MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Sistemas lineares de controle
Observabilidade[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

[1] K. Ogata [Seção 9.7]. J. Baumeister e A. Leitão [Capítulo 2]. R. Brockett [Seção 14].

Nas próximas aulas **pretendemos** discutir os conceitos de controlabilidade e observabilidade de sistemas de controle lineares da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases} \qquad (*)$$

onde $x(t)$ é o vetor de **estado** $n \times 1$; $u(t)$ vetor de **controle** $r \times 1$; $y(t)$ vetor de **saída** $m \times 1$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

- Na aula **anterior** discutimos controlabilidade de sistemas autônomos.
- Agora trataremos observabilidade assumindo A, B, C e D **constantes**.
- Posteriormente veremos o caso **não** autônomo $(*)$.

Controlabilidade e observabilidade

Controlabilidade

- Dizemos que o sistema $(*)$ é **controlável** em $[t_0, t_1]$, se for possível, por meio de um **vetor** de controle admissível u, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ para qualquer outro estado $x(t_1) \in \mathbb{R}^n$.
- Se o sistema de estado for controlável para **todo** intervalo finito $[t_0, t_1]$, dizemos que o sistema é **completamente** controlável.

Observabilidade

- Dizemos que o sistema $(*)$ é **observável** em $[t_0, t_1]$, se for possível determinar o estado inicial $x(t_0)$ a partir da observação da **saída** $y(t)$ conhecida $\forall t \in [t_0, t_1]$.
- A observabilidade é **completa** se ocorre em todo intervalo de tempo $[t_0, t_1]$.

Tais conceitos foram introduzidos por **Kalman** e tem um papel importante no projeto de sistemas. De fato, a controlabilidade e observabilidade de um sistema podem ditar a existência de uma solução **completa** para o projeto validando sua execução.

Vamos estudar primeiro a observabilidade de sistemas **autônomos**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \tag{1}$$

assumindo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{m\times r}$ constantes.

- Inicialmente notamos que o **sistema** (1) é observável se e só se

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

é **observável**.

De fato, se $x(t)$ é **solução** de (1), então

$$x(t) = e^{At}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds \qquad \text{e}$$

$$y(t) = Ce^{At}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds + D\,u$$

daí

$$y(t) - C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds - D\,u = Ce^{At}x(t_0).$$

As **matrizes** A, B, C e D, bem como o controle u são conhecidos, logo, os sitemas são equivalentes com respeito a propriedade de **observabilidade** já que uma saída pode ser levada a outra por operações de adição e subtração de quantidades **conhecidas**.

Teorema

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \qquad (*)$$

com estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e **saída** $y(t) \in \mathbb{R}^m$ $(m \leq n)$ onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ são matrizes constantes. Então $(*)$ é **observável**, se e só se, o **posto** da matriz $mn \times n$

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

é n. Assim, o sistema $(*)$ é controlável se e só se é **completamente** observável.

- Lembramos que *posto* de uma matriz corresponde ao **número** de linhas ou colunas **linearmente** independentes dela.
- Como a **condição** de observabilidade não depende de $[t_0, t_1]$ temos que os conceitos de observabilidade e observabilidade completa são **equivalentes**.
- Deste resultado **caracterizamos** a observabilidade de (1).

1. Segunda lei de Newton

Seja $x(t)$ a **posição** de um corpo num instante t sujeito a um **força** f. Se o corpo possui massa m, então temos

$$m\ddot{x}(t) = f(t)$$

- x é a **saída** do sistema e f pode ser visto como **controle**. Se $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ obtemos o seguinte sistema de controle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

- É este sistema completamente **observável**?

Pelo **teorema** o sistema será completamente observável se e só se o **posto** da matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

é 2. **Como**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que é uma **matriz** de posto 2 implicando que o sistema é **observável**.

2. Um sistema não observável

Veremos que o **sistema** abaixo não é completamente observável. Seja

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \; .$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Nesse caso temos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

daí

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ -0.4 & -0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que é uma matriz **singular** e portanto não possui posto igual a 2. Logo, concluímos que o sistema não é observável.

Provaremos inicialmente a **ida**. Assumimos que $(*)$ é observável e supomos por **absurdo** que o posto da matriz $P \in \mathbb{R}^{mn\times n}$ é estritamente menor que n. S.p.g. podemos supor $t_0 = 0$ durante a prova já que o sistema é **autônomo**. Como

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Imagem}(P) + \dim\ \mathrm{Núcleo}(P)$$

segue que $\dim\ \mathrm{Núcleo}(P) \geq 1$ e daí **existe** $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ não nulo tal que

$$Px_0 = 0 \in \mathbb{R}^{mn\times 1}$$

ie. tal que

$$0 = Px_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} C\,x_0 \\ CA\,x_0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}\,x_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C\,A^k\,x_0 = 0$$

para **todo** $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Agora, sabemos que pelo Teorema de **Cayley-Hamilton** existem $\alpha_k(t)$ tais que

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k.$$

Logo, temos que

$$Ce^{At}x_0 = C\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k\right) x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \left(CA^k x_0\right) = 0.$$

Desta maneira, **existe** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ não nulo tal que

$$y(t) = C\,x(t) = Ce^{At}x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0$$

implicando que o sistema **não** é observável, de onde obtemos uma contradição.

Suponha agora que o **posto** de P é n. Inicialmente observamos que a matriz

$$W(t) = \int_0^t e^{A's} C' C e^{As} \, ds \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

é **invertível** para todo $t > 0$. De fato, se $x \in \text{Núcleo}(W)$ temos que

$$0 = x' W(t) x \quad = \quad \int_0^t x' e^{A's} C' C e^{As} x \, ds = \int_0^t \|C e^{As} x\|^2 \, ds$$

para todo $t > 0$. Daí, pela **continuidade** da exponencial de matriz temos

$$\|C e^{As} x\| = 0 \quad \forall s \in [0, t] \quad \Rightarrow \quad C e^{As} x = 0 \quad \forall s \in [0, t].$$

Logo

$$0 = C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} s^k \right) x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C A^k x}{k!} s^k \quad \forall s \in [0, t].$$

Assim, $Cx = CAx = \ldots = CA^{n-1} x = 0 \ \Rightarrow \ x \in \text{Núcleo}(P)$. Como o posto de P é n, o $\text{Núcleo}(P) = \{0\}$. **Então** $x = 0$ e $W(t)$ é invertível para todo $t > 0$.

Agora vamos determinar o valor inicial $x(0)$ para a **saída** dada

$$y(t) = Ce^{At}x(0).$$

Veja que

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \quad \Rightarrow \quad e^{A't}C'y(t) = e^{A't}C'Ce^{At}x(0)$$
$$\Rightarrow \quad \int_0^t e^{A's}C'y(s)\,ds = \int_0^t e^{A's}C'Ce^{As}x(0)\,ds.$$

Assim **temos**

$$Q(t) = W(t)x(0)$$

com $Q(t) = \int_0^t e^{A's}C'y(s)\,ds$ conhecido e $W(t)$ dado e invertível. **Portanto**,

$$x(0) = W^{-1}(t)Q(t)$$

implicando que o sistema é **observável**[2]. $\square$

[2]Note que há uma fórmula para o cálculo de $x(0)$.

1. Oscilador harmônico

Considere o **sistema mecânico** indicado ao lado. A equação do sistema é $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$ onde m é a **massa** do corpo, b o **amortecimento** e k a **constante elástica**. y é a saída e u a entrada (controle).

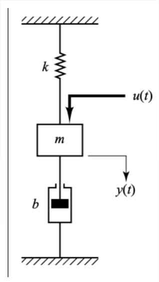
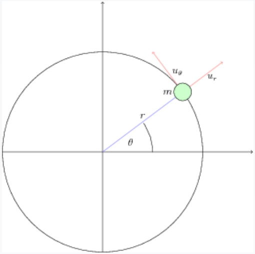


Figura: Massa mola amortecido.

Verifique se este sistema é **observável**.

2. Um satélite simples

Retornamos aqui ao sistema linearizado associado ao modelo de uma **partícula** de massa unitária sob ação de um campo de aceleração **central** newtoniano.



Sabe-se que sua equação **linearizada** sobre órbitas circulares é dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Verifique se este **sistema** é observável ou não.