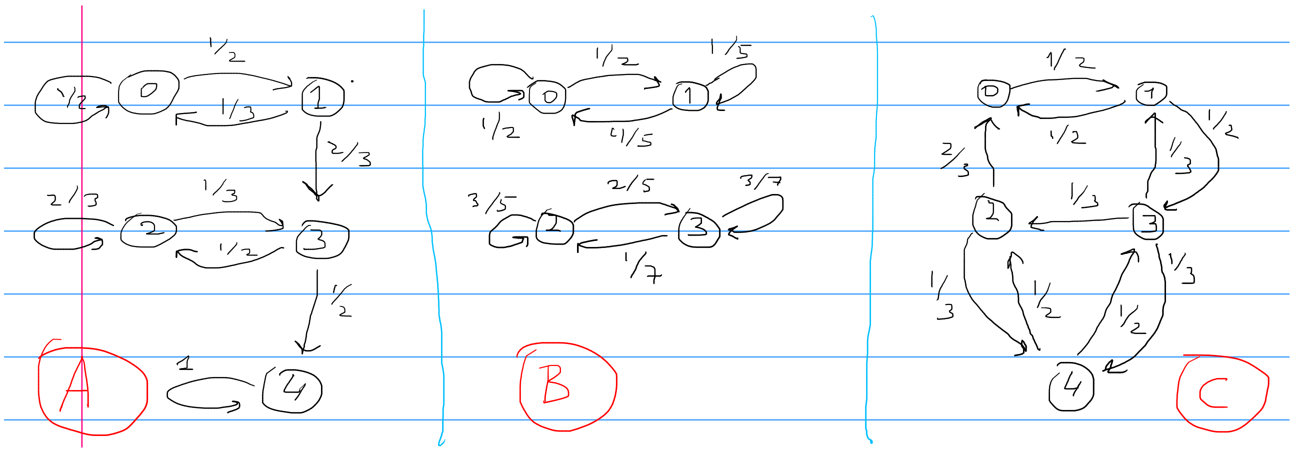
Aula 7. Cadeias de Markov: classificação.

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Aula 7. Cadeias de Markov: classificação.

Observe as diferenças entre três cadeias de Markov



Classificação de estados. *Um estado j chama-se* **acessível** *pelo estado i se existe $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Nota que pela definição n pode ser igual a 0. Mas

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Isso significa que qualquer estado i é acessível por ele mesmo.

Dois estados i e j são **comunicáveis ($i \leftrightarrow j$)** *se i é acessível por j, e j é acessível por i.*

Notamos, que pela definição qualquer estado i é comunicável com ele mesmo:

$$p_{ii}^{(0)} = P\{X_0 = i \mid X_0 = i\} = 1.$$

Classificação de estados.

A relação de *comunicação* satisfaz as seguintes propriedades

- Qualquer estado i se comunica com ele mesmo: $i \leftrightarrow i$.
- Se o estado i se comunica com o estado j, então, o estado j se comunica com o estado i : $i \leftrightarrow j \ \Rightarrow j \leftrightarrow i$.
- Se o estado i se comunica com o estado j, e o estado j se comunica com o estado k, então, o estado i se comunica com o estado k : $i \leftrightarrow j,\ j \leftrightarrow k \ \Rightarrow i \leftrightarrow k$.

A primeira e a segunda propriedade segue diretamente das definições. A última propriedade pode ser provada pela equação de Kolmogorov-Chapman.

Classificação de estados.

A propriedade $i \leftrightarrow j,\ j \leftrightarrow k \ \Rightarrow i \leftrightarrow k$, pode ser provada pela equação de Kolmogorov-Chapman.

Suponha que i se comunica com j e j se comunica com k. Pela definição, existem $n \geq 0$ e $m \geq 0$ tais que $p_{ij}^{(n)} > 0$ e $p_{jk}^{(m)} > 0$. Usando equação de Kolmogorov -Chapman, temos que

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0.$$

Assim, obtemos que o estado k é acessível de estado i. Do mesmo jeito podemos provar que o estado i é acessível pelo estado k.

Classificação de estados.

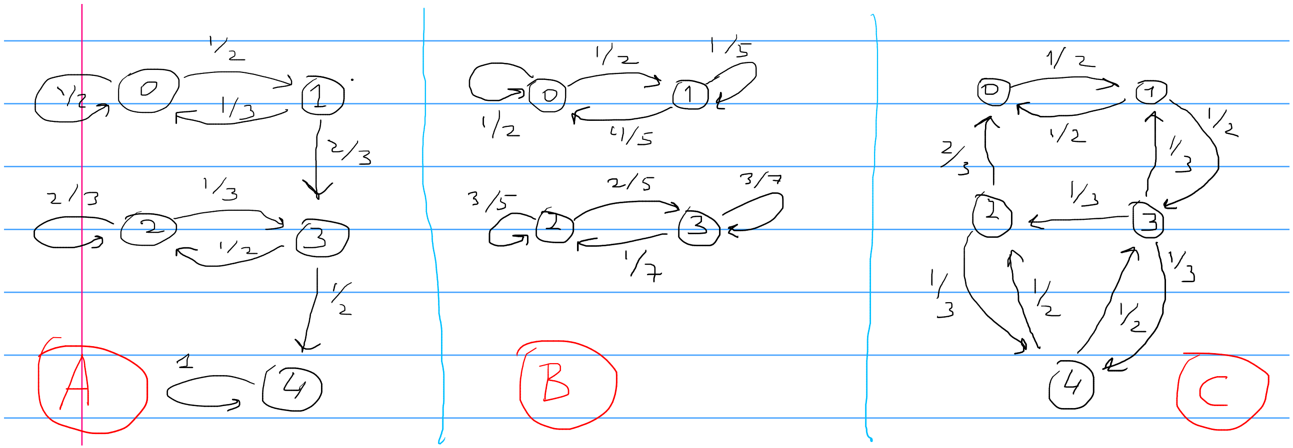
Diz-se que um conjunto de estados de uma cadeia de Markov forma uma classe C, se quaisquer dois estados neste conjunto são comunicáveis. Além disso, quaisquer dois estados comunicáveis da cadeia pertecem a uma classe.

Notamos que se existem duas classes C_1 e C_2 para uma cadeia de Markov, então elas são disjuntas ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$) ou idénticas ($C_1 \equiv C_2$).

Uma cadeia de Markov X_n chama-se **irredutível** *se todos os estados dela formam uma única classe.*

Classificação de estados. Exercício 1.

Determine classes de comunicação. Uma dessas cadeias é cadeia irredutível?



Classificação de estados. Exercício 2.

Sejam $0, 1, 2$ estados de uma cadeia de Markov com a matriz de transições

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{vmatrix}.$$

Determine se a cadeia de Markov é irredutível.

Solução. Diretamente da matriz de transição, obtemos que $0 \leftrightarrow 1$ e $1 \leftrightarrow 2$. Pela propriedade de estados comunicáveis obtemos que $0 \leftrightarrow 2$, também. Então todos os estados são comunicáveis e formam uma classe. Esta classe é única, por isso, a cadeia de Markov é irredutível.

Classificação de estados. Exercício 3. Sejam 0, 1, 2, 3 estados de uma cadeia de Markov com a matriz de transições

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Determine as classes que formam os estados desta cadeia.

Solução. Notamos que se a cadeia "caiu" no estado 3, ela nunca mais pode sair deste estado, por isso, o estado 3 forma uma classe (este estado é comunicável com ele mesmo). Qualquer estado i é acessível pelo estado 2, mas o estado 2 é acessível somente por ele mesmo. Isso significa que o estado 2 é comunicável somente por ele mesmo, por isso, temos mais uma classe formada pelo estado 2. Os estados 0 e 1 são comunicáveis e formam uma terceira classe. Então, o conjunto de estados desta cadeia se divide em três classes:

$$C_1 = \{0, 1\},\ C_2 = \{2\},\ C_3 = \{3\}.$$

$\square$

Classificação de estados.

Para cada estado i de uma cadeia de Markov X_n, definimos a probabilidade f_i de que, começando do estado i, a cadeia volte para o estado i :

$$f_i = \mathbb{P}(\text{ existe um instante } n > 0 \text{ tal que } X_n = i \mid X_0 = i).$$

Um estado i se diz **recorrente** *se* $f_i = 1$. *Um estado i se chama* **transitório** *se* $f_i < 1$.

Note: se o estado i é recorrente, então a cadeia de Markov saindo do estado i, sempre vai voltar para este estado, ou o número de vezes que a cadeia está no estado i é infinito. Consequentemente, a média do número de vezes em que a cadeia está em tal estado é infinito. Por outro lado, se i é transitório, então a probabilidade de que, saindo deste estado i, a cadeia nunca mais volte neste estado é igual a $1 - f_i$; e número de voltas tem distribuição geométrica:

$$\mathbb{P}(X_n \text{ volta } k \text{ vezes em estado } i \mid X_0 = i) = f_i^k(1-f_i),\ k = 0, 1, \ldots$$

Então a média de número de vezes em que a cadeia está no estado i é finita e igual a $1/(1 - f_i)$.

Classificação de estados. Seja I_n função indicadora que a cadeia está no estado i :

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i \\ 0, & \text{se } X_n \neq i \end{cases}$$

Número de vezes que a cadeia está no estado i pode ser representado como soma $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$. Logo, a média é

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[I_n \mid X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

Assim, provamos a seguinte proposição:

o estado i é

recorrente, se $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$,

transitório, se $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Notamos que se uma cadeia é finita (o número de estados dela é finito), então, não podem ser todos os estados transitórios.

Classificação de estados.

Como uma consequência obtemos: *Se o estado i é recorrente, e o estado i se comunica com o estado j, então o estado j é recorrente também.*

Prova. Se i e j são comunicáveis, então existem k e m inteiros tais que $p_{ij}^{(k)} > 0, p_{ji}^{(m)} > 0$. Para cada n inteiro, temos

$$p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)}$$

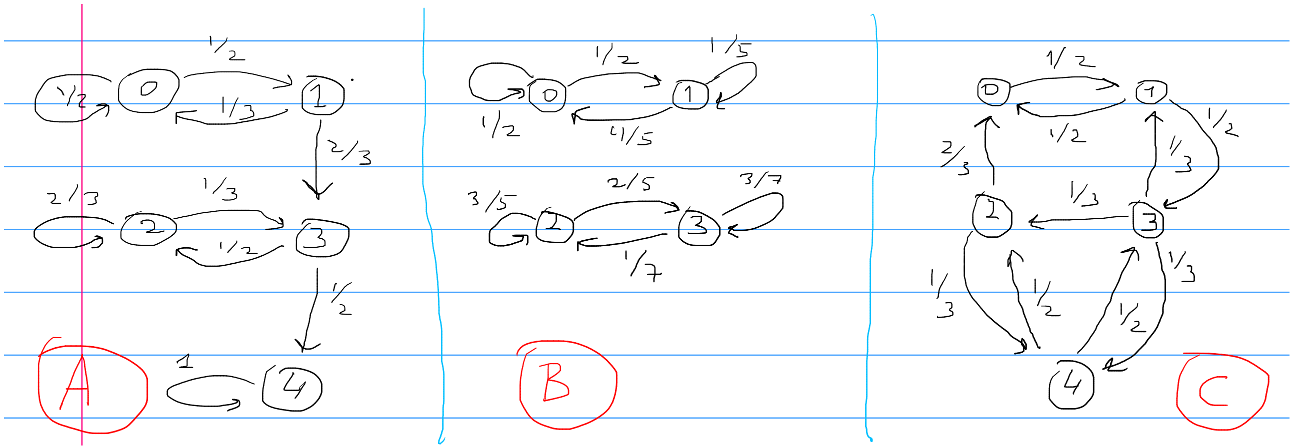
e somando pelo n, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+k)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$$

já que $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} > 0$, e $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ é infinita porque o estado i é recorrente. $\square$

Classificação de estados. Exemplo.

Quais são estados recorrentes, absorventes e transitórios?



Passeio aleatório simples unidimensional. Passeio aleatório (ou passeio de um homem bêbado). Os estados desta cadeia são os números inteiros $\mathbb{Z} = \{i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, com probabilidades de transição:

$$p_{i,i+1} = p, \;\; p_{i,i-1} = 1 - p, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Notamos que as probabilidades de transição não dependem da posição i (homogêneo). Notamos também que todos os estados desta cadeia são comunicáveis e cadeia é irredutível. Isso significa que ou todos os estados são recorrentes ou todos os estados são transitórios. Consideramos o estado 0. Vamos tentar determinar se este estado é estado transitório ou recorrente. Usaremos a proposição: para saber se um estado é recorrente ou transitório é suficiente saber se a soma $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ é finita ou infinita.

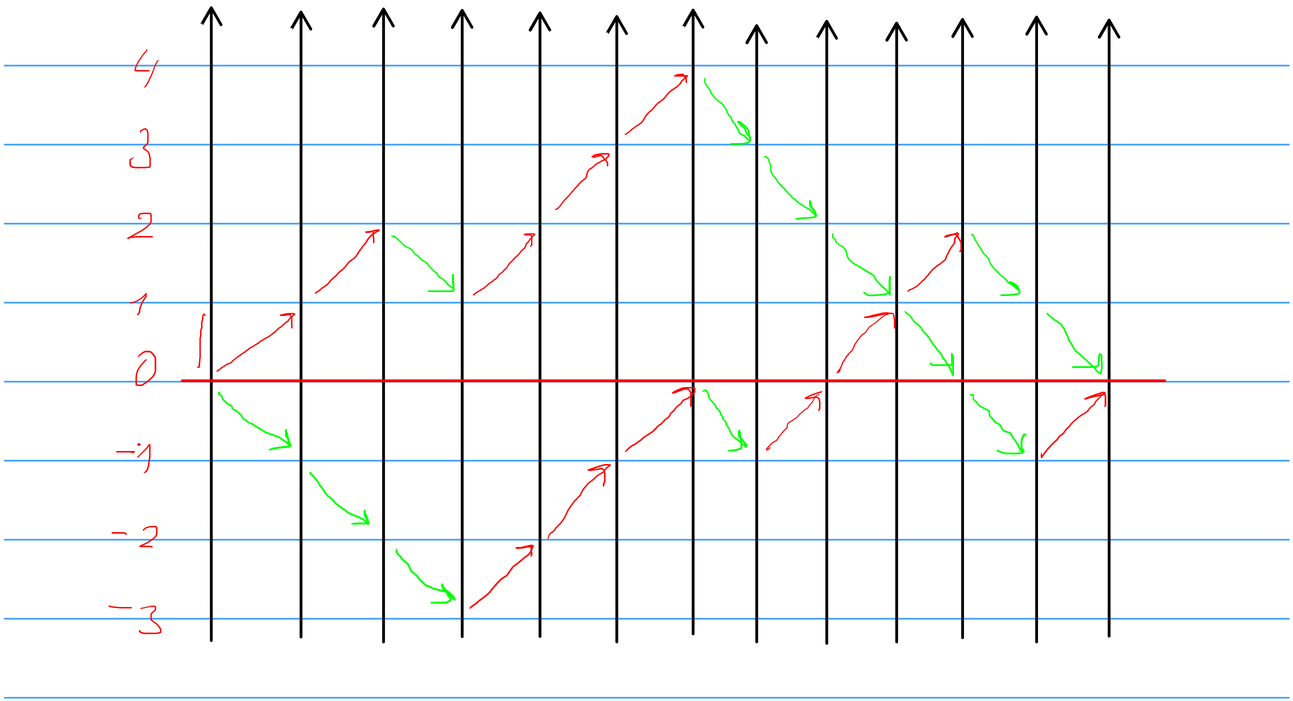
Passeio aleatório simples unidimensional.

Notamos que a cadeia é periódica: impossível sair do ponto 0 e voltar para ele em número ímpar de passos:

$$p_{00}^{(2k+1)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Note, que é possível voltar para o mesmo estado com $2k$ passos se e somente se o número de passos para frente é igual ao número de passos para trás. A sequência de passos neste caso não tem importância, por isso o número de sequências possíveis de passos é $\binom{2k}{k}$ e cada passeio tem probabilidade $p^k(1-p)^k$ (k passos para frente e cada um deles com probabilidade p e k passos para trás, com probabilidade de cada um deles igual a $(1-p)$.

Passeio aleatório simples unidimensional.



Passeio aleatório simples unidimensional.

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{00}^{(2k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k!}{k!k!} p^k (1-p)^k.$$

A análise de convergência das séries é uma análise de comportamento assintótico dos termos desta série. Qual é comportamento assintótico de $\frac{2k!}{k!k!} p^k (1-p)^k$ quando k é grande?

Passeio aleatório simples unidimensional. Qual é comportamento assintótico de $\frac{2k!}{k!k!}p^k(1-p)^k$ quando k é grande? Neste caso, podemos usar a fórmula de aproximação de Stirling:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Logo

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{(2n)!}{n!n!}p^n(1-p)^n \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}p^n(1-p)^n$$
$$= \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}p^n(1-p)^n = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$ converge se e somente se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$$

converge.

Passeio aleatório simples unidimensional.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$ converge se e somente se converge a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

O comportamento dos termos da última série dependem do valor p. Sabemos que $4p(1-p) < 1$ se $p \neq 1/2$ e $4p(1-p) = 1$ se $p = 1/2$. Por isso a série converge se $p \neq 1/2$ e diverge se $p = 1/2$. Logo, a cadeia é recorrente se $p = 1/2$ e a cadeia é transitória se $p \neq 1/2$. Se $p = 1/2$, a cadeia se chama *passeio aleatório simples (simétrico).* Se $p \neq 1/2$, o passeio aleatório é um passeio aleatório assimétrico. Se, por exemplo, $p > 1/2$, o passeio em média sempre estará indo para frente.

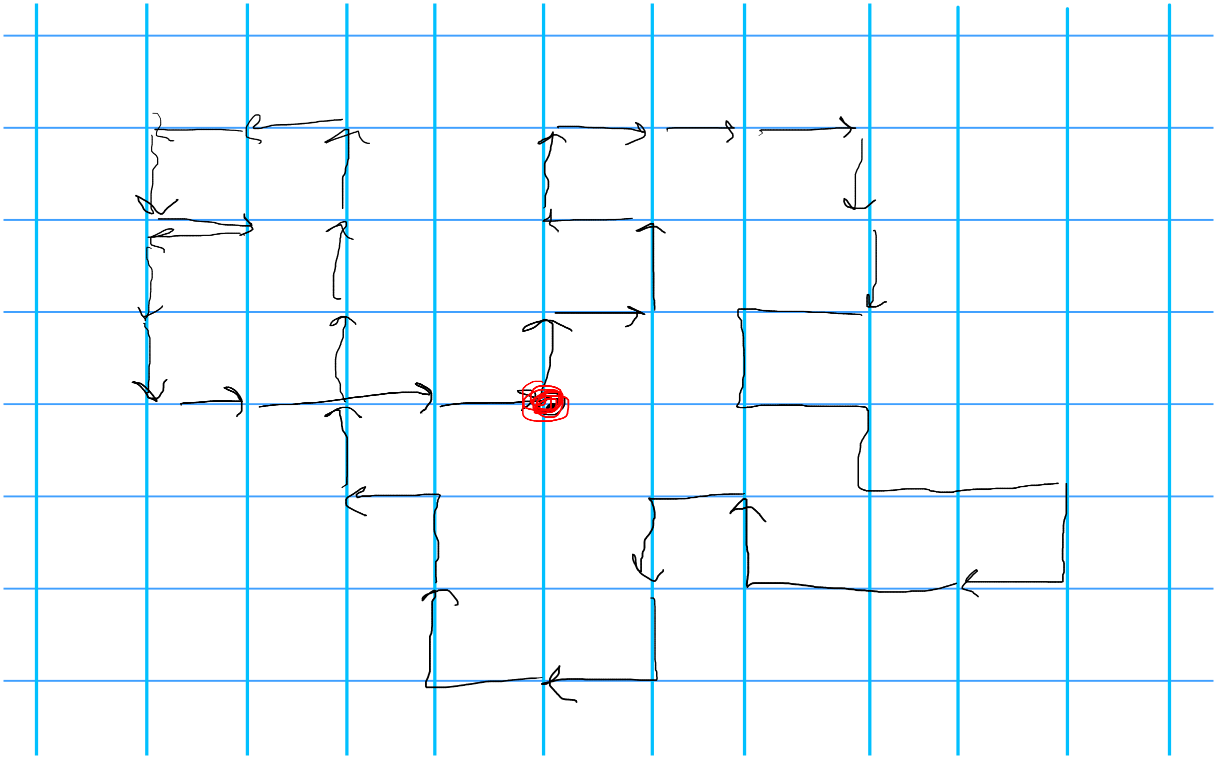
Passeio aleatório simples bidimensional.

Consideramos agora um passeio aleatório simples e simétrico em em duas dimensões. O espaço de estados do processo é $\mathbb{Z}^2 = \{(k,l) : k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\}$. As transições são simétricas e uniformes:

$$p_{(i,j),(i+1,j)} = p_{(i,j),(i-1,j)} = p_{(i,j),(i,j+1)} = p_{(i,j),(i,j-1)} = \frac{1}{4}.$$

Usando o mesmo método como no caso unidimensional, vamos provar que este processo é recorrente. Note, que cadeia é irredutível, basta verificar a recorrência para um estado, por exemplo, para o estado $\bar{0} = (0,0)$. O mesmo raciocínio mostra que, saindo de um certo estado, só é possível voltar para ele mesmo se o número de passos para frente s for igual ao número de passos para trás s, e o número de passos para cima r deve ser igual ao número de passos para baixo r. Notamos que o número total de passos é par: $s + s + r + r = 2s + 2r = 2(s + r)$.

Passeio aleatório simples bidimensional.



Passeio aleatório simples bidimensional.

Seja $2n$ o número total de passos e i o número de passos para cima, então, o número de passos para baixo é i também, e $n-i$ é o número de passos para frente (para trás também é $n-i$). A sequência de passos não é importante, assim, o número de caminhos de voltas possíveis com $2n$ passos é

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}.$$

Cada caminho tem probabilidade $\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$. Logo, obtemos a seguinte fórmula para a probabilidade $p_{\bar{0}\bar{0}}^{(2n)}$:

$$p_{\bar{0}\bar{0}}^{(2n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{n!}{(n-i)!i!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}.$$

Passeio aleatório simples bidimensional.

Aqui, usamos a seguinte igualdade de análise combinatória:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Como anteriormente, para ver o comportamento assintótico desta probabilidade, usaremos a fórmula de Stirling, lembrando que

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Logo, obtemos

$$p_{\bar{0}\bar{0}}^{(2n)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \binom{2n}{n} \sim \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\pi n}.$$

Isto significa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{\bar{0}\bar{0}}^{(2n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = \infty.$$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Academic Press, 2007.