# Aula 7. Cadeias de Markov: motivação e introdução.

Anatoli Iambartsev
IME-USP

## Aula 7. Cadeias de Markov: motivação e introdução

**Video 1.** Assiste como introdução histórica (embora eu acostumei com o ponto de vista diferente, porque Markov criou as suas sequências dependentes)

`https://www.youtube.com/watch?v=KZfItpSXseo`

**Video 2.** Como introdução pode ser

`https://www.youtube.com/watch?v=LUbQcRXLQcE`

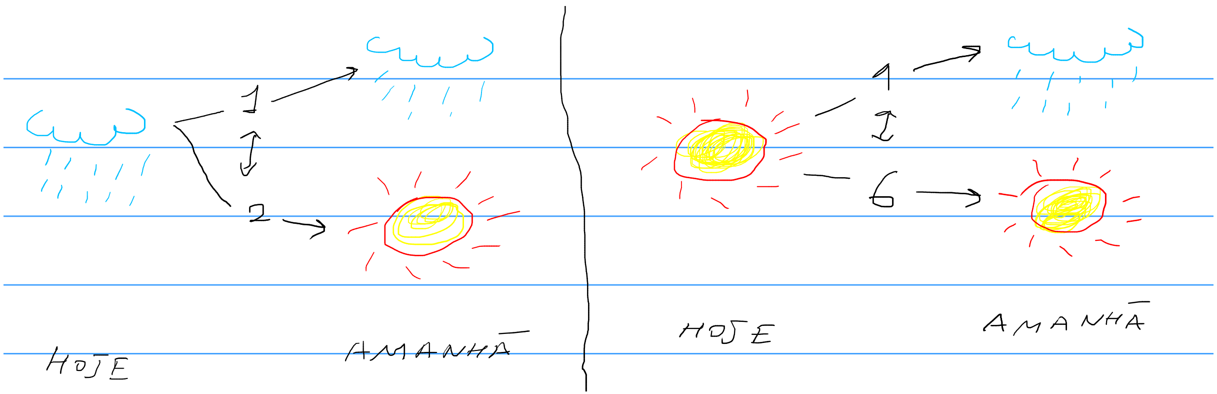
com o inicio 3 min 37s até 36 min 39s.

**Video 3.** Finalizando com exemplos de cadeias aplicadas à Atuária

`https://www.youtube.com/watch?v=cVXagizHjxQ`

## Exemplo Introdutório.

Numa ilha o tempo durante o dia é de dois tipos: ou está chovendo, ou não está chovendo. Os indígenas desta ilha sabem que se hoje chove, então com as chances 2 vs 1 não vai chover amanhã, mas se hoje não chove, então com as chances 6 vs 1 não vai chover amanhã.



## Exemplo Introdutório.

Para modelar esse sistema, podemos usar a técnica de cadeias de Markov. Cadeia é construída em dois passos: (1) definimos estados da cadeia, (2) definimos as transições e probabilidades delas, e (3) estado inicial.

No primeiro, definimos os estados do sistema. Neste caso o nosso interesse é o tempo, que pode ficar em dois estados *chove* (podemos codificar este estado como 1) e *não chove* (vamos codificar este estado como 0).

$$\text{Estados } = \{ \textit{ chove}, \textit{ não chove } \} = \{0, 1\}.$$

## Exemplo Introdutório.

No segundo passo, temos que descrever TODAS as transições entre os estados. Neste caso, temos 4 possíveis transições:

$$0 \to 1, \ 0 \to 0, \ 1 \to 0, \ 1 \to 1.$$

Além disso, para cada transição, temos sua respectiva probabilidade.

## Exemplo Introdutório.

Em nosso caso, as probabilidades são

- $0 \to 1$ – se hoje não chove, então amanhã não vai chover com chances 6 vs 1, ou com probabilidade $p_{01} = \frac{1}{7}$ vai chover;

- $0 \to 0$ – se hoje não chove, amanhã não vai chover com probabilidade $p_{00} = \frac{6}{7}$;

- $1 \to 0$ – se hoje chove, amanhã não chove, isso acontece com as chances 2 vs 1 ou com probabilidade $p_{10} = \frac{2}{3}$;

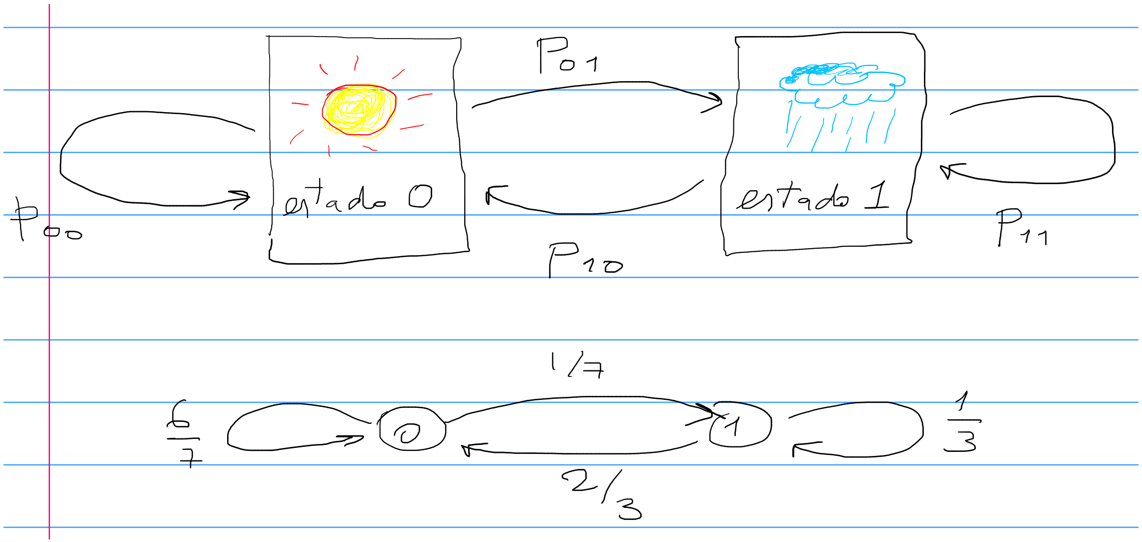
- $1 \to 1$ – se hoje chove, então amanhã vai chover com probabilidade $p_{11} = \frac{1}{3}$.

Notamos que

$$p_{00} + p_{01} = 1 \text{ e } p_{10} + p_{11} = 1.$$

Isso reflete o fato que qualquer que seja o tempo hoje, amanhã vai ser ou 0 ou 1: $p_{a0} + p_{a1} = 1, \ \forall a = 0, 1$.

**Exemplo Introdutório.** As transições podem ser representadas através do diagrama de transições:




Note, de novo que $p_{00} + p_{01} = 1$ e $p_{10} + p_{11} = 1$. O que reflete a nossa confiança em chegada de amanhã.

## Teoria geral (informal).

Vamos considerar o processo estocástico $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ em tempo discreto. As variáveis aleatórias $X_n$ assumem valores do mesmo conjunto $E$ que pode ser finito ou enumerável. Este conjunto chama-se o conjunto de estados e pode ser representado como o conjunto de números não-negativos $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Quando $X_n = i$, dizemos que o processo está no estado $i$ em tempo $n$. Suponha que para cada estado $i$, existem as probabilidades fixas $p_{ij}$ de que o processo esteja no estado $i$ e no próximo passo esteja no estado $j$.

## Teoria geral (informal).

Para cada estado $i$, fixamos as probabilidades $p_{ij},\ j \in E$ de que o processo esteja no estado $i$ e no próximo passo esteja no estado $j$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)\\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}.\end{aligned}$$

Isto significa que as chances de estar no estado $j$ no próximo instante $n+1$, depende somente do estado no instante (presente) $n$, mas não depende da toda história do processo $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Essa propriedade do processo chama-se propriedade de Markov, ou propriedade markoviana. Notamos que as probabilidades $p_{ij}$ não dependem do tempo $n$. Estes tipos de cadeias de Markov chamam-se cadeias *homogêneas* em relação ao tempo.

## Teoria geral (informal).

As probabilidades podem ser organizadas em matriz

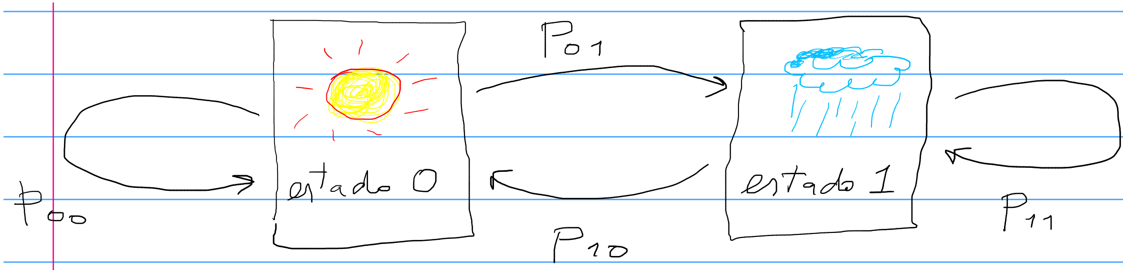
$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

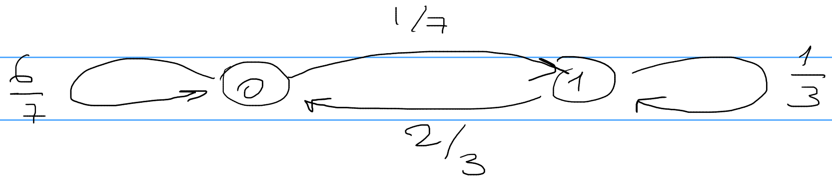
com as propriedades:

$$p_{ij} \geq 0, \text{ e para qualquer } i \ \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

A matriz chama-se a matriz de probabilidades de transição em um passo.

## Exemplo Introdutório.




$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

## Exercício 1.

Considere sequencia de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $X_i, i = 0, 1, 2, \ldots$. Supomos que a distribuição deles é Bernoulli $X_i \sim B(p)$. Falaram que essa sequencia pode ser considerada como uma cadeia de Markov, será que isso é verdade? e se caso verdade, descreve a cadeia, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

## Equações de Kolmogorov-Chapman.

Definimos as probabilidades de transição a $n$ passos. A probabilidade $p_{ij}^{(n)}$ definida como

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_m = i), n \geq 0, i, j \geq 0,$$

chama-se a probabilidade de transição de $i$ para $j$ depois de $n$ passos. Evidentemente $p^{(1)} = p_{ij}$. As *equações de Kolmogorov - Chapman* são

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

para todos $n, m \geq 0$, e todos $i, j \in E$.

As equações fornecem o cálculo de probabilidades de transição em $n$-passos.

## Equações de Kolmogorov-Chapman.

Formalmente, isso pode ser mostrado do seguinte modo:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

## Equações de Kolmogorov-Chapman.

Seja $\mathbf{P}^{(n)}$ a matriz de probabilidades de transição em $n$ passos. A equação pode ser representada através de matrizes como

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(m)}.$$

Particularmente, para dois passos, temos

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)}\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$$
$$\Rightarrow \text{ por indução } \Rightarrow \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n.$$

## Exercício 2.

Para a matriz de transições do exercício anterior, calcule a matriz de transições em dois passos.

**Solução.** A matriz de transições a um passo é

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Porém

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} & \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{122}{147} & \frac{25}{147} \\ \frac{50}{63} & \frac{13}{63} \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\frac{122}{147} + \frac{25}{147} = 1 \qquad \frac{50}{63} + \frac{13}{63} = 1.$$

$\square$

**Estado inicial.** Para achar a distribuição de probabilidades de estados de uma cadeia de Markov, junto com as probabilidades de transições, que são na realidade as probabilidades condicionais, precisa-se saber as probabilidades não-condicionais do sistema estar em um estado em instante inicial $n = 0$ ou, em outras palavras, precisa-se saber a distribuição da variável $X_0$. Sejam

$$\alpha_i \equiv \mathbb{P}(X_0 = i), \quad i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1.$$

Todas as probabilidades não-condicionais podem ser calculadas condicionando pelo estado inicial:

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \alpha_i.$$

**Exercício 3.** Para a matriz de transições

$$\mathbf{P} = \left| \begin{array}{cc} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{array} \right|$$

calcule a probabilidade de que $X_1 = 0$ sabendo que $X_0$ tem distribuição uniforme.

**Solução.** Sabe-se que $\alpha_0 = \mathbb{P}(X_0 = 0) = \alpha_1 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1/2$ ou em forma vetorial $(\alpha_0, \alpha_1) = (1/2, 1/2)$. A distribuição depois de um passo é

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{P} = (\alpha_0, \alpha_1)\mathbf{P} &= (1/2, 1/2) \left| \begin{array}{cc} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{array} \right| \\ &= \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \\ &= \left( \frac{16}{21}, \ \frac{5}{21} \right). \end{aligned}$$

□

**Exercício 3.** Para a matriz de transições

$$\mathbf{P} = \left| \begin{array}{cc} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{array} \right|$$

calcule a probabilidade de que $X_2 = 0$ sabendo que $X_0$ tem distribuição uniforme.

**Solução.** Sabe-se que $\alpha_0 = \mathbb{P}(X_0 = 0) = \alpha_1 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1/2$ ou em forma vetorial $(\alpha_0, \alpha_1) = (1/2, 1/2)$. A distribuição depois de um passo é

$$\alpha \mathbf{P}^2 = (\alpha_0, \alpha_1)\mathbf{P}^2 = (1/2, 1/2) \begin{pmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}^2$$

$$= (1/2, 1/2) \begin{pmatrix} \frac{122}{147} & \frac{25}{147} \\ \frac{50}{63} & \frac{13}{63} \end{pmatrix} = \left( \frac{358}{441}, \frac{83}{441} \right).$$

$\square$

## Exercício 4.

Imagine seguinte experimento. Temos duas urnas, verde (com 4 bolas verdes e 1 amarela) e amarela (com 2 bolas amarelas e 1 verde). Experimento consiste em retirada sequencial de bolas de urnas com reposição seguindo seguinte regras:

1. para começar retiramos bola da urna verde e registramos o cor dela, denotamos $X_0$; supomos que isso seja retirada com número 0;

2. seja $X_i$ é cor registrada depois da $i$-gésima retirada, então, para registrar a próxima $X_{i+1}$ cor seguimos:

   (a) se $X_i = verde$, então $X_{i+1}$ é cor da bola retirada da urna verde;

   (b) se $X_i = amarelo$, então $X_{i+1}$ é cor da bola retirada da urna amarela.

Descreve a cadeia, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

## Exercício 5.

**3.** A matriz de transição de uma cadeia de Markov com dois estados 1 e 2 é dada pela seguinte matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

A distribuição de estado inicial é definido pelo vetor-linha $\pi_0^T = (0.1, 0.9)$. Achar:

1. matriz de transição para dois passos da cadeia;

2. distribuição de estados em instante $t = 2$;

3. a probabilidade de que em instante $t = 1$ estar em estado 2;

## Exercício 6. Veja exemplo de Video 3.

**4.** Supondo o modelo fora de realidade: depois de fazer seguro de vida um individuo tem a probabilidade de 90% estar vivo no próximo ano.

1. Representa o modelo como uma cadeia de Markov, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

2. Supondo que cada ano individuo paga mil reais de seguro-vida. Achar a média e a variância de montante que a seguradora ganha desse indivíduo.

3. Supondo que em caso da morte a seguradora vai pagar 10 mil reais; achar a média de ganho da seguradora durante a vida desse individuo.

4. Supondo a validade desse modelo para cada individuo, construa a cadeia de Markov que descreve a vida de um casal oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.