{n+1} tem uma parcela a mais que o desenvolvimento de a_n.
Com isso, fica claro que $a_n < a_{n+1}$ para todo n e, portanto, a sequência a_n é crescente.

$\square$

Dessa forma, agora podemos afirmar com segurança, com base no Teorema 5, que existe $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Esse limite é denotado por e.
Trata-se de um número irracional - isso será demonstrado pelo grupo 6 de PCoc. É um número muito importante na matemática!

Séries - Introdução

- Até o século XIX, os matemáticos tinham pouca compreensão sobre somas de uma quantidade infinita de números como, por exemplo, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$
- Tentavam operar com essas somas do mesmo modo como operavam com somas finitas, isto é, usando as mesmas propriedades.
- Não estando cientes de que algumas propriedades válidas para somas finitas não valiam para somas infinitas, eles chegavam a resultados equivocados.
- O filósofo grego Zenão de Eleia (século V a.C.) chamou atenção para dificuldades lógicas de cada uma das possíveis respostas por meio da elaboração de paradoxos.

Um dos paradoxos de Zenão

Para um corredor ir de um ponto A até um ponto B, ele terá primeiramente que cobrir metade da distância de A até B. Depois, metade do que falta, e assim por diante.

- Como isso envolve um número infinito de etapas, Zenão argumentou que o corredor nunca irá alcançar seu destino.
- Fazendo $d(A, B) = 1$, esse paradoxo concluía que é impossível efetuar a soma $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots$
- Com o conhecimento que se tem hoje, sabe-se que essa soma (de infinitas parcelas) é finita e igual a 1.
- Os gregos antigos não conseguiram aceitar a ideia de que é possível somar uma quantidade infinita de números e obter um resultado finito.

Um dos paradoxos de Zenão - continuação

- Repare que somando-se as duas primeiras parcelas, obtém-se $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (falta $\frac{1}{4}$ para chegar em 1)
- Somando-se as três primeiras parcelas, obtém-se $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ (falta $\frac{1}{8}$ para chegar em 1) e assim por diante.
- Conforme somamos mais termos, as somas finitas aumentam, aproximando-se de 1, e é possível chegar a um valor tão próximo de 1 quanto se queira, simplesmente acrescentando mais termos.
- A ideia de chegar a um valor tão próximo de X quanto se queira é o que hoje chamamos de limite.

Os gregos antigos sabiam somar muitos termos de uma progressão, mas o pensamento de estender esse processo para o infinito era inaceitável para eles, com exceção de Arquimedes, que calculou a área de um setor parabólico fazendo somas infinitas.

Soma de PG

O livro VIII e parte do livro IX da obra “Os Elementos” de Euclides tratam de *proporções continuadas*, que, na linguagem de hoje, são o que chamamos de progressões geométricas. Euclides enunciou:

> Se tantos números quanto quisermos estiverem em proporção continuada e do segundo e do último número for subtraído o primeiro, então o excesso do segundo está para o primeiro assim como o excesso do último está para todos.

Em linguagem atual: se $a, ar, ar^2, \cdots, ar^n$ é uma PG (finita), então

$$(ar - a) : a = (ar^n - a) : S$$

sendo S a soma de todos os termos da PG.

Podemos escrever: $\dfrac{ar - a}{a} = \dfrac{ar^n - a}{S}$, que é equivalente a

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Soma de PG - continuação

Uma demonstração moderna para a fórmula da soma da PG finita:
Seja S a soma dos n primeiros termos da PG:

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ S \cdot r &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \end{aligned}$$

Subtraindo termo a termo, todos os termos se cancelam exceto o primeiro de S e o último de Sr:

$$\begin{aligned} S - Sr &= a - ar^n \\ S(1-r) &= a(1-r^n) \end{aligned}$$

Se $r \neq 1$, tem-se

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Soma de PG infinita - continuação

Hoje, com o conceito de limite rigorosamente estabelecido, é possível provar que se $|r| < 1$ então $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Portanto, a soma S se torna

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \cdot \lim_{n\to\infty} (1-r^n) = \frac{a}{1-r}$$

Assim, a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

que aparece no paradoxo de Zenão é

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Novamente as dízimas periódicas

As somas de progressões geométricas – finitas ou infinitas – aparecem em praticamente todos os ramos da matemática.
A primeira vez que as encontramos (disfarçadamente) é na forma de dízimas periódicas. Por exemplo, o número $0,232323\ldots$ é uma soma de PG com infinitos termos:

$$\frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \cdots$$

cuja soma é

$$S = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{23}{99}$$

Uma soma estranha

A soma infinita

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

originou muita controvérsia no início do século XVIII.

- Leibniz (1646–1716), co-inventor com Newton (1642–1727) do Cálculo, argumentou que “como a soma pode ser igual a 0 ou a 1, com a mesma probabilidade, seu verdadeiro valor deveria ser a média $\frac{1}{2}$”.
- Tal raciocínio parece inacreditável nos dias de hoje, mas nos tempos de Leibniz alguns conceitos como limite e convergência não estavam bem compreendidos. Com isso, as somas infinitas eram tratadas de maneira equivocada, como se fossem meras extensões de somas finitas.
- O que dizemos hoje é que a soma $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ diverge.
- O que significa “divergir”? Basicamente, que não é possível somar.

Uma soma estranha - continuação

Quando uma soma com infinitas parcelas é divergente, podemos chegar a qualquer valor desejado! Por exemplo, vamos "provar" que $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0{,}4$.

- Escreva $1 = 0{,}4 + 0{,}6$ e substitua:

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= (0{,}4 + 0{,}6) - (0{,}4 + 0{,}6) + (0{,}4 + 0{,}6) - \cdots \\ &= 0{,}4 + (0{,}6 - 0{,}4) - (0{,}6 - 0{,}4) + (0{,}6 - 0{,}4) - \cdots \\ &= 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}2 + 0{,}2 - 0{,}2 + \cdots \\ &= 0{,}4 + (0{,}2 - 0{,}2) + (0{,}2 - 0{,}2) + \cdots = 0{,}4 \end{aligned}$$

- Se, na quarta linha, tivéssemos colocado os parêntesis de outra maneira, teríamos encontrado outro resultado:

$$S = (0{,}4 + 0{,}2) - (0{,}2 - 0{,}2) + (0{,}2 - 0{,}2) - \cdots = 0{,}6$$

Qual a conclusão até aqui?

Vimos que algumas somas infinitas são possíveis de serem calculadas e outras não, o que nos mostra que não podemos tratar somas infinitas da mesma forma como tratamos as somas finitas. Por exemplo, para as somas finitas valem as propriedades associativa e comutativa da adição. Com somas infinitas precisamos tomar mais cuidado!

Como lidar com somas de infinitas parcelas?

Apenas no século XIX é que os matemáticos começaram a dar um tratamento mais rigoroso para as somas infinitas e só então foi possível estabelecer métodos para se lidar com elas.

Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ uma sequência de números reais, isto é, uma lista infinita de números arranjados em ordem, sendo a_1 o primeiro da lista, a_2 o segundo e assim por diante.

A soma infinita desses números nessa ordem é o que chamamos de série e indicamos por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Como lidar com somas de infinitas parcelas?

Para se calcular $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, definimos as somas parciais:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

- Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S(\in \mathbb{R})$ dizemos que a série converge para S e podemos escrever $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
- Se o limite da sequência das somas parciais não existir ou não for finito, diremos que a série é divergente.

Exemplos

No caso particular da série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, a saber,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

observamos que as somas parciais da série são:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \tfrac{1}{2}, \\
S_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} = 1 - \tfrac{1}{4}, \\
S_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8} = 1 - \tfrac{1}{8} \\
&\vdots \\
S_n &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} = \tfrac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \tfrac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Como $\lim S_n = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, podemos escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Alguns exemplos importantes de séries divergentes

(a) $1 + 1 + 1 + \cdots$
Tem-se: $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, ..., $S_n = n$.
Como o limite de S_n é infinito, concluímos que a série

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

é divergente.

(b) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$
Este caso ilustra um <u>outro tipo de divergência</u>.
As somas parciais são
$S_1 = 1\,;\ S_2 = 1-1 = 0\,;\ S_3 = 1-1+1 = 1\,;\ \ S_4 = 1-1+1-1 = 0\,;$

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par;} \end{cases}$$

Conclusão: não existe $\lim S_n$. (Por quê?)
Portanto, a série é divergente.

A série harmônica

(c)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

É mais um exemplo de série divergente, mas esse fato não é nem um pouco óbvio. Vejamos:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Série harmônica - continuação

Podemos verificar que $S_{16} > 1 + \frac{4}{2}$, e, em geral,

$$S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$$

Dessa forma, podemos perceber que se n cresce indefinidamente, as somas parciais tendem a infinito. Logo, a série harmônica *diverge*.

Nas próximas aulas iremos conhecer mais exemplos importantes de séries e alguns teoremas que irão nos ajudar a decidir se uma série é convergente ou divergente.