MAE0224- Probabilidade II

Vanderlei da Costa Bueno

Critério de Liapunov Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $E[X_n] = \mu_n$ e $Var(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$ com pelo menos um $\sigma_n^2 > 0$. Seja $s_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2$. Se existir $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|]^{2+\delta} \rightarrow^{n\rightarrow\infty} 0,$$

então $\frac{S_n - E[S_n]}{s_n} \rightarrow^D N(0,1)$.

Lema

Para $\lambda > 0$ $\frac{1}{n^{\lambda+1}} \Sigma_{k=1}^{n} k^{\lambda} \rightarrow \frac{1}{\lambda+1}$ quando $n \rightarrow \infty$.

1. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $P(X_n = n^{\alpha}) = P(X_n = -n^{\alpha}) = \frac{1}{2}$. Mostre que satisfaz a condição de Liapunov .

Solução

Observe que $E[X_k] = 0$ e que $Var(X_k) = k^{2\alpha}$.

Também temos $E[|X_k|^3] = k^{3\alpha}$ e

$$\Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k|^3] = \Sigma_{k=1}^{n} k^{3\alpha}$$

com

$$\frac{\Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k|^3]}{n^{3\alpha+1}} \rightarrow \frac{1}{3\alpha+1}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado $s_n^2 = \Sigma_{k=1}^{n} k^{2\alpha}$,

$$\frac{s_n^2}{n^{2\alpha+1}} \rightarrow \frac{1}{2\alpha+1},$$

$$\frac{s_n}{n^{\frac{2\alpha+1}{2}}} \rightarrow (\frac{1}{2\alpha+1})^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\frac{s_n^3}{n^{\frac{6\alpha+6}{2}}} \rightarrow (\frac{1}{2\alpha+1})^{\frac{3}{2}}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Concluimos

$$\frac{1}{s_n^3} \Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k|]^3 =$$

$$\frac{n^{\frac{6\alpha+6}{2}}}{s_n^3} \frac{\sum_{k=1}^{n} E[|X_k|^3]}{n^{3\alpha+1}} \frac{n^{3\alpha+1}}{n^{\frac{6\alpha+6}{2}}} \rightarrow$$

$$\frac{(2\alpha+1)^{\frac{3}{2}}}{3\alpha+1} \frac{n^{3\alpha+1}}{n^{\frac{6\alpha+6}{2}}} = \frac{(2\alpha+1)^{\frac{3}{2}}}{3\alpha+1} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

2. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes onde X_n tem distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes onde Y_n tem distribuição uniforme no intervalo $(0,2)$. Os Y_n são independentes dos X_n. Prove a condição de Liapunov.

Solução

Conhecemos que $Var(X_k) = \frac{1}{12}$ e que $Var(Y_k) = \frac{1}{3}$.
Note que a variável aleatória $X_k - E[X_k]$ tem distribuição uniforme no intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e portanto $|X_k - E[X_k]|$ tem distribuição uniforme no intervalo $(0, \frac{1}{2})$.
Consequentemente

$$E[|X_k - E[X_k]|^3] = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^3 dx = \frac{1}{32}.$$

Com o mesmo argumento temos que $|Y_k - E[Y_k]|$ tem distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$ e

$$E[|Y_k - E[Y_k]|^3] = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Consideremos a sequência S_{2n}.

$$s_n^2 = Var(S_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k + Y_k) = \sum_{k=1}^{n} [Var(X_k) + Var(Y_k)] = \sum_{k=1}^{n} [\frac{1}{12} + \frac{1}{3}] = n\frac{5}{12}.$$

Note que

$$E[|(X_k + Y_k) - E[(X_k + Y_k)]|^3] = E[|(X_k - E[X_k]) + (Y_k - E[Y_k])|^3] \leq$$

$$\{E[|(X_k - E[X_k])|^3]^{\frac{1}{3}} + E[|(Y_k - E[Y_k])|^3]^{\frac{1}{3}}\}^3 = \{(\frac{1}{32})^{\frac{1}{3}} + (\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}\}^3 = 0,86.$$

$$\frac{1}{s_n^3} \Sigma_{k=1}^n E[|(X_k + Y_k) - E(X_k + Y_k)|^3] \leq \frac{12^{\frac{3}{2}}}{(5n)^{\frac{3}{2}}} 0,86.n \to 0$$

quando $n \to \infty$.
No caso impar S_{2n-1},

$$Var(S_{2n-1} = VarS_{2n} + Var(Y_n) = n\frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5n+4}{12}$$

e temos

$$\frac{1}{s_n^3} \Sigma_{k=1}^n E[|(X_k + Y_k) - E(X_k + Y_k)|^3] \leq \frac{12^{\frac{3}{2}}}{(5n+4)^{\frac{3}{2}}} (0,86n + 1) \to 0.$$

quando $n \to \infty$.