Interpolação

Interpolação Polinomial

Nelson Kuhl

IME/USP

3 de novembro de 2020

Introdução

- Diferentemente de mínimos quadrados, o objetivo agora é obter funções que passam exatamente pelos pontos de uma tabela;

Introdução

- Diferentemente de mínimos quadrados, o objetivo agora é obter funções que passam exatamente pelos pontos de uma tabela;
- pode-se então obter expressões para derivação e integração numérica a partir de valores de uma função especificados em um conjunto discreto de pontos;

Introdução

- Diferentemente de mínimos quadrados, o objetivo agora é obter funções que passam exatamente pelos pontos de uma tabela;
- pode-se então obter expressões para derivação e integração numérica a partir de valores de uma função especificados em um conjunto discreto de pontos;
- técnicas de interpolação são usadas também em resolução numérica de equações diferenciais e em computação gráfica;

Introdução

- Diferentemente de mínimos quadrados, o objetivo agora é obter funções que passam exatamente pelos pontos de uma tabela;
- pode-se então obter expressões para derivação e integração numérica a partir de valores de uma função especificados em um conjunto discreto de pontos;
- técnicas de interpolação são usadas também em resolução numérica de equações diferenciais e em computação gráfica;
- entre as classes de funções usadas para interpolação, os polinômios são muito usados devido às suas propriedades analíticas.

Interpolação polinomial

Dada uma tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \qquad (1)$$

onde $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$, o objetivo é obter um polinômio $p(x)$ tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Formulado dessa maneira, o problema é muito geral pois, se $p(x)$ é solução, então

$$q(x) = p(x) + r(x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

onde $r(x)$ é um polinômio arbitrário, também é solução, uma vez que $\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ se anula em todos os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Interpolação polinomial

Para o problema ficar bem definido, precisamos impor restrições. Elas são sugeridas dos fatos bem conhecidos de que por dois pontos passa uma única reta, por três pontos passa uma única parábola (ou uma reta, se forem colineares), etc... . Temos o seguinte resultado.

Teorema 1

Dada uma tabela da forma (1) com $n+1$ abscissas x_i e $n+1$ ordenadas y_i, $0 \leq i \leq n$, onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, existe um **único** polinômio p_n de grau **menor ou igual** a n tal que

$$p_n(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Este polinômio é chamado de polinômio interpolador da tabela (1).

Interpolação polinomial

Demonstração

Dado que um polinômio p_n de grau menor ou igual a n pode ser representado unicamente na forma $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, usando (2) obtemos o seguinte sistema linear

$$\sum_{j=0}^{n} (x_i)^j a_j = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

para os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Matricialmente temos

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Interpolação polinomial

O sistema linear (3) terá uma única solução se e somente se a sua matriz tiver determinante diferente de zero. E isto é equivalente a termos somente a solução nula para o sistema homogênio. Ora, resolver o sistema homogênio, isto é, resolver (3) com $y_i = 0$, $0 \leq i \leq n$, equivale a obter os coeficientes de um polinômio de grau menor ou igual a n que se anula nos $n + 1$ pontos distintos x_i, $0 \leq i \leq n$. Ou seja, este polinômio de grau menor ou igual a n teria pelo menos $n + 1$ raízes dsitintas, e portanto só pode ser o polinômio nulo. Logo o sistema homogênio admite somente a solução nula e o sistema linear (3) tem uma única solução.

$\square$

Exemplo

Construa o polinômio interpolador da tabela

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

e use-o para aproximar $\sqrt{2}$ (isto é, *interpole* o ponto $\bar{x} = 0.5$). Temos 4 pontos e portanto o polinômio interpolador terá grau no màximo $n = 3$. Com a nossa notação, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = 1/2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$. O sistema linear para os coeficientes a_j, $j = 0, 1, 2, 3$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

cuja solução é $a_0 = 1$, $a_1 = 2/3$, $a_2 = 1/4$ e $a_3 = 1/12$.

Exemplo

O polinômio interpolador é então dado por

$$p_3(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3$$

e a aproximação para $\sqrt{2}$ fica

$$p_3(0.5) = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} = \frac{45}{32} = 1.40625.$$

Para comparação, observe que $\sqrt{2} \approx 1.41421$.

Estimativa de erro

Quando os valores y_i da tabela (1) estão associados a uma função f, ou seja, $y_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, é importante obter estimativas para o erro

$$E(x) = f(x) - p_n(x) \tag{4}$$

em pontos $x \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$. Estas estimativas são importantes para derivação e integração numéricas e outras aplicações baseadas em interpolação. Como por contrução $E(x_i) = 0$, $0 \leq i \leq n$, é razoável esperarmos uma expressão da forma

$$E(x) = g(x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Estimativa de erro

De fato, se f for derivável e se definirmos

$$W(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \tag{5}$$

então podemos concluir da regra de L'Hospital que a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{E(x)}{W(x)} & \text{se } x \neq x_i,\ 0 \leq i \leq n \\ \frac{E'(x_i)}{W'(x_i)} & \text{se } x = x_i, 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

está bem definida e é contínua pois $W'(x_i) \neq 0$, $0 \leq i \leq n$. Logo, para f derivável, podemos afirmar que existe uma função g tal que

$$E(x) = g(x)W(x). \tag{6}$$

Nosso objetivo é estimar g. Para isso, assumiremos que f tem tantas derivadas quanto forem necessárias.

Estimativa de erro

Seja $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, e defina

$$F(x) = E(x) - g(\bar{x})W(x).$$

Como $E(x_i) = W(x_i) = 0$, concluimos que $F(x_i) = 0$, $0 \leq i \leq n$. De (6) segue que $F(\bar{x}) = 0$, e portanto F se anula em pelo menos $n+2$ pontos distintos. Do teorema do valor médio, segue que F' se anula em pelo menos $n+1$ pontos distintos, contidos no intervalo J gerado pelos pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$. Continuando com este argumento, podemos afirmar que existe um ponto $\bar{t} \in J$ tal que

$$F^{(n+1)}(\bar{t}) = 0. \tag{7}$$

Da definição de F temos $F^{(n+1)}(\bar{t}) = E^{(n+1)}(\bar{t}) - g(\bar{x})W^{(n+1)}(\bar{t})$. De (4) obtemos $E^{(n+1)}(\bar{t}) = f^{(n+1)}(\bar{t})$ pois $p_n^{(n+1)}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Além diso, como $W^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos de (7) que

$$f^{(n+1)}(\bar{t}) - g(\bar{x})(n+1)! = 0,$$

Estimativa de erro

de onde concluimos que $g(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\bar{t})/(n+1)!$ e portanto

$$E(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{t})}{(n+1)!} W(\bar{x}).$$

Podemos enunciar então o seguinte resultado.

Teorema 2

Suponha que f tem pelo menos $n+1$ derivadas contínuas em um intervalo $[a, b]$ contendo os pontos distintos x_i, $0 \leq i \leq n$. Seja p_n o polinômio interpolador da tabela gerada pelos valores de f nos pontos x_i. Então, dado $x \in [a, b]$, existe $t_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{8}$$

Estimativa de erro

- Note que o lado direito de (8) se anula quando $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$, como esperado;

Estimativa de erro

- Note que o lado direito de (8) se anula quando $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$, como esperado;
- se f for um polinômio de grau menor ou igual a n, a sua derivada de ordem $n+1$ é nula e portanto o erro em qualquer ponto é nulo, o que é coerente com a unicidade do polinômio interpolador;

Estimativa de erro

- Note que o lado direito de (8) se anula quando $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$, como esperado;
- se f for um polinômio de grau menor ou igual a n, a sua derivada de ordem $n+1$ é nula e portanto o erro em qualquer ponto é nulo, o que é coerente com a unicidade do polinômio interpolador;
- o ponto t_x, que depende de x, é desconhecido e não pode ser obtido de forma construtiva;

Estimativa de erro

- Note que o lado direito de (8) se anula quando $x = x_i$, $0 \leq i \leq n$, como esperado;
- se f for um polinômio de grau menor ou igual a n, a sua derivada de ordem $n+1$ é nula e portanto o erro em qualquer ponto é nulo, o que é coerente com a unicidade do polinômio interpolador;
- o ponto t_x, que depende de x, é desconhecido e não pode ser obtido de forma construtiva;
- não podemos concluir de (8) que o erro entre a função e o polinômio interpolador tende a zero ao aumentarmos a quantidade de pontos para a interpolação.

Estimativa de erro

Usando o fato de que $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a, b]$, e portanto limitada neste intervalo, podemos obter uma estimativa de erro mais prática.

Corolário

Sob as hipóteses do Teorema 2, seja

$$M_{n+1} = \max_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Então, para $x \in [a, b]$, temos

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|. \tag{9}$$

Exemplo

Continuando com o exemplo visto anteriormente, vamos estimar o erro entre $p_3(0.5)$ e $\sqrt{2}$ usando a fórmula (9), e compará-lo com o erro exato. No nosso caso, $n = 3$ e o intervalo é $[-1, 2]$. Precisamos estimar o módulo da derivada quarta de $f(x) = 2^x$ neste intervalo. Do cálculo, sabemos que $f^{(4)}(x) = (\log 2)^4 2^x$, onde log é o logarítmo natural, e portanto

$$M_4 = \max_{x \in [-1,2]} |(\log 2)^4 2^x| = (log 2)^4 2^2 \lesssim 0.92335$$

e portanto

$$|f(0.5) - p3(0.5)| \leq \frac{0.92335}{4!} |(0.5 + 1)0.5(0.5 - 1)(0.5 - 2)| \approx 0.022,$$

enquanto que o erro exato é da ordem de 0.008, aproximadamente três vezes menor. Como esperado, a estimativa de erro é pessimista, mas muito útil como veremos adiante.