MAE0224 - Probabilidade II
Prof. Vanderlei C. Bueno
Resolução da Prova 1

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(2,4)$. Seja $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Prove que

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - 9) \to^D N(0,12).$$

Solução

Se $X \sim U(2,4)$, então $E[X] = 3$, $Var(X) = \frac{1}{3}$. Pelo Teorema do Limite Central temos

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - 3) \to^D N(0, \frac{1}{3}).$$

Como $g(x) = x^2$ é contínua e limitada em $(2,4)$,

$$\sqrt{n}(g(\overline{X}_n - g(3)) \to^D N(0, \frac{1}{3}(g^{'}(3))^2),$$

e concluimos que

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - 9) \to^D N(0,12).$$

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição geométrica com $P(X=k) = p(1-p)^k, \quad k = 0,1,2,...$ e a função $f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$. Encontre o valor de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n})^2 \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k.$$

Solução

Conhecemos que a soma de r distribuições geométricas de parâmetro p tem distribuição binomial negativa de parâmetros r e p. Assim, utilizando o teorema de Helly-Bray, a expresso acima se traduz como

$$\lim_{n\to\infty} E[f(\overline{X}_n] = E[f(Y)]$$

quando $\overline{X}_n$, o que é verdadeiro pois, pela Lei Forte dos Grandes Números $\overline{X}_n \to^P E[X] = \frac{1-p}{p}$. e a convergência em probabilidade implica na convergência em distribuição. No caso, Y é a variável degenerada em $\frac{1-p}{p}$. e $E[f(Y)] = (\frac{1-p}{p})^2$.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 2}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

Solução

a) Qual o limite em probabilidade de

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i(1-X_i)}{\sum_{i=1}^{m} X_i^2}.$$

Como $E[X^2] = 2\int_0^1 x^3 dx = 0,5$ temos que X é integravel a podemos aplicar a Lei Fraca dos Grandes Números, isto é

$$\frac{\sum_{i=1}^m X_i^2}{n} \to^P 0,5.$$

De maneira análoga

$$E\{[X(1-X)]^2\} = E[X^2(1-X)^2] = E[X^2(1-2.X+X^2)] =$$

$$E[X^2 - 2X^3 + X^4] = E[X^2] - 2.E[X^3] + E[X^4] = \frac{1}{30}.$$

Portanto vale a Lei Fraca dos Grandes Números e

$$\frac{\sum_{i=1}^m X_i(1-X_i)}{n} \to^P E[X(1-X)] = 0,17.$$

Pelas propriedades de convergência em probabilidade:

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^m X_i(1-X_i)}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^m X_i^2}{n}} \to^P \frac{0,17}{0,5} = 0,34.$$

b) Padronize a sequência de variáveis aleatórias $(Y_m)_{m\geq 2}$, $Y_m = \sum_{i=1}^m X_i(1-X_i)$ para que a sequência padronizada convirja em distribuição para a distribuição normal padrão.

Observe que

$$Var[X(1-X)] = E\{[X.(1-X)]^2\} - E[X.(1-X)]^2 =$$

$$\frac{1}{30} - \frac{1}{36} = \frac{1}{180}.$$

Como os $X_i(1 - X_i)$ são independentes e identicamente distribuidas, com variância finita e média igual a $\frac{1}{6}$, aplicamos o Teorema do Limite Central e concluimos que

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i(1 - X_i) - \frac{m}{6}}{m.\sqrt{\frac{1}{180}}} \rightarrow^{D} N(0, 1).$$

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes em que X_n tem distribuição uniforme no intervalo $(0, a_n)$ onde $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais. Quais as condições sobre a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ para que $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X-i}{n}$ convirja quase certamente? Qual o limite?

Observação: Utilize o critério da razão para séries numéricas temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, com $b_n \neq 0$, converge absolutamente se

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \mid \frac{b_{n+1}}{b_n} \mid < 1.$$

Solução

Pela Primeira Lei Forte dos Grandes Números $\overline{X}_n$ converge quase certamente se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty$.

Se $X_n \sim U(0, a_n)$ sua variância é $\frac{a_n^2}{12}$.

Portanto,devemos analisar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{12.n^2}$.

Pelo critŕio da razão

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \mid \frac{\frac{a_{n+1}^2}{12.(n+1)^2}}{\frac{a_n^2}{12.n^2}} \mid = (\lim_{n\rightarrow\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid .\mid \frac{n}{n+1} \mid)^2 = (\lim_{n\rightarrow\infty} (\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid)^2$$

que é estritamente menor do que 1 se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid < 1$, isto é, se $(a_n)_{n\geq 1}$ é convergente. Concluimos que $\overline{X}_n$ converge quase certamente se $(a_n)_{n\geq 1}$ converge. Claramente o limite é

$$\lim_{\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_n}{2n} = 0.$$