

### 2.3.1 O grupo de Lorentz $O(3,1)$

Sendo  $\lambda_\iota \in O(3,1)$  um operador linear, sua ação num elemento qualquer  $v^a \in \mathbb{V}$  é completamente determinada pela maneira como atua numa base dada *qualquer*,  $\{\mathbf{x}_\mu^a\}$ , pois

$$\lambda_\iota(v^a) = \lambda_\iota(v^\mu \mathbf{x}_\mu^a) = v^\mu \lambda_\iota(\mathbf{x}_\mu^a).$$

Em particular, como  $\lambda_\iota$  preserva o produto interno entre 4-vetores, é conveniente escolhermos uma base tetrada,  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ , para caracterizar sua ação, pois  $\lambda_\iota$  mapeia bases tetradas em bases tetradas:

$$\lambda_\iota(\mathbf{e}_\mu^a) =: \tilde{\mathbf{e}}_\mu^a = \Lambda_\mu^\alpha \mathbf{e}_\alpha^a,$$

onde  $\Lambda_\mu^\alpha$  representa a  $\alpha$ -ésima componente do  $\mu$ -ésimo elemento da *nova* base tetrada, em relação à base original.<sup>7</sup> O mapeamento  $\lambda_\iota$  atuando num 4-vetor arbitrário fica, então,

$$\lambda_\iota(v^a) = v^\mu \lambda_\iota(\mathbf{e}_\mu^a) = v^\mu \Lambda_\mu^\alpha \mathbf{e}_\alpha^a; \quad (2.28)$$

ou seja,  $\lambda_\iota$  mapeia um 4-vetor com *componentes*  $v^\mu$  (numa base tetrada dada) no 4-vetor com componentes  $\Lambda_\mu^\alpha v^\mu$  (na *mesma* base tetrada). Por conveniência, definiremos uma matriz  $4 \times 4$   $\Lambda$  cujas entradas são dadas

---

<sup>7</sup>O valor dos coeficientes  $\Lambda_\mu^\alpha$  associados a um dado  $\lambda_\iota$  *depende* da escolha da tetrada  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$  de referência — assim como  $\iota_o^*$  depende da escolha do evento de referência  $o \in \mathbb{M}$ . No entanto, se tivéssemos escolhido outra tetrada como referência, digamos  $\{\mathbf{e}'_\mu^a\}$ , os coeficientes  $\Lambda_\mu^\alpha$  correspondentes ao mesmo  $\lambda_\iota$  seriam iguais aos coeficientes associados a um outro operador  $\lambda_{\iota'}$  com a escolha anterior de tetrada,  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$  — a exemplo, também, do que acontece com a dependência de  $\iota_o^*$  com  $o \in \mathbb{M}$ . Logo, como nosso objetivo é determinar *todos* os operadores  $\lambda_\iota$  associados a todas as isometrias  $\iota$ , o conjunto final obtido é independente da escolha de tetrada de referência.

por  $\Lambda_\mu^\alpha$ , onde o índice de cima enumera as linhas da matriz, enquanto o índice de baixo enumera as colunas. Com isso, representando um elemento arbitrário  $v^a \in \mathbb{V}$  através de uma matriz coluna  $[v]$  com entradas  $v^\mu$ , a atuação de  $\lambda_\iota$  pode ser expressa em forma matricial por

$$[v] \xrightarrow{\lambda_\iota} \Lambda[v]. \quad (2.29)$$

- **Exercício:** Sejam  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  as matrizes associadas aos operadores  $\lambda_{\iota_1}$  e  $\lambda_{\iota_2}$ , respectivamente (expressos na mesma base tetrada). Mostre que a matriz associada à composição  $\lambda_{\iota_1} \circ \lambda_{\iota_2}$  é dada pelo produto matricial  $\Lambda_1 \Lambda_2$ .

Pela condição de que  $\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a := \lambda_\iota(\mathbf{e}_\mu^a)$  também formam uma base tetrada,  $\Lambda$  deve satisfazer:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= g_{ab} \mathbf{e}_\mu^a \mathbf{e}_\nu^b = g_{ab} \lambda_\iota(\mathbf{e}_\mu^a) \lambda_\iota(\mathbf{e}_\nu^b) = g_{ab} \Lambda_\mu^\alpha \mathbf{e}_\alpha^a \Lambda_\nu^\beta \mathbf{e}_\beta^b \\ &= \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta (g_{ab} \mathbf{e}_\alpha^a \mathbf{e}_\beta^b) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.30)$$

ou, em forma matricial,<sup>8</sup>

$$\eta = \Lambda^\top \eta \Lambda. \quad (2.31)$$

O conjunto de todas as matrizes  $4 \times 4$  que satisfazem a Eq. (2.31) fornece uma maneira concreta de se representar o grupo de Lorentz  $O(3, 1)$  (chamada, também, de *representação definidora* do grupo  $O(3, 1)$ ).

Uma simples contagem de “graus de liberdade” nos diz que é natural esperar que as matrizes que satisfazem a Eq. (2.31) sejam parametrizadas por 6 parâmetros reais ( $\Lambda$  possui 16 entradas, mas a Eq. (2.31) fornece 10 vínculos entre elas — entenda o porquê). Mas antes de procurarmos pela forma explícita de  $\Lambda$ , vamos analisar algumas propriedades imediatas que decorrem da Eq. (2.31).

Tomando o determinante de ambos os lados da Eq. (2.31), conclui-se que  $\det(\Lambda) = \pm 1$ . Além disso, a entrada  $\mu = \nu = 0$  da Eq. (2.30) fornece:

$$\begin{aligned} -1 = \eta_{00} &= \Lambda_0^\alpha \Lambda_0^\beta \eta_{\alpha\beta} = -(\Lambda_0^0)^2 + \sum_{j=1}^3 (\Lambda_0^j)^2 \\ \implies (\Lambda_0^0)^2 &= 1 + \sum_{j=1}^3 (\Lambda_0^j)^2 \geq 1; \end{aligned} \quad (2.32)$$

---

<sup>8</sup>Note, como já apontado anteriormente, a semelhança dessa condição com a condição que define as transformações ortogonais:  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{1}$ , onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade.

logo,  $\Lambda_0^0 \geq 1$  ou  $\Lambda_0^0 \leq -1$ . Com isso, para simplificar nossa análise, quebraremos o grupo de Lorentz em 4 subconjuntos (disjuntos),

$$O(3, 1) = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow,$$

onde  $\uparrow$  (respectivamente,  $\downarrow$ ) indexa subconjuntos contendo exclusivamente matrizes com  $\Lambda_0^0 \geq 1$ , denominadas *ortócronas*, (resp.,  $\Lambda_0^0 \leq -1$ , denominadas *anti-ortócronas*) e  $+$  (resp.,  $-$ ) indexa subconjuntos contendo exclusivamente matrizes satisfazendo  $\det(\Lambda) = 1$ , denominadas *próprias*, (resp.,  $\det(\Lambda) = -1$ , denominadas *impróprias*).<sup>9</sup>

• **Exercício:** Utilizando as expressões (equivalentes) (2.30) ou (2.31), pede-se:

- (a) Mostre que se  $\Lambda \in O(3, 1)$ , então  $\Lambda^{-1} \in O(3, 1)$ ;
- (b) Usando o resultado do item anterior e o fato que  $\eta = \eta^{-1}$ , mostre que se  $\Lambda \in O(3, 1)$ , então  $\Lambda^\top \in O(3, 1)$ ;
- (c) Mostre que se  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in O(3, 1)$ , então  $(\Lambda_1 \Lambda_2) \in O(3, 1)$ ;
- (d) Mostre que se  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in O(3, 1)$ , então o sinal de  $(\Lambda_1 \Lambda_2)_0^0$  é igual ao sinal do produto  $(\Lambda_1)_0^0 (\Lambda_2)_0^0$ ;
- (e) Mostre que  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é um subgrupo de  $O(3, 1)$  (chamado grupo de Lorentz próprio e ortócrono, ou restrito);
- (f) Mostre que a união de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  com qualquer *um* dos outros três subconjuntos  $\mathcal{L}_+^\downarrow, \mathcal{L}_-^\uparrow, \mathcal{L}_-^\downarrow$  também forma um subgrupo de  $O(3, 1)$ . (Vide nota de rodapé anterior para a nomenclatura de alguns desses subgrupos.)

Até agora, analisamos propriedades de  $\Lambda$  pertencentes a cada um dos subconjuntos  $\mathcal{L}_+^\uparrow, \mathcal{L}_+^\downarrow, \mathcal{L}_-^\uparrow$  e  $\mathcal{L}_-^\downarrow$ , mas não mostramos a *existência* desses elementos — ou seja, que esses subconjuntos não são vazios. Mas isso é fácil de se verificar por inspeção direta, pois claramente  $\mathbf{1} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  (o que o(a) leitor(a) já deve ter notado para resolver o item (e) do exercício anterior),  $\mathbf{T} := \eta \in \mathcal{L}_-^\downarrow$ ,  $\mathbf{P} := -\mathbf{T} \in \mathcal{L}_-^\uparrow$  e  $\mathbf{PT} = -\mathbf{1} \in \mathcal{L}_+^\downarrow$ . Além disso, dada uma matriz  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ , pode-se mostrar facilmente, com base no exercício anterior, que  $\mathbf{T}\Lambda \in \mathcal{L}_-^\downarrow$ ,  $\mathbf{P}\Lambda \in \mathcal{L}_-^\uparrow$  e  $\mathbf{PT}\Lambda = -\Lambda \in \mathcal{L}_+^\downarrow$ . (Exercício: Mostre isso.) Inversamente,  $\mathbf{T}, \mathbf{P}$  e  $\mathbf{TP}$  aplicados em elementos de  $\mathcal{L}_-^\downarrow, \mathcal{L}_-^\uparrow$  e  $\mathcal{L}_+^\downarrow$ , respectivamente, levam a

---

<sup>9</sup>Algumas outras notações que aparecem na literatura:  $O^+(3, 1) \equiv \mathcal{L}^\uparrow \equiv \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$  (transformações ortócronas),  $SO(3, 1) \equiv \mathcal{L}_+ \equiv \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$  (transformações próprias) e  $SO^+(3, 1) \equiv \mathcal{L}_+^\uparrow$  (transformações próprias e ortócronas, ou *restritas*). Como mostrado no exercício a seguir, cada um desses subconjuntos é um subgrupo do grupo de Lorentz (que leva o mesmo nome do tipo de suas transformações).

elementos de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . E como essas matrizes  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{TP}$  são inversíveis (em particular, são suas próprias inversas:  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{P}^2 = (\mathbf{PT})^2 = \mathbf{1}$ ), elas provêem uma bijeção entre  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  e qualquer outro dos três subconjuntos  $\mathcal{L}_-^\downarrow$ ,  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  e  $\mathcal{L}_+^\downarrow$ . Assim, para determinar a forma geral de um elemento  $\Lambda$  de  $O(3, 1)$  basta encontrarmos a forma geral de um elemento de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  e, depois, aplicar cada uma das três matrizes  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{TP} = -\mathbf{1}$ <sup>10</sup> (vide **Fig. 2.16**).

### Grupo de Lorentz próprio e ortócrono $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Para encontrarmos a forma geral de um elemento  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ , vamos sair do árido “algebrismo” que tem dominado o tom desta seção e buscar ajuda na interpretação geométrica da atuação desses elementos em  $\mathbb{V}$ . Vimos que elementos de  $O(3, 1)$  se caracterizam por mapear bases tetradas em bases tetradas. Mas os elementos de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  fazem isso de modo particular. Em primeiro lugar, o fato que  $\Lambda_0^0 \geq 1$  significa que a projeção de  $\tilde{\mathbf{e}}_0^a := \lambda_i(\mathbf{e}_0^a)$  na direção de  $\mathbf{e}_0^a$  é no mesmo sentido deste último, pois<sup>11</sup>

$$\mathcal{P}_{\mathbf{e}_0}(\tilde{\mathbf{e}}_0^a) = -(g_{bc}\mathbf{e}_0^b\tilde{\mathbf{e}}_0^c)\mathbf{e}_0^a = \Lambda_0^0\mathbf{e}_0^a.$$

Como  $\tilde{\mathbf{e}}_0^a$  tem que se manter tipo-tempo, conclui-se que ambos estão “dentro” da mesma “metade” do cone-de-luz do evento  $o \in \mathbb{M}$  e, portanto, se pensarmos em  $\mathbf{e}_0^a$  como caracterizando a linha-de-mundo de um observador  $\mathcal{O}$  passando pelo evento  $o \in \mathbb{M}$ , então  $\tilde{\mathbf{e}}_0^a$  representaria um outro observador  $\tilde{\mathcal{O}}$  passando por  $o$  com velocidade de módulo  $V$  em relação a  $\mathcal{O}$  — de modo que  $\Lambda_0^0 = \gamma$  (vide item (b) do Exercício ④ do capítulo anterior). Além disso, sendo  $V^j$  a componente na direção  $\mathbf{e}_j^a$  da 3-velocidade  $\mathbf{V}^a$  de  $\tilde{\mathcal{O}}$  em relação a  $\mathcal{O}$ , podemos fazer uso da

<sup>10</sup>Nota técnica (apenas para os interessados, motivada pela discussão em aula): O conjunto  $\mathbb{K}_4 := \{\mathbf{1}, \mathbf{T}, \mathbf{P}, -\mathbf{1}\}$ , com multiplicação de matrizes, possui estrutura natural de grupo (e esse grupo é isomorfo a — ou seja, pode ser identificado com — o *produto direto*  $Z_2 \times Z_2$  — chamado de grupo de Klein —, onde  $Z_2$  é o grupo de permutações de dois elementos). Além disso, para  $\mathbf{M} \in \mathbb{K}_4$ ,  $\mathcal{L}_+^\uparrow \ni \Lambda \mapsto \mathbf{M}^{-1}\Lambda\mathbf{M} \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  é um *automorfismo* em  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  — ou seja, uma bijeção de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  em  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  que preserva sua estrutura de grupo. Com isso, o grupo de Lorentz pode ser expresso como (i.e., é isomorfo a) o *produto semi-direto*  $O(3, 1) = \mathcal{L}_+^\uparrow \rtimes \mathbb{K}_4$ , com cada elemento dado por  $(\Lambda, \mathbf{M}) \in \mathcal{L}_+^\uparrow \times \mathbb{K}_4$ , com a regra de produto dada por  $(\Lambda_1, \mathbf{M}_1) \cdot (\Lambda_2, \mathbf{M}_2) = (\mathbf{M}_2^{-1}\Lambda_1\mathbf{M}_2\Lambda_2, \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ . Em particular,  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é um *subgrupo normal* de  $O(3, 1)$ . Algumas outras maneiras de expressar o grupo de Lorentz são como produto direto  $O(3, 1) = \mathcal{L}^\uparrow \times Z_2$  (com  $Z_2$  representado por  $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ ) e produto semi-direto  $O(3, 1) = \mathcal{L}_+ \rtimes Z_2$  (com  $Z_2$  representado por  $\{\mathbf{1}, \mathbf{P}\}$ , com a mesma regra de produto definida no caso  $\mathcal{L}_+^\uparrow \rtimes \mathbb{K}_4$ , mas agora para  $(\Lambda, \mathbf{M}) \in \mathcal{L}_+ \times \{\mathbf{1}, \mathbf{P}\}$ ).

<sup>11</sup>Na expressão a seguir,  $\mathcal{P}_u$  é o operador de projeção em  $u^a$ , como definido na Seção 1.4.

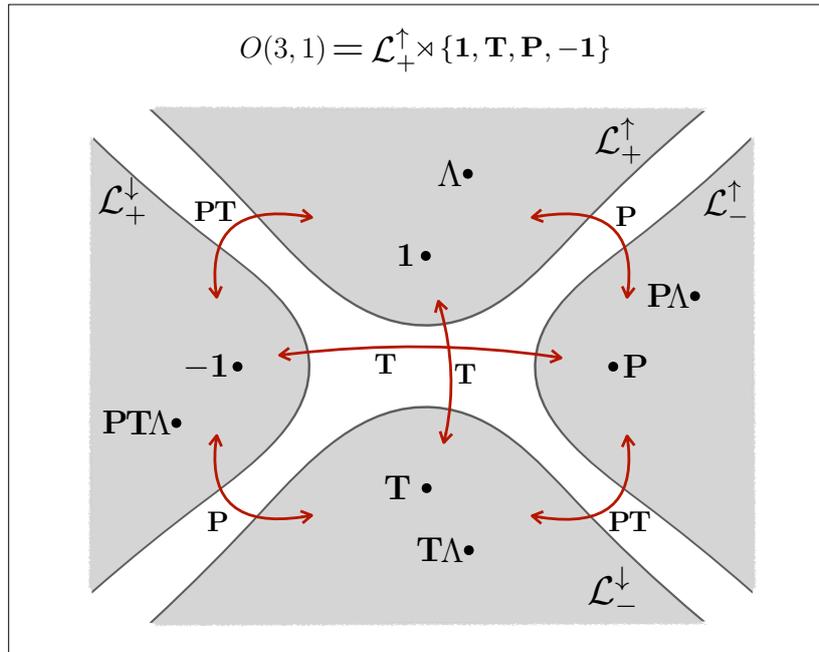


Figura 2.16: Representação esquemática do grupo de Lorentz,  $O(3,1)$ , como união disjunta dos subconjuntos  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ,  $\mathcal{L}_+^\downarrow$ ,  $\mathcal{L}_-^\uparrow$  e  $\mathcal{L}_-^\downarrow$ . A representação tem a intenção de passar a ideia (correta) de que elementos de um *mesmo* subconjunto podem ser conectados por uma curva *contínua* em que cada ponto é um elemento de  $O(3,1)$ . Em outras palavras, dado um elemento de  $O(3,1)$  e variando-se continuamente os 6 parâmetros reais que caracterizam os elementos desse grupo, sempre nos manteremos no mesmo subconjunto de partida — por isso, esses subconjuntos são chamados de *componentes conexas* de  $O(3,1)$ . Em particular, o subgrupo  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é constituído por todos (e apenas) os elementos de  $O(3,1)$  que podem ser obtidos a partir da identidade variando-se continuamente os 6 parâmetros reais. Os elementos  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{TP}$  são as transformações *discretas* que conectam subconjuntos diferentes. (Por outro lado, essa representação visual *falha* em capturar o fato que essas componentes conexas *não* possuem “bordas” (*fronteiras*).)

Eq. (2.46) do Exercício ⑥, mais adiante, para obter:

$$\begin{aligned} V^j &= g_{ab} \mathbf{e}_j^a \mathbf{V}^b = c\gamma^{-1} g_{ab} \mathbf{e}_j^a \tilde{\mathbf{e}}_0^b = c\gamma^{-1} g_{ab} \mathbf{e}_j^a \Lambda_0^\mu \mathbf{e}_\mu^b \\ &= c\gamma^{-1} \eta_{j\mu} \Lambda_0^\mu = c\gamma^{-1} \Lambda_0^j \implies \Lambda_0^j = \gamma V^j / c \end{aligned}$$

O exercício a seguir mostra como obter os elementos  $\Lambda_j^0$  por um raciocínio análogo.

- **Exercício:** Sendo  $\tilde{\mathbf{V}}^a$  a 3-velocidade de  $\mathcal{O}$  em relação a  $\tilde{\mathcal{O}}$  e  $\tilde{V}^j$  sua componente na direção de  $\tilde{\mathbf{e}}_j^a$ , mostre que

$$\Lambda_j^0 = -\gamma \tilde{V}^j / c.$$

(Note que não há necessidade de se usar a notação  $\tilde{\gamma}$ , pois já mostramos que  $\tilde{V} = \|\tilde{\mathbf{V}}^a\| = \|\mathbf{V}^a\| = V$ .)

Em resumo, um elemento de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  (na verdade, de  $\mathcal{L}^\uparrow$ ) pode ser interpretado como mapeando um observador  $\mathcal{O}$  (caracterizado pela base tetrada  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ ) num observador  $\tilde{\mathcal{O}}$  (caracterizado pela base tetrada  $\{\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a\}$ ), de modo que a matriz  $\Lambda$  associada tem a forma

$$\Lambda = \left( \begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \tilde{V}^j / c \\ \hline \gamma V^i / c & \Lambda_j^i \end{array} \right), \quad (2.33)$$

onde as 9 entradas  $\Lambda_j^i$  ainda têm que ser determinadas. Note que, embora tenhamos expressado algumas das entradas de  $\Lambda$  usando os 6 parâmetros  $V^j$  e  $\tilde{V}^j$ , eles não são completamente independentes, pois, como já frisamos,  $\tilde{V} = V$ . Logo, apenas os valores de  $V^j$  e  $\tilde{V}^j$  *não* são suficientes para se determinar  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  completamente.

Há mais de uma estratégia para se determinar  $\Lambda$  completamente. Apresentaremos, aqui, a estratégia mais simples — em que um elemento genérico de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  é construído a partir de elementos particulares.

- **Rotações:** A Eq. (2.33) deixa claro que se considerarmos o caso particular em que os vetores tipo-tempo das bases tetradas coincidem ( $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$  em repouso entre eles), então a matriz correspondente assume a forma

$$\Lambda_R = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & R \end{array} \right), \quad (2.34)$$

onde  $R$  é uma matriz  $3 \times 3$  que, como decorrencia da Eq. (2.31) e de  $\det(\Lambda_R) = 1$ , satisfaz  $R^T R = \mathbf{1}$  e  $\det(R) = 1$ ; ou seja,  $R$  é um elemento do grupo ortogonal especial em 3 dimensões,  $SO(3)$ , que tem a

propriedade de mapear bases ortonormais  $\{\mathbf{e}_j^a\}_{j=1,2,3}$  em bases ortonormais  $\{\tilde{\mathbf{e}}_j^a\}_{j=1,2,3}$  (ambas gerando o *mesmo* espaço tridimensional). Além disso, a quiralidade de ambas as bases é a mesma, graças a  $\det(\mathbf{R}) = 1$ . Desse modo,  $\mathbf{R}$  representa uma *rotação espacial*.

Uma contagem de graus de liberdade, totalmente análoga à efetuada anteriormente para  $\Lambda$ , mostra que as matrizes  $\mathbf{R} \in SO(3)$  são parametrizadas por 3 parâmetros reais. Podemos construir uma matriz de rotação genérica a partir de rotações particulares. Evidentemente, as matrizes  $\mathbf{R}_j(\theta)$ , que rotacionam os vetores ortogonais a  $\mathbf{e}_j^a$  por um ângulo  $\theta$  (de acordo com a regra da mão direita em relação à orientação de  $\mathbf{e}_j^a$ ), mantendo  $\mathbf{e}_j^a$  invariante, são casos particulares de rotações espaciais; logo,  $\mathbf{R}_j(\theta) \in SO(3)$ . E lembrando que  $g_{ab} \mathbf{e}_i^a \tilde{\mathbf{e}}_j^b = \Lambda_j^i$ , não é difícil verificar (faça isso!) que suas formas explícitas são:

$$\mathbf{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Essas matrizes são suficientes para obtermos a forma mais geral de  $\mathbf{R} \in SO(3)$ , como indicado no exercício abaixo.

- **Exercício:** Mostre que qualquer matriz  $\mathbf{R} \in SO(3)$  pode ser dada por

$$\mathbf{R}(\phi, \chi, \theta) = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\theta)\mathbf{R}_3(\chi). \quad (2.38)$$

Calcule explicitamente essa matriz, interpretando geometricamente o significado dos parâmetros  $(\phi, \chi, \theta)$  e fornecendo seus intervalos de variação. Além disso, como um *bônus*, tente pensar numa maneira de visualizar *concretamente* o conjunto  $SO(3)$ . (Sugestão: Mostre que *qualquer* elemento de  $SO(3)$  representa *uma* rotação de um ângulo entre  $-\pi$  e  $\pi$  em torno de algum eixo fixo.)

Tendo encontrado a forma mais geral dos elementos de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  que mantêm  $\mathbf{e}_0^a$  invariante, podemos, agora, considerar as transformações que alteram  $\mathbf{e}_0^a$ .

• **Boosts:** Como já dissemos, os elementos de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  que alteram o 4-vetor tipo-tempo da base tetrada podem ser interpretados como mapeando observadores que se movem um em relação ao outro, cada um caracterizado por uma base tetrada. Mas já obtivemos uma relação desse tipo na Seção 2.1, quando analisamos a relação entre bases tetradas que caracterizam observadores em movimento relativo na direção dada por  $\mathbf{e}_1^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$  [vide Eqs. (2.5) e (2.7)]. Denotando por  $\Lambda_{B_j}(V) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  a matriz que faz esse mesmo papel nas direções  $\mathbf{e}_j^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_j^a$  (com a mesma convenção de alinhamento das bases usada na Seção 2.1), tem-se:

$$\Lambda_{B_1}(V) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V/c & 0 & 0 \\ \gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\Lambda_{B_2}(V) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma V/c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma V/c & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\Lambda_{B_3}(V) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma V/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma V/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

[Note como essas formas particulares se encaixam na forma geral dada pela Eq. (2.33).] Essas transformações são casos particulares de *boosts*: transformações que relacionam tetradas cujos respectivos 4-vetores tipo-espaço  $\mathbf{e}_j^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_j^a$  estão “o mais alinhados possível” (num sentido que ficará claro mais adiante). Mas gostaríamos de obter a forma de uma matriz de *boost*  $\Lambda_B(\mathbf{V}^a)$  numa direção arbitrária, dada pela 3-velocidade  $\mathbf{V}^a$  de  $\tilde{\mathcal{O}}$  em relação a  $\mathcal{O}$ , e não apenas ao longo das direções de  $\mathbf{e}_j^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_j^a$ . Para isso, a exemplo do que fizemos no caso de rotações, construiremos (na verdade, o(a) leitor(a) construirá, no exercício abaixo) esse *boost* genérico a partir de um caso particular dado acima (por exemplo,  $\Lambda_{B_1}$ ), combinado com rotações.

• **Exercício:** Utilizando as Eqs. (2.35-2.37) e (2.39), pede-se:

- (a) Dada uma direção caracterizada pelos *ângulos esféricos*  $(\phi, \theta)$  (azimutal e polar, respectivamente, em relação a  $\{\mathbf{e}_j^a\}$ ), construa uma matriz de rotação  $\Lambda_{\mathcal{R}}(\phi, \theta) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  que mapeie o versor  $\mathbf{e}_1^a$  nessa direção;
- (b) Sendo  $\mathbf{V}^a$  um 3-vetor (em relação a  $\mathbf{e}_0^a$ ) com norma  $V$ , na

direção dada por  $(\phi, \theta)$  do item anterior, calcule explicitamente a matriz

$$\Lambda_B(\mathbf{V}^a) := \Lambda_{\mathcal{R}}(\phi, \theta) \Lambda_{B1}(V) \Lambda_{\mathcal{R}}(\phi, \theta)^{-1}$$

e interprete seu significado. Expresse-a em termos de  $V$  e  $n_j := V^j/V$ ;

- (c) Mostre que  $\Lambda_B(\mathbf{V}^a)^{-1} = \Lambda_B(-\mathbf{V}^a)$ ;
- (d) Analise os casos particulares em que a direção de  $\mathbf{V}^a$  coincide com cada um dos versores  $\mathbf{e}_j^a$  e, independentemente, o limite de baixas velocidades (no qual se desprezam fatores da ordem de  $V^2/c^2$ ). Discuta como o resultado do item anterior, combinado com essas análises, reforça a interpretação de que  $\Lambda_B(\mathbf{V}^a)$  mantém os respectivos versores espaciais  $\mathbf{e}_j^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_j^a$  “o mais alinhados possível”;
- (e) Apesar da discussão do item anterior, do ponto de vista do observador  $\mathcal{O}$  (associado a  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ ), o alinhamento dos “eixos espaciais” de  $\tilde{\mathcal{O}}$  (associado a  $\{\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a\}$ ) com os seus próprios não é, em geral, perfeito. Faça uso de um caso particular — por exemplo,  $\mathbf{V}^a = V(\mathbf{e}_1^a + \mathbf{e}_2^a)/\sqrt{2}$  — para ilustrar explicitamente esse fato, mostrando, em especial, que, de acordo com  $\mathcal{O}$ , os “eixos espaciais” de  $\tilde{\mathcal{O}}$  nas direções de  $\tilde{\mathbf{e}}_1^a$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_2^a$  nem sequer são ortogonais.

Finalmente, em posse das formas gerais de rotações e *boosts*<sup>12</sup>, podemos construir um elemento arbitrário de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  como:

$$\Lambda(\mathbf{V}^a, \phi, \chi, \theta) := \Lambda_{\mathcal{R}}(\phi, \chi, \theta) \Lambda_B(\mathbf{V}^a). \quad (2.42)$$

Aplicando, a essa forma geral, as matrizes  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{PT} = -\mathbf{1}$  definidas anteriormente, obtemos todos os elementos do grupo de Lorentz  $O(3, 1)$ .

- ⑥ Denominaremos de *tri-vetor* (3-vetor) (e o denotaremos por letras maiúsculas em negrito) qualquer 4-vetor  $\mathbf{V}^a$  que, *por construção*, seja puramente espacial para algum observador (ou seja,  $\mathbf{V}^a \in \mathbb{V}^\perp(\mathbf{e}_0^a)$ , onde  $\mathbf{e}_0^a$  dá a direção da linha-de-mundo do observador em questão) e que tenha significado físico *apenas* para esse observador (por conta da informação do observador entrar na construção de  $\mathbf{V}^a$ ). Um exemplo de 3-vetor é a 3-velocidade que um observador  $\mathcal{O}$  atribui para uma linha-de-mundo qualquer.
- (a) Seguindo a construção que levou à Eq. (2.2), mostre que a 3-velocidade  $\mathbf{U}^a$  que um observador  $\mathcal{O}$ , passando pelo evento  $p$ ,

atribui para outra linha-de-mundo passando por  $p$  na direção do 4-vetor  $u^a$ , é dada por

$$\frac{\mathbf{U}^a}{c} = -\frac{u^a}{(g_{bc} \mathbf{e}_0^b u^c)} - \mathbf{e}_0^a; \quad (2.45)$$

(Note que a informação do observador — via  $\mathbf{e}_0^a$  — aparece explicitamente na construção de  $\mathbf{U}^a \in \mathbb{V}^\perp(\mathbf{e}_0^a)$ , o que a caracteriza como um 3-vetor.)

- (b) Mostre que se  $u^a$  é tipo-luz, então  $\|\mathbf{U}^a\| = c$ , qualquer que seja o observador;
- (c) Se  $u^a$  é tipo-tempo, então podemos, por conveniência (e sem perda de generalidade), escolher  $u^a$  normalizado (o que *não* muda  $\mathbf{U}^a$ ). Nesse caso, mostre que

$$\frac{\mathbf{U}^a}{c} = \gamma_U^{-1} u^a - \mathbf{e}_0^a, \quad (2.46)$$

onde  $\gamma_U$  é o fator de Lorentz com o módulo da velocidade espacial dado por  $\|\mathbf{U}^a\|$ ;

- (d) Seja  $\mathbf{U}^a$  (respectivamente,  $\tilde{\mathbf{U}}^a$ ) a 3-velocidade que o observador inercial  $\mathcal{O}$  (resp.,  $\tilde{\mathcal{O}}$ ) atribui para uma dada partícula (com linha-de-mundo tipo-tempo). Seja  $\mathbf{V}^a$  a 3-velocidade que  $\mathcal{O}$  atribui para  $\tilde{\mathcal{O}}$ . Utilizando a Eq. (2.46), relacione essas 3-velocidades, obtendo:

$$\gamma_{\tilde{U}} = \gamma_V \gamma_U \left( 1 - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right), \quad (2.47)$$

$$(\tilde{\mathbf{U}}^a)_\parallel = \frac{(\mathbf{U}^a - \mathbf{V}^a)_\parallel}{1 - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{c^2}}, \quad (2.48)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^a_\perp = \frac{\mathbf{U}^a_\perp}{\gamma_V \left( 1 - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right)}, \quad (2.49)$$

onde  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} := g_{ab} \mathbf{U}^a \mathbf{V}^b$  (já que ambos 3-vetores pertencem à mesma seção espacial) e  $(\mathbf{W}^a)_\parallel$  (respectivamente,  $\mathbf{W}^a_\perp$ ) representa a projeção do 3-vetor  $\mathbf{W}^a$  na direção do (resp., perpendicular ao) movimento relativo entre  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$ . (Existe uma sutil razão para a ligeira diferença de notação entre  $(\mathbf{W}^a)_\parallel$  e  $\mathbf{W}^a_\perp$ . Tente descobrir qual é essa razão.)

- ⑨ Considere dois observadores inerciais,  $\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}$ , caracterizados, respectivamente, por tetradas  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_\mu^a\}$  que se relacionam por um *boost* com 3-velocidade  $\mathbf{V}^a = A\mathbf{e}_1^a + B\mathbf{e}_2^a$  (em relação a  $\mathcal{O}$ ), onde  $A$  e  $B$  são constantes quaisquer.

(a) Obtenha explicitamente a matriz de *boost*  $\Lambda_B(\mathbf{V}^a)$ .

Escolhendo-se apropriadamente valores de  $V_1$  e  $V_2$ , pode-se obter uma outra tetrada  $\{\mathbf{e}'_\mu^a\}$ , a partir de  $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ , pela combinação de *boosts* em direções particulares,  $\Lambda_{B_2}(V_2)\Lambda_{B_1}(V_1)$  [vide Eqs. (2.39) e (2.40)], de modo que  $\mathbf{e}'_0^a = \tilde{\mathbf{e}}_0^a$  — ou seja, o observador  $\mathcal{O}'$ , associado a  $\{\mathbf{e}'_\mu^a\}$ , está em repouso em relação a  $\tilde{\mathcal{O}}$ .

- (b) Com a ajuda do item (d) do Exercício ⑥, determine os valores de  $V_1$  e  $V_2$  (em função de  $A$  e  $B$ );
- (c) Mostre que  $\{\mathbf{e}'_j\}_{j=1,2}$  e  $\{\tilde{\mathbf{e}}_j^a\}_{j=1,2}$  não estão alinhados e que estão relacionados por uma rotação em torno de  $\mathbf{e}'_3 = \tilde{\mathbf{e}}_3^a$ . Determine o ângulo dessa rotação.