Na aula passada começamos o item

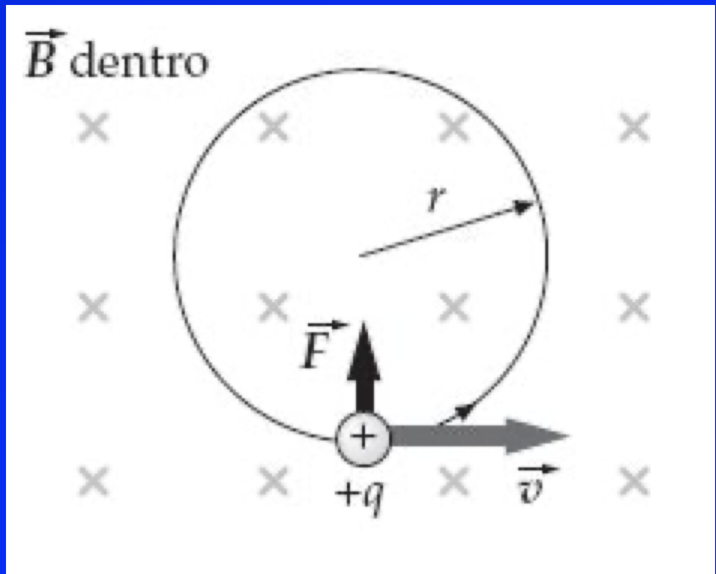
26-2 Movimento de uma carga puntiforme em um campo magnético

Como vimos

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

No caso particular onde a velocidade de uma partícula carregada é perpendicular a um campo magnético uniforme, como mostra a figura, a partícula se move em uma órbita circular.

A força magnética fornece a força centrípeta necessária para o movimento circular.

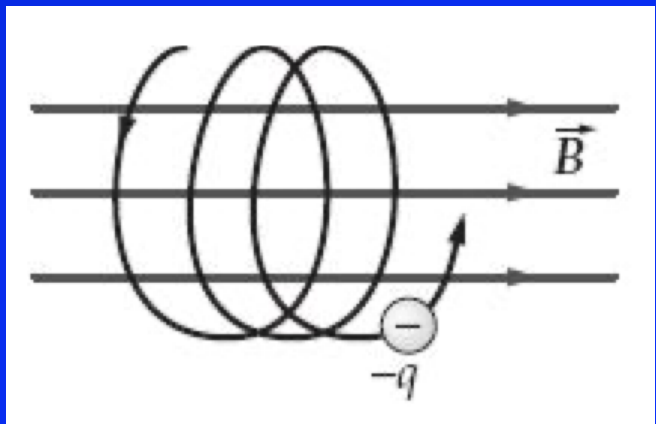


Considere uma partícula carregada que esteja em uma região que tem um campo magnético uniforme $\vec{B}$ e sua velocidade $\vec{v}$ **não é perpendicular a $\vec{B}$**.

Como $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$,

a componente $\vec{v}$ na direção de $\vec{B}$ não será alterada, permanecendo constante e a componente $\vec{v} \perp \vec{B}$ vai gerar um movimento circular, como discutido anteriormente.

Compondo o movimento uniforme na direção paralela a $\vec{B}$ com o movimento circular devido à componente de $\vec{v} \perp \vec{B}$, teremos uma trajetória helicoidal, como mostra a figura.



Nesta aula veremos o que chamamos de campos cruzados

Podemos superpor campos magnéticos e elétricos em uma região, que podem agir independentemente em uma partícula carregada, o que chamamos de campos cruzados.

Assim, por exemplo, podemos anular a soma das forças (elétricas e magnéticas) agindo sobre uma partícula.

Mas,
a força elétrica, no caso de uma partícula com carga positiva, está na direção e sentido do campo elétrico e

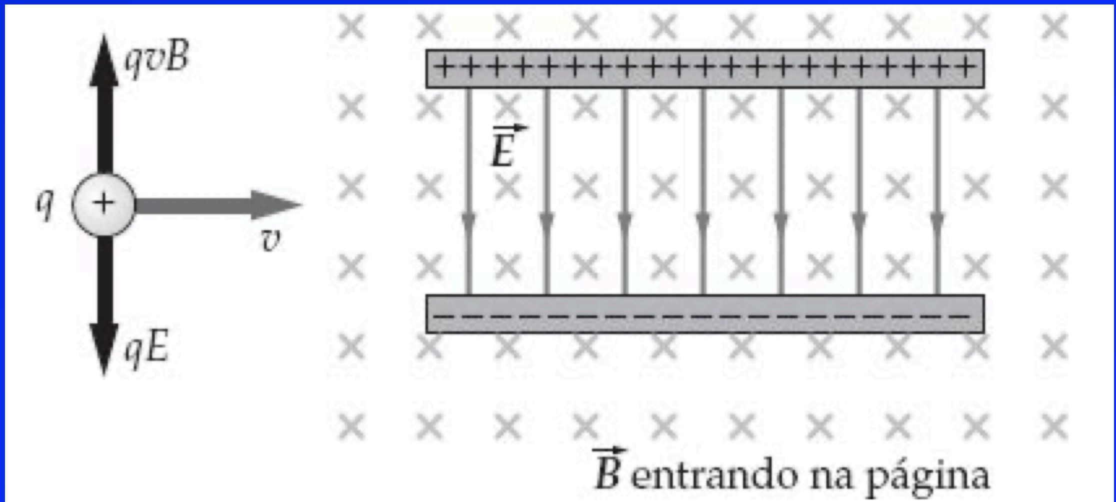
a força magnética é perpendicular ao campo magnético.

No próximo slide vamos montar uma estratégia para que essas forças possam se anular.

A figura mostra uma região do espaço entre duas placas, que criam um campo elétrico uniforme, e um campo magnético perpendicular, produzido por um ímã que tem um polo de cada lado de nossa tela. Considere uma partícula com carga *q* entrando neste espaço a partir da esquerda. A força resultante na partícula é

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Se *q* é positiva, a força elétrica, de módulo igual a *qE*, é para baixo e a força magnética, de módulo igual a *qvB*, é para cima.
Se a carga é negativa, o sentido de cada força é o oposto.
As duas forças entrarão em equilíbrio se $qE = qvB$, ou $v = E/B$



Assim, qualquer partícula que tenha esta velocidade, independentemente de sua massa ou carga, percorrerá o espaço em movimento retilíneo uniforme.

Uma partícula que tenha uma velocidade maior será defletida no sentido da força magnética,

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

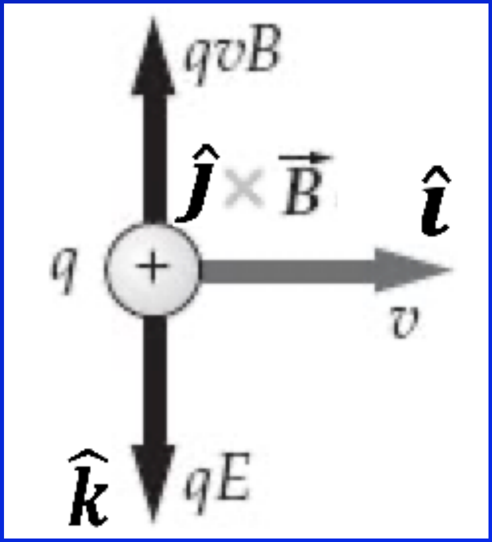
e uma partícula que tenha uma velocidade menor será defletida no sentido da força elétrica

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Esta configuração de campos é, algumas vezes, chamada de seletor de velocidades, que é um dispositivo que permite que apenas partículas com uma velocidade específica, dada por $v = E/B$, passem.

Problema prático 26-2

Um próton está se movendo na direção +x em uma região de campos cruzados onde $\vec{E} = 2{,}00 \times 10^5$ N/C $\hat{k}$ e $\vec{B} = 0{,}300$ T $\hat{j}$.
(a) Qual é a velocidade do próton se ele não é defletido?
(b) Se o próton se move com o dobro desta velocidade, ele será defletido em que direção e sentido?



$$\text{(a) } v = \frac{E}{B} = \frac{2\times10^5}{0{,}3} = 6{,}67\times10^5 \text{ m/s}$$

$$\text{(b) } v' = 2v \quad \therefore \quad qvB > qE$$

portanto o próton deflete para cima na direção e sentido de $-\hat{k}$

Medida de Thomson de *q/m* para elétrons

Um exemplo do uso de campos elétricos $\vec{E}$ e magnéticos $\vec{B}$ cruzados é o famoso experimento de Thomson de 1897.

Ele mostrou que os raios (feixes) de um tubo de raios catódicos podem ser defletidos por campos elétricos e magnéticos, indicando que eles devem ser constituídos de partículas carregadas.

Medindo as deflexões destas partículas, Thomson mostrou que todas elas tinham a mesma razão *q/m*.

Mostrou também que essas partículas podem ser obtidas usando qualquer material como fonte e, portanto, são um constituinte fundamental de toda a matéria.

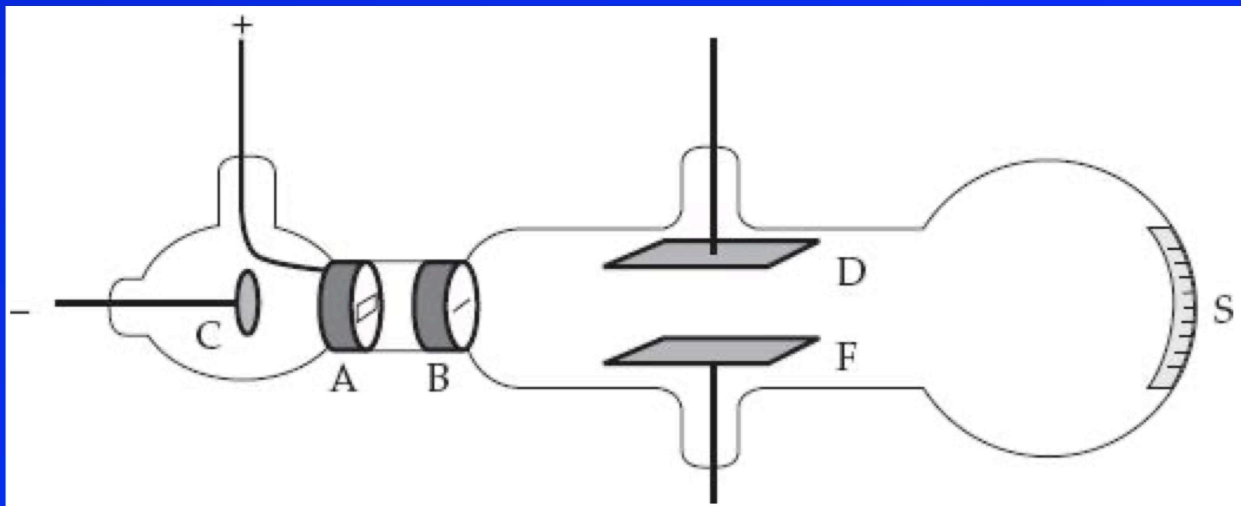
Estas partículas, hoje, são chamadas de elétrons!

A figura mostra um esquema do tubo de raios catódicos utilizado por Thomson.

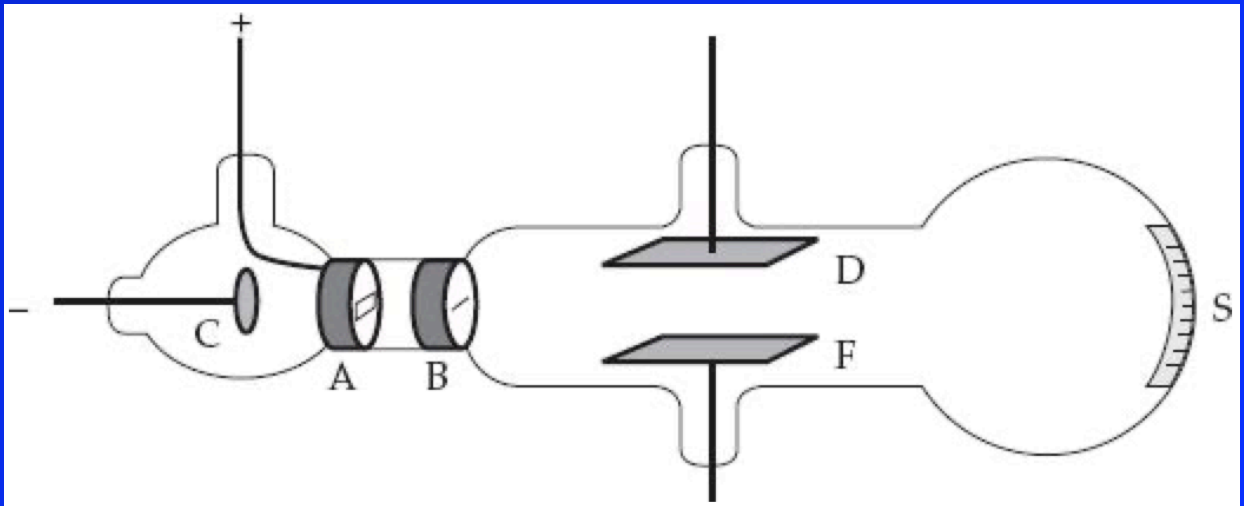
Elétrons são emitidos do catodo C,
que está em um potencial negativo em relação ao das fendas A e B.

Um campo elétrico no sentido de A para C acelera os elétrons que passam pelas fendas A e B, entrando em uma região livre de campo.

Os elétrons, então, entram no campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas D e F, o qual é perpendicular à velocidade dos elétrons.
Este campo acelera os elétrons verticalmente por um curto intervalo de tempo, enquanto eles estiverem entre as placas.

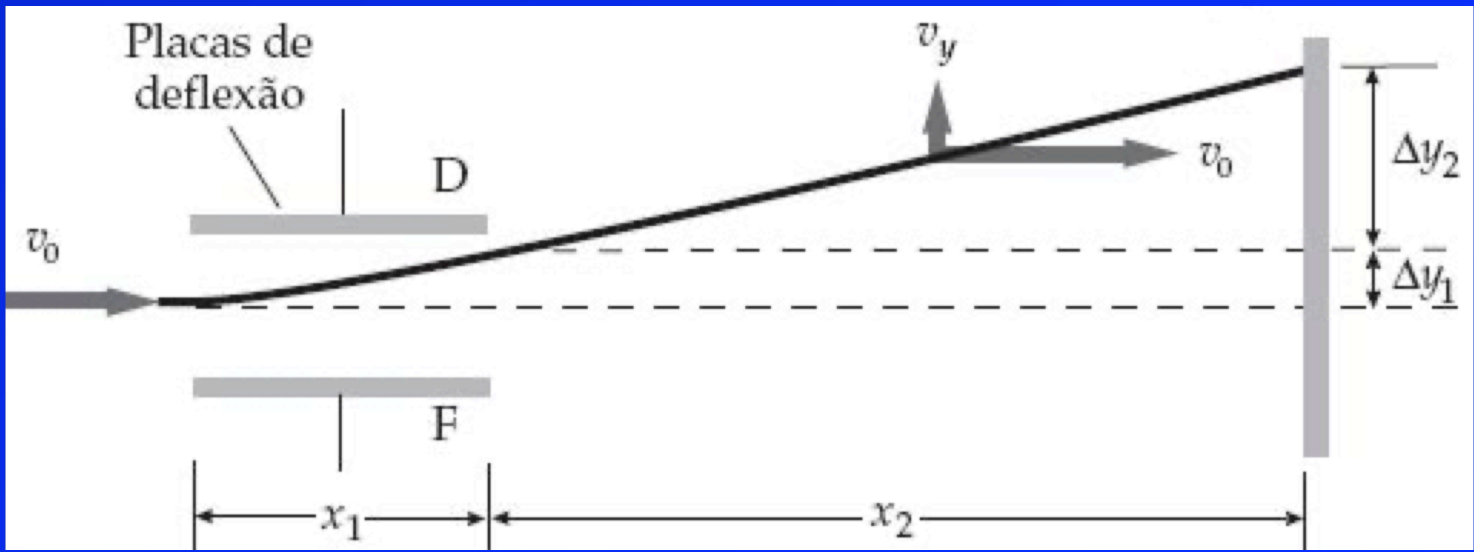


Assim, os elétrons são defletidos e colidem com a tela fosforescente S
a uma grande distância à direita no tubo,
com certa deflexão Δy em relação ao centro da tela.
A tela brilha no ponto onde os elétrons colidem,
indicando a localização do feixe.
A velocidade dos elétrons v_0 é determinada introduzindo
um campo magnético $\vec{B}$ entre as placas
em uma direção tal que $\vec{B} \perp \vec{E}$ e $\vec{B} \perp v_0$.
A intensidade de $\vec{B}$ é ajustada até que não haja deflexão do feixe.
A velocidade v_0 é, então, determinada por $v_0 = E/B$.



Considerando apena a presença do campo elétrico $\vec{E}$,
o feixe sofre uma deflexão Δy, que consiste em duas partes:
a deflexão Δy_1, que ocorre quando os elétrons estão na região de $\vec{E}$, e
a deflexão Δy_2, que ocorre quando os elétrons saem da região de $\vec{E}$.
Seja x_1 a distância horizontal onde temos o campo elétrico $\vec{E}$.
Se o elétron está se movendo horizontalmente com velocidade v_0,
o tempo de viagem na presença de $\vec{E}$ é $t_1 = x_1/v_0$
e a deflexão nessa região é de

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2$$



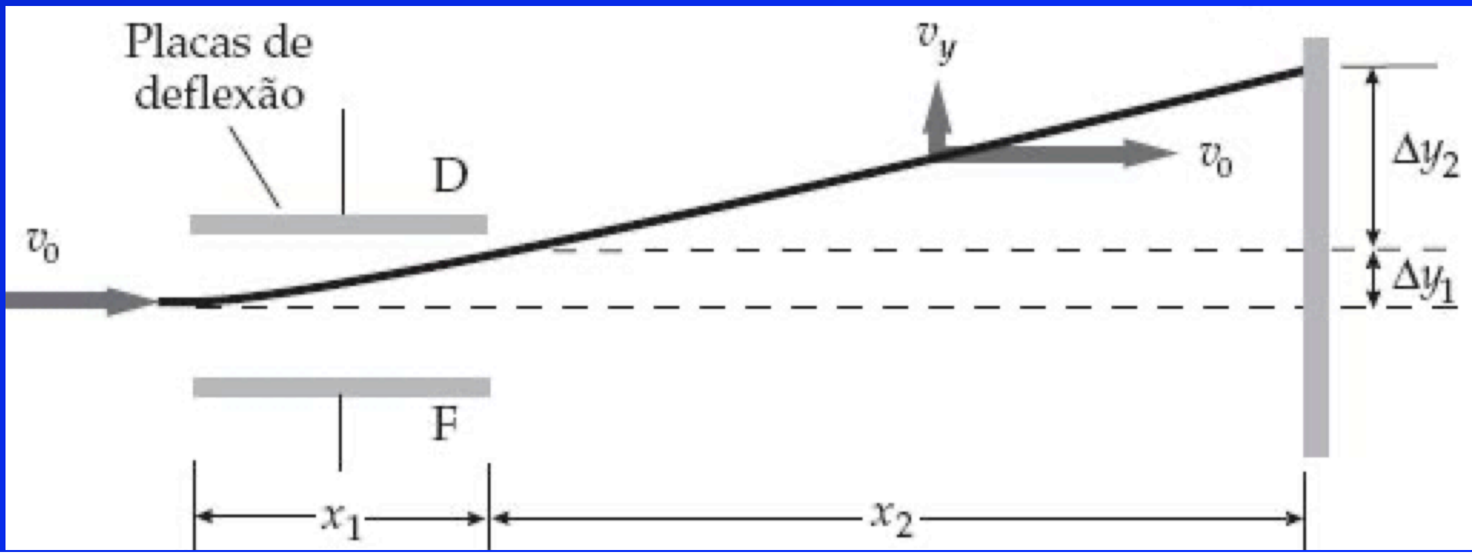
A velocidade vertical quando ele deixa as placas

$$v_y = a_y t_1 = \frac{qE_y}{m} t_1 = \frac{qE_y}{m}\frac{x_1}{v_0}$$

O elétron viaja, a seguir, uma distância horizontal adicional x_2 na região livre de campo até a tela.

Como a velocidade do elétron é constante nesta região, o tempo para atingir a tela é $t_2 = x_2/v_0$, e a deflexão vertical adicional é

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE_y}{m}\frac{x_1}{v_0}\frac{x_2}{v_0}$$



A velocidade vertical quando ele deixa as placas

$$v_y = a_y t_1 = \frac{qE_y}{m} t_1 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0}$$

O elétron viaja, a seguir, uma distância horizontal adicional x_2 na região livre de campo até a tela.

Como a velocidade do elétron é constante nesta região, o tempo para atingir a tela é $t_2 = x_2/v_0$, e a deflexão vertical adicional é

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0}$$

Assim, a deflexão total na tela é

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{mv_0^2} x_1^2 + \frac{qE_y}{mv_0^2} x_1 x_2$$

A deflexão medida Δy pode ser usada para determinar a razão q/m.

Exemplo 26-5 Deflexão de um feixe de elétrons

Elétrons passam sem deflexão entre as placas do dispositivo de Thomson quando o campo elétrico é 3000 V/m e há um campo magnético cruzado de 0,140 mT.
Se as placas têm 4,00 cm de comprimento e as extremidades das placas estão a 30,0 cm da tela,
determine a deflexão na tela quando o campo magnético é desligado.
São dados a massa e a carga do elétron
$m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg $\quad q = -e = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C.

Sabemos que $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2}\frac{qE_y}{mv_0^2}x_1^2 + \frac{qE_y}{mv_0^2}x_1 x_2$ **onde** $v_0 = E/B$,

então $v_0 = \frac{E}{B} = \frac{3000\ \mathrm{V/m}}{1{,}40 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}} = 2{,}14 \times 10^7\ \mathrm{m/s}$

Assim,

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2}\frac{(-1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(-3000\,\mathrm{V/m})}{(9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})(2{,}14 \times 10^{7}\,\mathrm{m/s})^2}(0{,}0400\,\mathrm{m})^2$$
$$= 9{,}20 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta y_2 = \frac{(-1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(-3000\,\mathrm{V/m})}{(9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})(2{,}14 \times 10^{7}\,\mathrm{m/s})^2}(0{,}0400\,\mathrm{m})(0{,}300\,\mathrm{m})$$
$$= 1{,}38 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

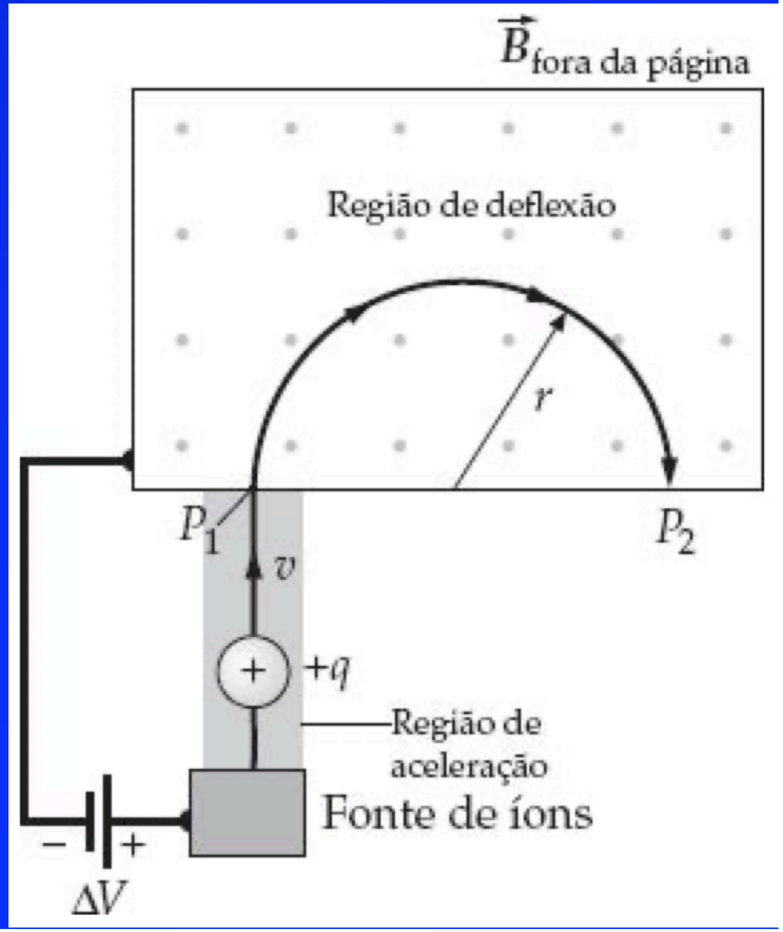
portanto

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$$
$$= 9{,}20 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} + 1{,}38 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$
$$= 0{,}92\,\mathrm{mm} + 13{,}8\,\mathrm{mm} = \boxed{14{,}7\,\mathrm{mm}}$$

Espectrômetro de massa

O espectrômetro de massa foi desenvolvido em 1919 com o objetivo de medir as massas de isótopos.
A figura mostra um esquema de um espectrômetro de massa.
O material a ser analisado é bombardeando com radiação para formar íons positivos desse material

Os íons são acelerados por um campo elétrico, através de uma diferença de potencial ΔV, e entram em um campo magnético uniforme.
Então, como já vimos, os íons se movem em um semicírculo de raio $r = mv/qB$, onde v é obtido em $\frac{1}{2}mv^2 = q|\Delta V|$, e, então colidem com uma placa fotográfica no ponto P_2 a uma distância $2r$ do ponto P_1.



Retomando as equações do slide anterior

$$\frac{1}{2}mv^2 = q|\Delta V| \quad \text{e} \quad r = \frac{mv}{qB}$$

da segunda equação temos

$$v = \frac{rqB}{m}$$

que substituindo na segunda equação

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r^2q^2B^2}{m^2}\right) = q|\Delta V|$$

Isolando *m/q*, teremos

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2r^2}{2|\Delta V|}$$

que depende apenas dos dados experimentais

Exemplo 26-6 Separando isótopos de níquel

Um íon de ^{58}Ni com carga igual a +*e* e massa igual a $9{,}62 \times 10^{-26}$ kg é acelerado através de uma diferença de potencial de 3,00 kV e defletido em um campo magnético de 0,120 T.
(a) Determine o raio de curvatura da órbita do íon.
(b) Determine a diferença nos raios de curvatura dos íons ^{58}Ni e ^{60}Ni. (Considere que a razão entre as massas seja 58:60.)

(a) Como vimos no slide anterior $\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2|\Delta V|}$

Assim $r = \sqrt{\frac{2m|\Delta V|}{qB^2}} = \left[\frac{2(9{,}62 \times 10^{-26}\ \text{kg})(3000\ \text{V})}{(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}120\ \text{T})^2}\right]^{1/2}$ **= 0,501 m**

(b) Determine a diferença nos raios de curvatura, r_1 e r_2, dos íons ^{58}Ni e ^{60}Ni, respectivamente.

Retomando a equação $$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2|\Delta V|}$$

e fixando os parâmetros experimentais B, ΔV e considerando que q é o mesmo para diferentes isótopos, temos que

$$m = \frac{qB^2}{2|\Delta V|} r^2 \quad \text{ou} \quad m = C\, r^2$$ **onde C é uma constante, assim**

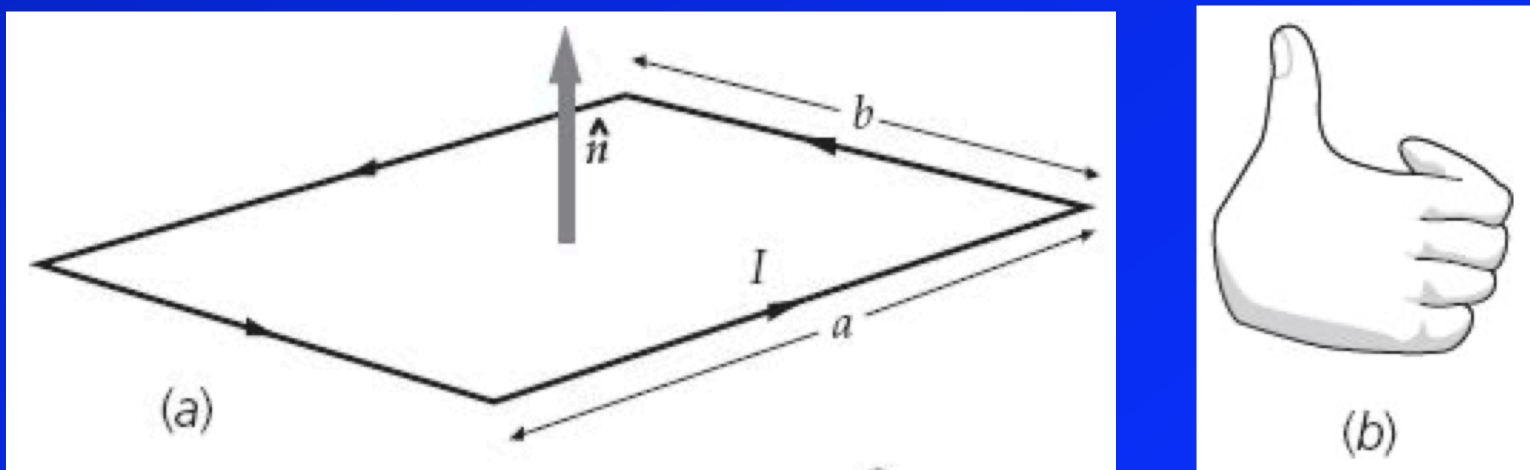
$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1{,}017$$

Portanto

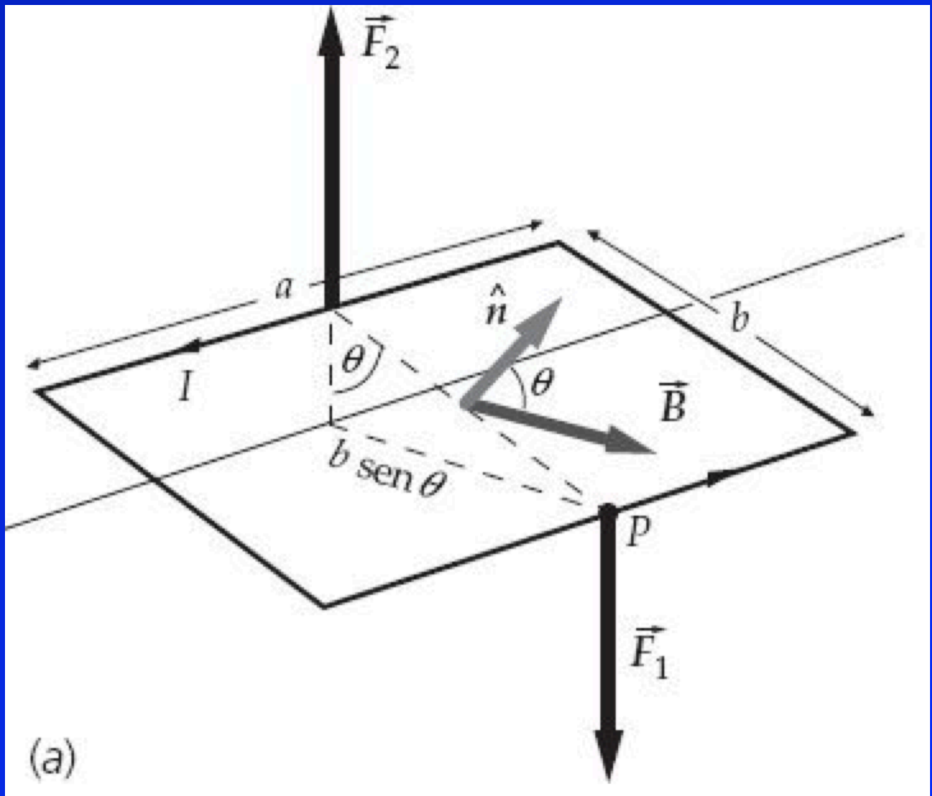
$$r_2 = 1{,}017 r_1 = (1{,}017)(0{,}501\ \text{m}) = 0{,}510\ \text{m}$$ **e** $$r_2 - r_1 = 0{,}510\ \text{m} - 0{,}501\ \text{m} = \boxed{9\ \text{mm}}$$

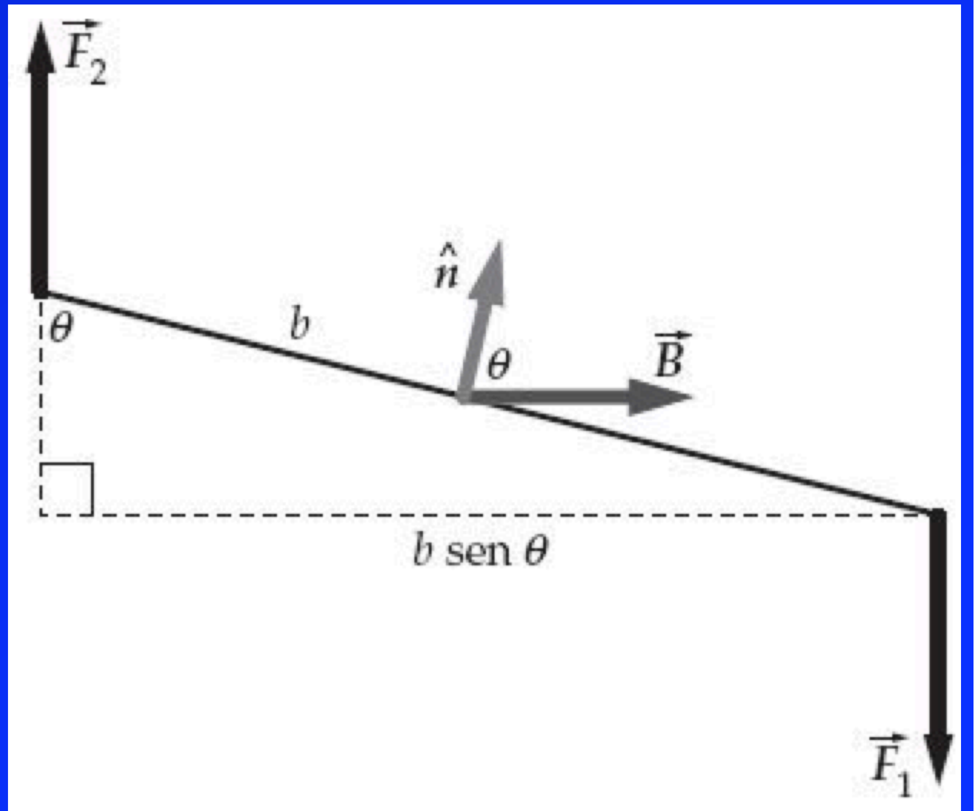
26-3 Torque em anéis de corrente e ímãs

Um anel conduzindo corrente gera o que chamamos de
momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$
essa grandeza é vetorial sendo sua direção perpendicular ao plano do anel e o sentido sendo definido pela regra da mão direita.
A direção e sentido de $\vec{\mu}$ estão representados na figura por $\hat{n}$.



A figura da esquerda mostra as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$
exercidas por um campo magnético uniforme $\overrightarrow{B}$
em um anel retangular conduzindo corrente I
cujo vetor momento de dipolo magnético ($\mu\widehat{n}$) faz um ângulo θ com $\overrightarrow{B}$.
A força resultante no anel é zero, sendo $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = IaB$.
(Lembrando da aula passada que $\boxed{\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}}$)

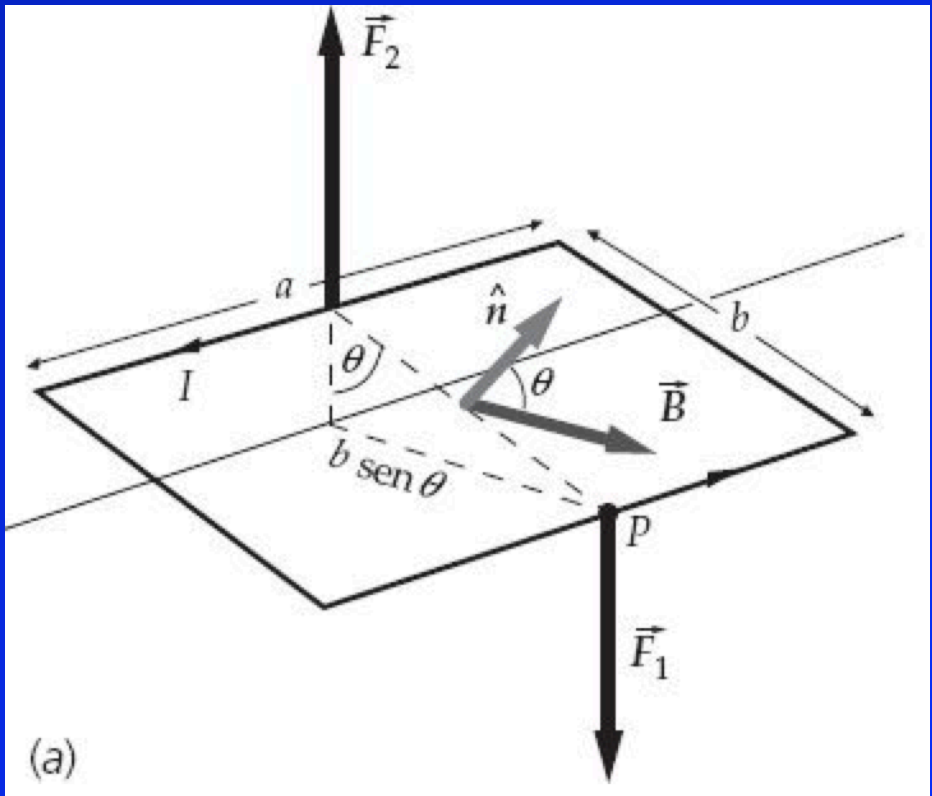


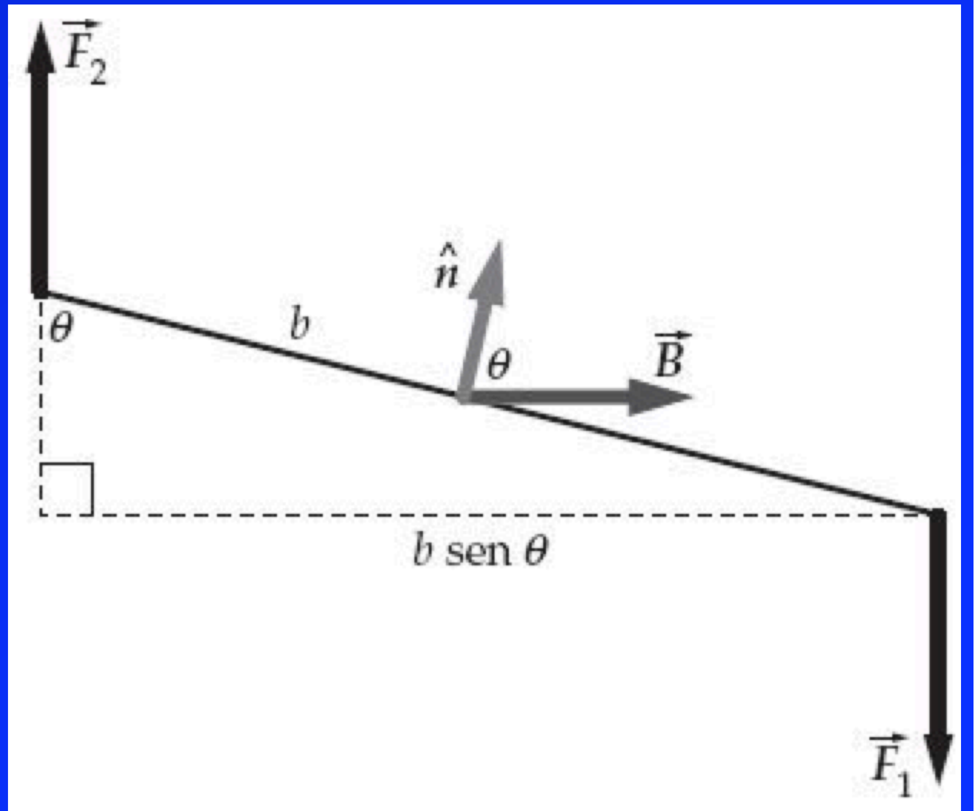


As forças formam um par exercendo um torque no anel.
Tomando o ponto *P* como referência para o cálculo do torque, temos $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, cuja magnitude é $\tau = F_2 b \sin\theta = IaBb \sin\theta = IAB \sin\theta$
onde $A = ab$ é a área do anel.
Para um anel que tem *N* voltas, o torque tem magnitude

$$\boxed{\tau = NIAB \operatorname{sen} \theta}$$

Este torque tende a girar o anel para ficar na mesma direção de $\vec{B}$.





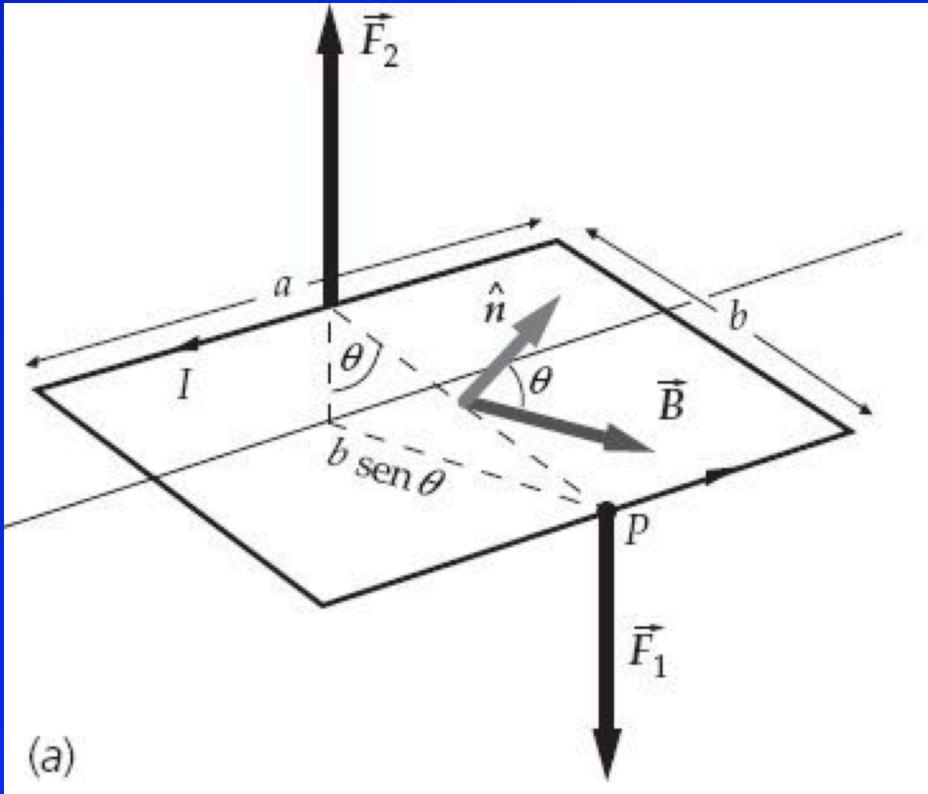
Retomando o torque do slide anterior $\tau = NIAB \,\mathrm{sen}\, \theta$ **e definindo o momento de dipolo magnético do anel de corrente como**

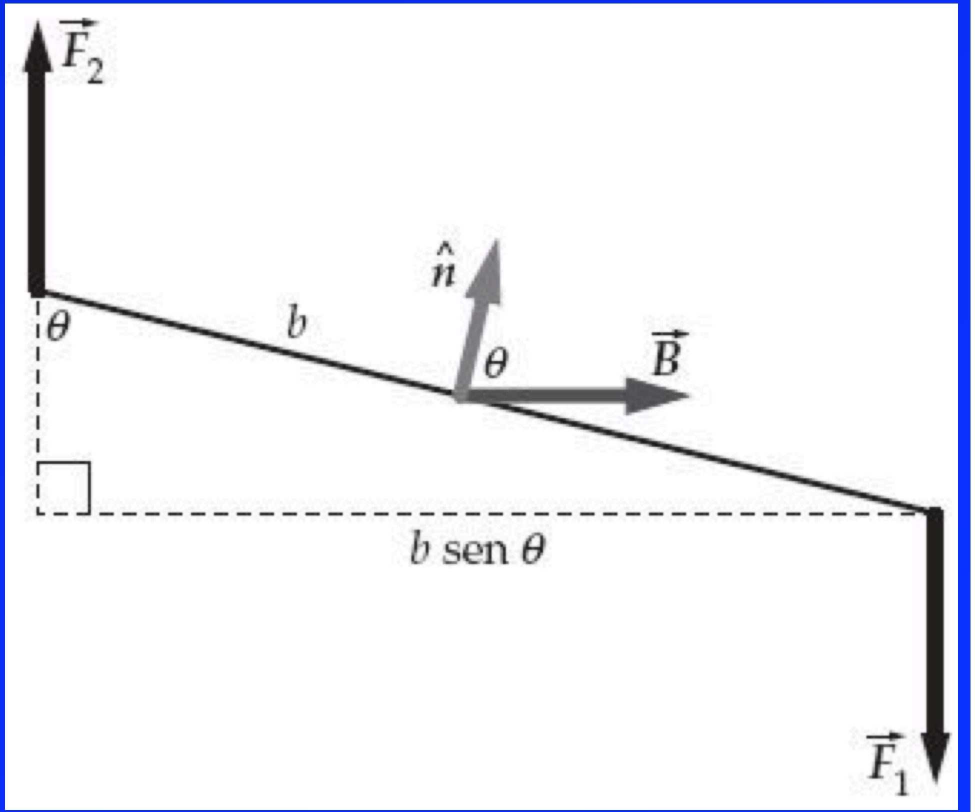
$$\vec{\mu} = NIA\hat{n}$$

(a unidade de μ no SI é A·m^2 ampère-metro quadrado)

podemos escrever o torque como função do momento magnético

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

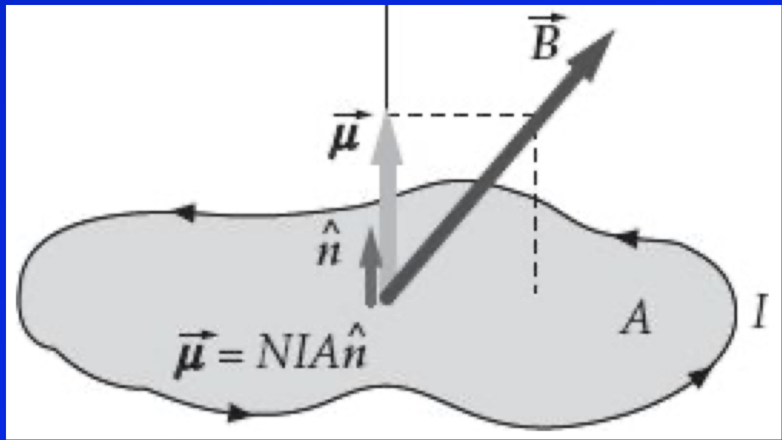




A equação de torque em um anel de corrente,
devido a um campo magnético $\vec{B}$

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ onde $\vec{\mu} = NIA\hat{n}$

que obtivemos para um anel retangular, tem validade geral para um anel de qualquer formato que está em um único plano.



Comparando a equação $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ com a equivalente para o campo elétrico $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ (torque em um dipolo elétrico),

vemos que a expressão para o torque sobre um dipolo magnético em um campo magnético é similar ao torque sobre um dipolo elétrico em um campo elétrico.

Exemplo 26-8 Torque em um anel de corrente

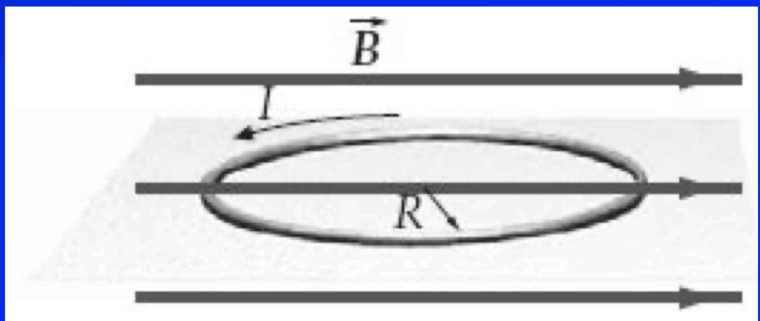
Um anel circular com raio igual a 2,00 cm, tem 10 voltas de fio e conduz uma corrente de 3,00 A.
O eixo do anel faz um ângulo de 30,0º com um campo magnético de 8000 G.
Determine a magnitude do torque no anel.

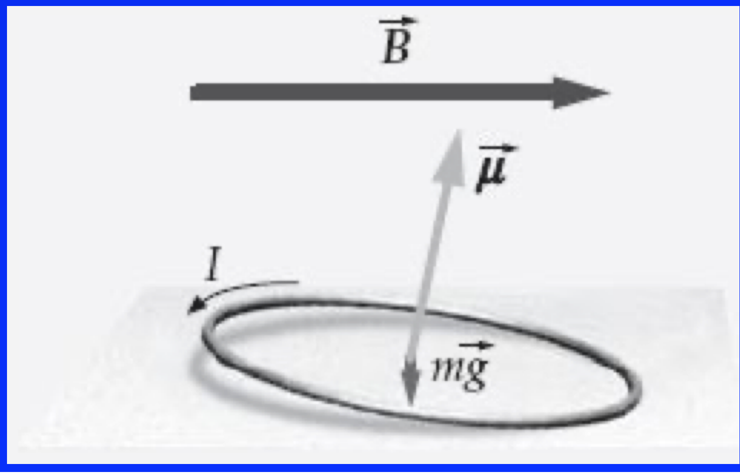
$$\tau = |\vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{B}| = \mu B \operatorname{sen}\theta = NIAB \operatorname{sen}\theta$$
$$= (10{,}0)(3{,}00\text{ A})\pi(0{,}0200\text{ m})^2(0{,}800\text{ T}) \operatorname{sen} 30{,}0^\circ$$
$$= \boxed{1{,}51 \times 10^{-2}\text{ N}\cdot\text{m}}$$

Exemplo 26-9 Inclinando um anel

Um anel circular de raio *R*, massa *m* e corrente *I* está em uma superfície horizontal (veja figura).
Nessa região há um campo magnético horizontal $\vec{B}$.
Qual o valor máximo da corrente *I* antes que um dos lados do anel se eleve da superfície?

O anel sofrerá um torque que tende à levantá-lo da superfície onde está apoiado.
O torque magnético é dado por $\overrightarrow{\tau_m} = \vec{\mu} \times \vec{B}$,
e o torque gravitacional, que se opõe ao magnético, é $\overrightarrow{\tau_g} = \vec{r} \times \mathrm{m}\vec{g}$
sendo o módulo de $\vec{r}$ dado pelo raio do anel *R*.





Exemplo 26-9 Inclinando um anel

Um anel circular de raio R, massa m e corrente I está em uma superfície horizontal (veja figura).
Há um campo magnético horizontal $\vec{B}$.
Qual o valor máximo da corrente I antes que um dos lados do anel se eleve da superfície?

O anel sofrerá um torque que tende à levantá-lo da superfície onde está apoiado.
O torque magnético é dado por $\vec{\tau_m} = \vec{\mu} \times \vec{B}$,
e o torque gravitacional, que se opõe ao magnético, é $\vec{\tau_g} = \vec{r} \times m\vec{g}$
sendo o módulo de $\vec{r}$ dado pelo raio do anel R.

$\tau_m = \mu B \sin 90^o$ **onde** $\vec{\mu} = NIA\hat{n}$

$$\therefore \tau_m = I\pi R^2 B$$

e $\tau_g = mgR$

Assim, $I = \frac{mgR}{\pi R^2 B} = \frac{mg}{\pi R B}$