Prova 1 de Mecânica

Escolha APENAS 5 questões

1. Mostre que, se um sistema mecânico com dois pontos materiais é fechado por transformações galileanas, então para quaisquer condições iniciais é possível encontrar um referencial inercial tal que as soluções fiquem para sempre num mesmo plano.

2. Considere um ponto material movendo-se numa reta de acordo com o sistema mecânico $\ddot{x} = -\frac{d}{dx}U(x)$, onde $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é uma função $\mathcal{C}^2$, e satisfaz $\lim_{|x|\to\infty} U(x) = \infty$. Mostre que, para toda condição inicial $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, ou a solução correspondente é periódica, ou tanto o α limite quanto o ω limite da solução são pontos críticos de U.

3. Considere um ponto material se movendo em dois graus de liberdade sob a ação de uma força conservativa com energia potencial $U(x_1, x_2) = (x_1)^2 + e^{(x_2)^2}$. Mostre que, se $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é a solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = (a, b), \dot{x}(0) = (0, 0)$, com a, b estritamente positivos, então

   - Para todo t, $x(t)$ está no retângulo $R_{a,b} = \{(x_1, x_2) \mid -a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b\}$.
   - Existe uma sequência infinita $0 < t_0 < t_1 < t_2 ...$ tal que $x(t_i)$ está no bordo de R para todo i natural. Além disso podemos tomar t_i de forma que $t_{i+1} - t_i$ seja uniformemente limitada.

   Bonus: Mostre que ou a solução $x(t)$ é periódica, ou então ela é densa em R (Esta parte não é necessária para ganhar a nota inteira da questão, mas pode dar pontos extra na prova).

4. Mostre que, se $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ é uma função $\mathcal{C}^1$ e se $F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}^2, F(x) = \Phi(x)\frac{x}{\|x\|}$ é um campo de forças, então F é conservativo se, e somente se, $\phi(x) = \phi(y)$ sempre que $\|x\| = \|y\|$.

5. Prove, com detalhes, que toda transformação galileana de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ em si mesmo pode ser escrita como a composição de uma translação com uma transformação ortogonal com um movimento retilíneo uniforme.

6. Encontre os pontos de equilíbrio do sistema de equações diferencial $\dot{x} = y, \dot{y} = (x-1)(x+1)$ e decida quais são estáveis segundo Liapunov, justificando suas respostas. Esboce o retrato de fase deste sistema no plano (x, y).