

Regras de Feynman no espaço dos momentos

Como os estados $|i\rangle$ e $|f\rangle$ são de partículas sem "lives" podemos tomá-los como autoestados de momento.

Isso no verdade corresponde a fazer a expansão de Fourier dos campos.

Nós já vimos a transf. de Fourier dos propagadores.

Temos:

$$\underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} = i S_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p i S_F(p) e^{i p(x_1 - x_2)} \quad (6.38)$$

$$\underbrace{A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)} = i D_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k D_F^{\mu\nu}(k) e^{-i k(x_1 - x_2)}$$

onde

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (6.39)$$

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

As expansões de ψ , $\bar{\psi}$ e A são:

$$\psi(x) = \sum_{r, \vec{p}} \left(\frac{mc^2}{V E_p} \right)^{1/2} \left[c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-i p x / \hbar} + d_r^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{i p x / \hbar} \right]$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r, \vec{p}} \left(\frac{mc^2}{V E_p} \right)^{1/2} \left[d_r(\vec{p}) \bar{v}_r(\vec{p}) e^{-i p x / \hbar} + c_r^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) e^{i p x / \hbar} \right] \quad (6.40)$$

$$A^\mu(x) = \sum_{r, \vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V \omega_k} \right)^{1/2} \epsilon_r^\mu(\vec{k}) \left[a_r(\vec{k}) e^{-i k x} + a_r^\dagger(\vec{k}) e^{i k x} \right]$$

O efeito dos operadores ψ^+ , $\bar{\psi}^+$ e A^+ atuando em estados $|i\rangle$ e $|0\rangle$ de modo a produzir o vácuo $|0\rangle$. Por exemplo: ($c = \hbar = 1$)

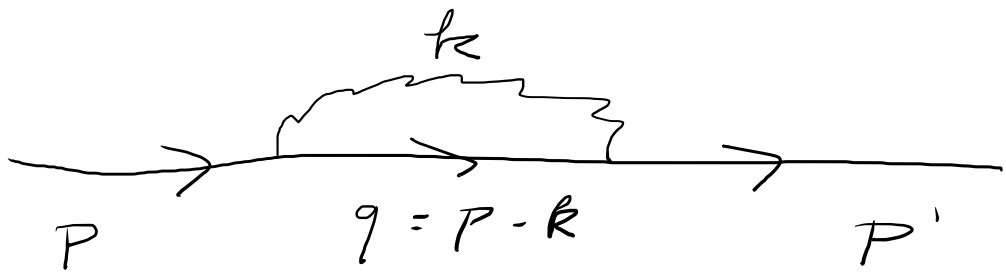
$$\begin{aligned} \psi^+(x) |e^{-\vec{p}}\rangle &= \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} u(\vec{p}) |0\rangle \\ \bar{\psi}^+(x) |e^+\vec{p}\rangle &= \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \bar{v}(\vec{p}) |0\rangle \\ A_r^+(x) |\gamma, \vec{k}\rangle &= \left(\frac{1}{2V\omega_k}\right)^{1/2} \epsilon_{r\mu}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} |0\rangle \end{aligned} \tag{6.41}$$

onde não foi colocada a índice de polarização e onde

$$\begin{aligned} |e^{-\vec{p}}\rangle &\equiv |e^{-\vec{p}} r\rangle = c_r^+(\vec{p}) |0\rangle \\ |e^+\vec{p}\rangle &\equiv |e^+\vec{p} r\rangle = d_r^+(\vec{p}) |0\rangle \\ |\gamma, \vec{k}\rangle &\equiv |\gamma, \vec{k} r\rangle = a_r^+(\vec{k}) |0\rangle \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} |e^{-\vec{p}}\rangle \\ |e^+\vec{p}\rangle \\ |\gamma, \vec{k}\rangle \end{aligned}} \right\} r=1,2 \tag{6.42}$$

A fim de mais termos:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^-(x) |0\rangle &= \sum_{\vec{p}, r} \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} \bar{u}_r(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} |e^-, p, r\rangle \\ \psi^-(x) |0\rangle &= \sum_{p, r} \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} v_r(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} |e^+, \vec{p}, r\rangle \\ A_r^-(x) |0\rangle &= \sum_{k, r} \left(\frac{1}{2V\omega_k}\right)^{1/2} \epsilon_{r\mu}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} |\gamma, \vec{k}, r\rangle \end{aligned} \tag{6.43}$$



$$P = q + k = P'$$

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = -e^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \langle 0 | \underline{C(P')} \underline{\bar{\psi}(x_1)} \gamma^\mu \underline{S_F^{-1}(x_1 - x_2)} \gamma^\nu \psi^\dagger(x_2) | 0 \rangle$$

$$i D_{F, \mu\nu}(x_1 - x_2)$$

$$= -e^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\left(\frac{m}{v_{F, P'}} \right)^{\frac{1}{2}} \underline{\bar{u}(P')} e^{i P' x_1} \right] \gamma^\mu \underline{S_F(q)} \gamma^\nu \psi^\dagger(x_2)$$

$$\left[\left(\frac{m}{v_{F, P}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i P x_2} \underline{u(P)} \right] i \underline{D_{F, \mu\nu}(k)} e^{-i k(x_1 - x_2)} e^{i q(x_1 - x_2)}$$

$$= -e^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P' - q - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - q - k) \overbrace{\left[\left(\frac{m}{v_{F, P'}} \right)^{\frac{1}{2}} \underline{\bar{u}(P')} \gamma^\mu \underline{S_F(q)} \gamma^\nu \underline{u(P)} \right]}_{\left(\frac{m}{v_{F, P'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{v_{F, P}} \right)^{\frac{1}{2}} \underline{D_{F, \mu\nu}(k)}}$$

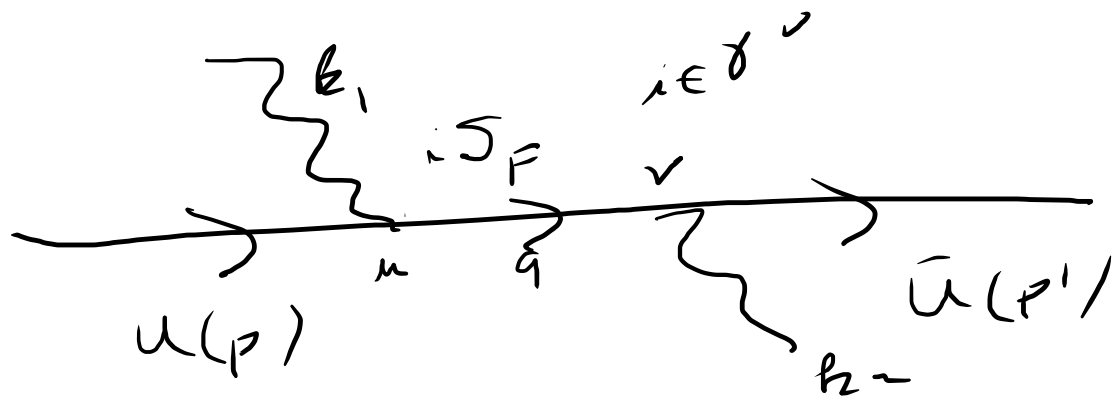
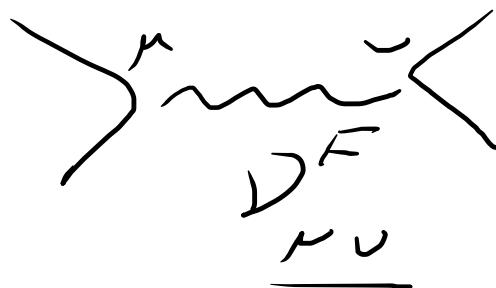
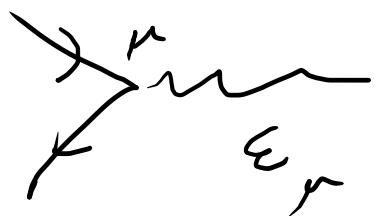
$$\langle f | S^{(2)}_{e^- \rightarrow e^-} | i \rangle = \underline{(2\pi)^4 \delta(p' - p)} \left(\frac{m}{v E_p} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{v E_{p'}} \right)^{1/2} M$$

$$M = - \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \cdot D_{F_{\mu\nu}}(k) \bar{u}(p') \gamma^\mu \cdot S_F(p - k) \gamma^\nu u(p)$$

$$i e \bar{\psi} \not{A} \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

$$(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-) (A^+ + A^-) (\psi^+ + \psi^-)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$



$$\sum_s^\nu \epsilon_\mu(k_2) \epsilon_\nu(k_1) \bar{u}(p') i e \gamma^\nu i S_F i e \gamma^\mu u(p)$$

Novamente temos a mesma estrutura que nos demais gráficos. Seguimos a flecha da linha do férmion e escrevemos os fatores de direita para a esquerda.

$u(p)$ para o elétron inicial
 $\bar{u}(p)$ " " " " final

Regras de Feynman para QED

Nós vimos que existe uma estrutura nas amplitudes $\langle f|S|i\rangle$ que permite associar a cada expressão matemática um gráfico de Feynman.

Isto permite construir uma série de regras para relacionar amplitudes e gráficos. Vamos ver como fazer isto ~~agora~~ ^{agora}.

A expressão para a matriz S para a transição $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ pode ser escrita como:

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \prod_{\text{ext.}} \left(\frac{m}{VE} \right)^{1/2} \prod_{\text{ext.}} \left(\frac{1}{2V\omega} \right)^{1/2} \right] M \quad (6.62)$$

onde P_i e P_f são a soma dos momentos iniciais e finais respectivamente, as produções são sobre os férmions e fótons externos, e M é a amplitude de Feynman

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M^{(n)} \quad (6.63)$$

Onde $M^{(n)}$ vem da contribuição em ordem n na expansão

perturbativa.

$M^{(n)}$ é obtido colocando-se em todos os gráficos topologicamente diferentes, conexos, com n vértices e com ~~linhas~~ ^{linhas} externas compatíveis com os estados $|i\rangle$ e $|f\rangle$.

A contribuição de cada gráfico é obtida através das seguintes regras:

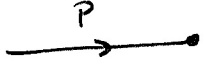
- 1) Para cada vértice escreva um fator $i e \gamma^\mu$
- 2) Para cada linha interna de fóton, com momento k , escreva um fator


$$i D_{F\mu\nu}(k) = i \frac{-\delta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \overset{\mu}{\text{---}} \overset{k}{\text{---}} \overset{\nu}{\text{---}} \quad (6.64)$$

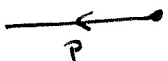
- 3) Para cada linha interna de férmion, com momento p , escreva o fator:

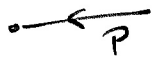
$$i S_F(p) = i \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad \overset{p}{\text{---}} \quad (6.65)$$


- 4) Para cada linha externa escreva um dos seguintes fatores:


a) p/ cada elétron inicial: $u_r(\vec{p})$  (6.66 a)

b) " " " final: $\bar{u}_r(\vec{p})$  (6.66 b)

c) " " positron inicial: $\bar{v}_r(\vec{p})$  (6.66 c)

d) " " " final: $v_r(\vec{p})$  (6.66 d)

e) " " fóton inicial: $\epsilon_{r\mu}(\vec{k})$  (6.66 e)

f) " " " final: $\epsilon_{r\mu}(\vec{k})$  (6.66 f)

- 5) Os fatores spinoriais (γ , S_F , spinores) para cada ~~férmion~~ linha de férmion são ordenados de tal forma que, lendo da direita para a esquerda eles ocorrem na mesma sequência que obtemos seguindo as setas na linha de férmion.
- 6) Para cada loop de férmion tome o traço e multiplique por um fator (-1) .
- 7) Os quadri-momentos associados às três linhas de um vértice satisfaz a conservação da E-M.
 Para cada quadri-momento q que não é fixado pela conservação da E-M, faça a integração $\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q$.
 Uma integral desta ocorre para cada loop do diagrama.
- 8) Multiplique a expressão por uma fase i^p que $n+1(-1)$ é um número par (ímpar) de trocas de férmions vizinhos n . necessária para escrever os operadores dos férmions na ordem normal correta.

Esta fase, em geral, só é significativa quando contribuições de vários diagramas de Feynman são adicionados, e somente os sinais relativos importam.

A situação mais frequente ocorre quando ~~selecione~~

$$(2\pi)^4 \delta(\dots)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \quad P \rightarrow P$$

$$\int d^4x \rightarrow (2\pi)^4$$

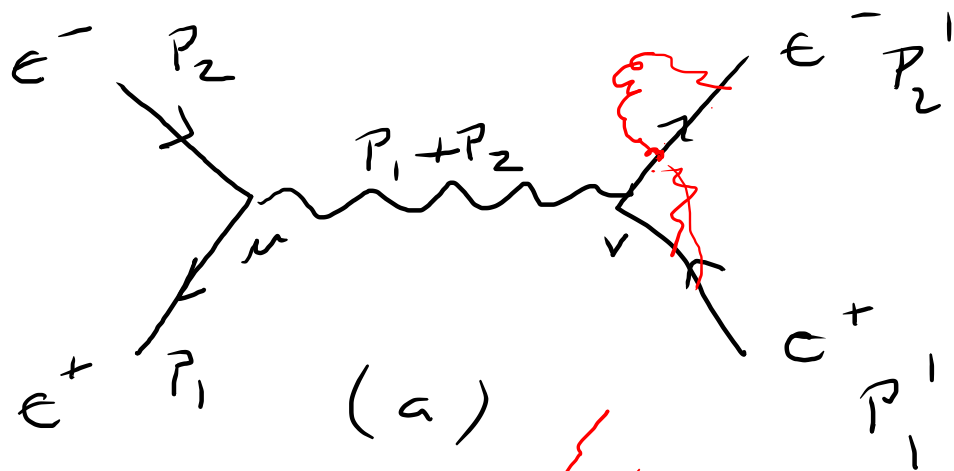
$$N - F_{\text{in}} - B_{\text{in}} - 1 = -L$$

N vertices

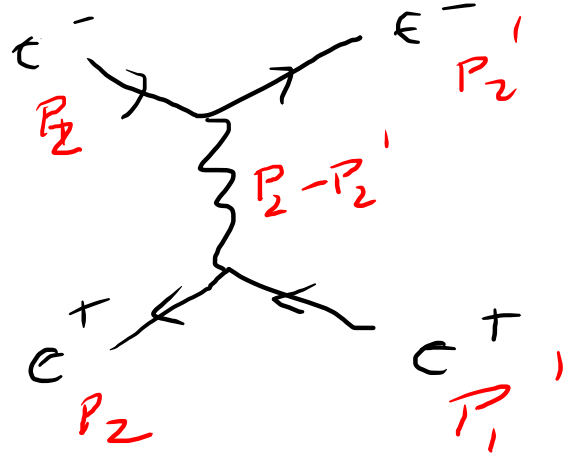
F_{in} - lines into ferm.

B_{in} " " bos.

$$\frac{(2\pi)^4)^{N - F_{\text{in}} - B_{\text{in}} - 1}}{(2\pi)^4)^{-L}}$$



$$P_1 + P_2 = P_1' + P_2'$$



$$M^{(2)}(\underline{e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-}) = i D_{\mu\nu}^F(p_1 + p_2) \left[\bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \right] \left[\bar{u}(p_2') \gamma^\nu u(p_1') \right] \\ \left(\bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p_1') \right) \left(\bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(p_2') \right)$$

$$\langle f | S | i \rangle = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \left(\frac{m}{\sqrt{E_{p_1}}} \right) \left(\frac{m}{\sqrt{E_{p_2}}} \right) \\ \left(\frac{m}{\sqrt{E_{p_1'}}} \right) \left(\frac{m}{\sqrt{E_{p_2'}}} \right) \left(M_a^{(2)} + M_b^{(2)} \right)$$

Demais leptons

E-M, F_{tra}, F₅Te, G_{tra}

hadrons E-M, F_{tra} F₅Te P = $\frac{37 \text{ MeV}}{\text{gluons}}$

→ leptons E-M, F_{tra} e⁻

$N(\bar{e}) - N(e^+) \stackrel{N_e}{=} e^-$ ν_e e^+ $\bar{\nu}_e$ 0,5 meV

$N(\bar{\mu}) - N(\mu^+) \left[\begin{array}{l} \mu^- \\ \nu_\mu \end{array} \right.$ μ^+ $\bar{\nu}_\mu$ 105.7 meV

$N(\bar{\tau}) - N(\tau^+) \left[\begin{array}{l} \tau^- \\ \nu_\tau \end{array} \right.$ τ^+ $\bar{\nu}_\tau$ ~ 1784 MeV
↑ ↑

$$\mathcal{L}_0 = \sum_x \bar{\Psi}_\ell(x) (\gamma^\mu \partial_\mu - m_\ell) \Psi_\ell(x)$$

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = -e \sum_\ell : \bar{\Psi}_\ell(x) A(x) \Psi_\ell(x) ;$$

$$e^- + \mu^+ \rightarrow \mu^- + e^+ \quad \times$$

$$N_e = 1 \longrightarrow N_e = -1$$

$$N_\mu = -1 \longrightarrow N_\mu = +1$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i e)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \sum_{l_1} \dots \sum_{l_n} T(\underbrace{\bar{\psi}_{l_1} \psi_{l_1}}_{\dots} \dots \bar{\psi}_{l_n} \psi_{l_n})$$

$$S_{\mu e}^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 T(\underbrace{\bar{\psi}_{\mu} \psi_{\mu}}_{x_1} \bar{\psi}_{e} \psi_{e} \underbrace{\psi_{e} \bar{\psi}_{e}}_{x_2})$$

$$\underbrace{\psi_{\mu} \bar{\psi}_{e}} = \langle 0 | \underline{T(\psi_{\mu} \bar{\psi}_{e})} | 0 \rangle$$

$$S_{\mu e}^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{(\bar{\psi}_{\mu} \psi_{\mu})_{x_1} (\bar{\psi}_{e} \psi_{e})_{x_2}}_{\text{X}}$$

$$e^{-} + \mu^{-} \rightarrow e^{-} + \mu^{-}$$

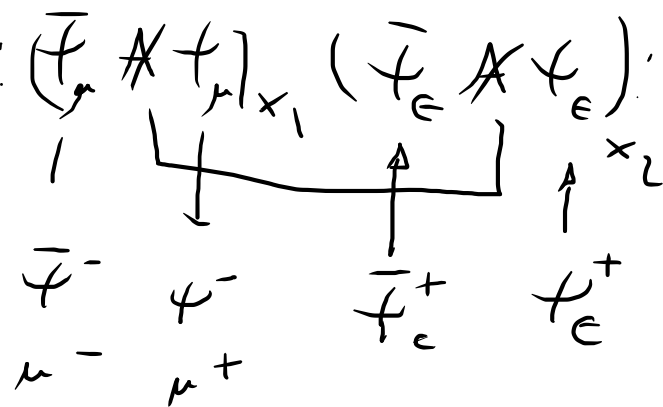
$$e^{+} + \bar{e} \rightarrow \mu^{+} + \bar{\mu}$$

$$-e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{(\bar{\psi}_{\mu} \psi_{\mu})_{x_1} (\bar{\psi}_{e} \psi_{e})_{x_2}}_{(m^4)}$$

$$S_{\mu e}^{(2)} (\epsilon^+ + \epsilon^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi}_\mu A \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e A \psi_e)_{x_2} :$$

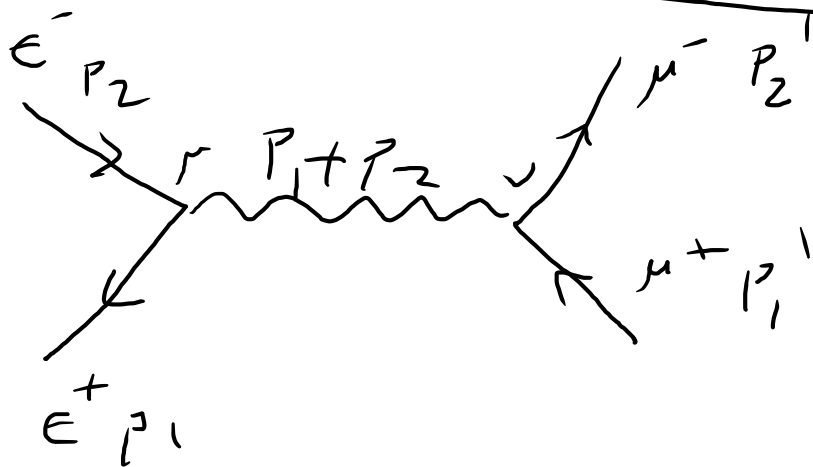
$$|i\rangle = |\epsilon^-_{P_2}, \epsilon^+_{P_1}\rangle$$

$$|f\rangle = |\mu^-_{P_2'}, \mu^+_{P_1'}\rangle$$



$$\langle f | S_{\mu e}^{(2)} | i \rangle = (2\pi)^4 \delta(P_1 + P_2 - P_1' - P_2') \left(\frac{m_e}{\sqrt{E_{P_1}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{\sqrt{E_{P_2}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_\mu}{\sqrt{E_{P_1'}}} \right)^{1/2} \left(\frac{m_\mu}{\sqrt{E_{P_2'}}} \right)^{1/2} M_{\mu e}^{(2)}$$

$$M_{\mu e}^{(2)} = \bar{u}_e(P_1) i e \gamma^\mu u_e(P_2) \left[\bar{u}_\mu(P_2') i e \gamma^\nu u_\mu(P_1') \right] D_{\mu\nu}^F(P_1, P_2')$$



$$|\langle f | S | i \rangle|^2$$

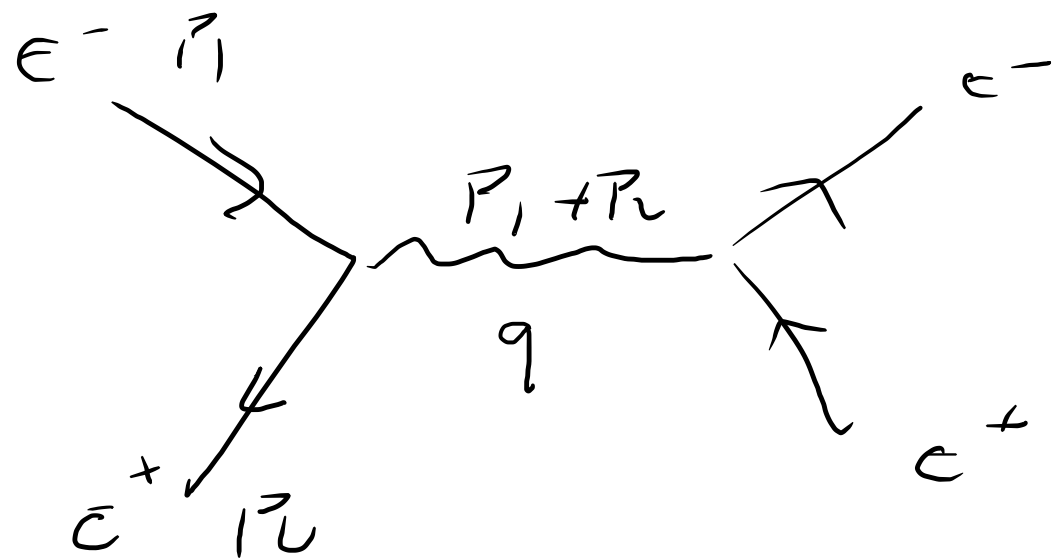
$$\mu^- \rightarrow \underbrace{e^- + \bar{\nu}_e}_{} + \nu_\mu$$

$$N_{\mu} = +1$$

$$N_e = 0$$

$$N_{\nu} = +1$$

$$\mu^- \rightarrow \underline{e^-} + \dots$$



$$q \rightarrow 0$$

$$\int \langle s \rangle \sim \frac{1}{t}$$