MAE0224 - Probabilidade II
Prof. Vanderlei C. Bueno
Resolução da Segunda Avaliação

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que X_{2n-1} tem distribuição uniforme no intervalo $(1,2)$ e X_{2n} tem distribuição uniforme no intervalo $(2,3)$.

A) Padronize adequadamente a média amostral de $(X_n)_{n\geq 1}$ para obter o limite em distribuição da variável padronizada. Justifique seu desenvolvimento explicitando os teoremas usados.

Solução

Podemos escrever

$$\overline{X}_{2n} = \frac{\sum_{k=1}^{2n} X_k}{2n} = \frac{1}{2}[\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_{2k-1} + X_{2k})}{n}]$$

e considerar a sequência de v.a(s). $(X_{2n-1}+X_{2n})_{n\geq 1}$, i.i.d., com média $1,5+2,5 = 4$, variância $\frac{2}{12} = 0,17$ e desvio padrão $0,41$.

Portanto pelo teorema do limite central

$$\sqrt{n}(\frac{[\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_{2k-1}+X_{2k})}{n}] - 4}{0,41}) \to^{D} N(0,1).$$

A sequência de constantes $(\frac{1}{2})_{n\geq 1}$ converge em probabilidade para $\frac{1}{2}$.

Pelo Teorema de Slutsky temos que

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}(\frac{\overline{X}_{2n} - 4}{0,41}) \to^{D} N(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

B1) Para as primeiras 300 observações, qual a probabilidade de obter a média amostral maior do que $\frac{4}{3}$

$$P(\overline{X}_{300} > \frac{4}{3}) = P(\sqrt{150}(\frac{\overline{X}_{300} - 4}{0,41}) > \frac{12,25(1,33 - 4)}{0,41}) =$$

$$P(\sqrt{150}(\frac{\overline{X}_{300} - 4}{0,41.0,84}) > \frac{12,25(1,33 - 4)}{0,41.0,84}) = P(Z > -95) = 1.$$

B2) Para as primeiras 300 observações, qual o valor de k para obter uma média amostral superior (inferior) a k com probabilidade de 90%?

$$P(\sqrt{150}(\frac{\overline{X}_{300} - 4}{0,41.0,84}) > \frac{12,25(k - 4)}{0,41.0,84}) = 0,9,$$

se

$$\frac{12,25(k - 4)}{0,41.0,84} = 1,64 \leftrightarrow k = 4,0461 \approx 4,05.$$

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, com distribuição de Cauchy padrão.

A) Utilizando funções caracterí́sticas e justificando os teoremas utilizados apropriadamente, verifique se $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n^2}$ converge em distribuição? Qual o limite?

Solução

$$\varphi_{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n^2}}(t) = E[e^{it\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n^2}}] =$$

$$E[\pi_{i=1}^n e^{i\frac{t}{n^2}X_i}] = \pi_{i=1}^n E[e^{i\frac{t}{n^2}X_i}] = \pi_{i=1}^n E[e^{i\frac{t}{n^2}X_1}] =$$

$$(E[e^{i\frac{t}{n^2}X_1}])^n = (e^{|\frac{t}{n^2}|})^n = e^{|\frac{t}{n}|}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n^2}}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{|\frac{t}{n}|} = 1$$

que é contínua em 0. Pelo Teorema de Paul Levy, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n^2} \to^D$ 0.

B) Utilizando a convergência obtida no ítem A), avalie a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n^2})\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

onde f é uma função real, contínua e limitada. Qual Teorema você utilizou?

Utilizamos o Teorema de Helly-Bray e concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n^2})\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = f(0).$$