Prática 4 - Lei de Indução de Faraday

Nesta prática, vamos estudar campos magnéticos que variam lentamente no tempo. Introduziremos a lei de indução de Faraday e a verificaremos experimentalmente. Introduziremos o conceito de indutância, uma grandeza elétrica que as bobinas apresentam ao serem submetidas a uma corrente que varia no tempo.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento ou componente, o aluno deverá consultar o professor para esclarecimentos.

I - Lei de Indução de Faraday

Uma das descobertas mais importantes do que conhecemos hoje como eletromagnetismo foi feita pelo inglês Michael Faraday em 1831. Quando Faraday aproximou dois circuitos elétricos, percebeu que no momento em que um deles era ligado ou desligado, aparecia por um instante de tempo uma corrente no outro circuito. Percebeu também que o sentido da corrente era diferente se o circuito estava sendo ligado ou desligado.

Para confirmar que era um efeito magnético, ele aproximou um ímã, e também observou o aparecimento de corrente. Essa corrente só se mantinha enquanto o ímã estava em movimento, e tinha sentido contrário dependendo se o ímã se aproximava ou se afastava. Ele também manteve o ímã fixo e movimentou o circuito, obtendo os mesmos resultados.

A conclusão de Faraday é que a variação do fluxo magnético que atravessa o circuito produz uma tensão elétrica, que dá origem à corrente. Na verdade, a própria ideia de fluxo é devida em grande parte a Faraday, que imaginava linhas de campo emanando de cargas elétricas e de magnetos para visualizar os campos elétricos e magnéticos, respectivamente. Essa forma de pensar só seria aceita e usada de forma sistemática pelos cientistas após sua morte, mas sua importância pode ser percebida pelo fato de Maxwell ter dado a seu primeiro artigo, de 1856, o título “*On Faraday’s lines of force*”. Em 1861, o artigo em que Maxwell corrige a lei de Ampère foi chamado de “*On physical lines of force*”.

As linhas de campo dão a direção do campo em cada ponto. O fluxo de campo sobre uma superfície aberta é proporcional ao número de linhas que cruzam essa superfície (contadas como positivas se cruzam em um sentido e negativas se cruzam no sentido oposto). Na notação de cálculo vetorial, o fluxo magnético é definido como:

$$\Phi_S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad [1]$$

O campo magnético é solenoidal, ou seja, as linhas de campo são sempre fechadas. Isso tem duas consequências: o fluxo sobre qualquer superfície fechada é nulo, e o fluxo através de duas superfícies abertas com a mesma fronteira (limitadas pela mesma borda) é igual. Isso permite definir o fluxo através do circuito como sendo o fluxo através de uma superfície qualquer que tenha o circuito como fronteira.

De acordo com a lei de Faraday, a força eletromotriz (fem) induzida sobre o circuito é igual à taxa de variação do fluxo magnético. A forma matemática da lei da indução foi dada em 1845 pelo físico alemão Franz Ernst Neumann:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_s}{dt} \qquad [2]$$

Essa é a lei da indução na forma mais apropriada para se trabalhar com circuitos, pois relaciona parâmetros que podem ser medidos diretamente ou calculados a partir da geometria do circuito.

A fórmula acima só tem sentido se for definido o sentido do fluxo e da corrente induzida sobre o circuito, o que é dado pela regra da mão direita: ao curvar a mão direita no sentido da corrente induzida positiva, o polegar aponta no sentido do fluxo positivo. A figura 1 mostra essa regra sendo aplicada a um circuito quadrado.

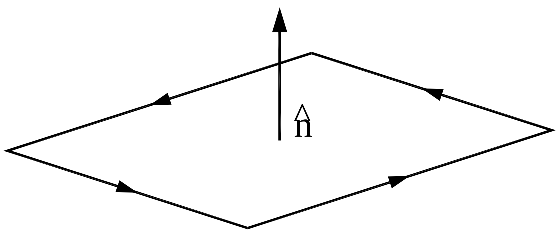

Figura 1 – Sentido da tensão (ou corrente) induzida positiva e do fluxo positivo em um circuito

A força eletromotriz induzida é nada mais do que a integral de linha do campo elétrico sobre o circuito. Logo podemos escrever:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad [3]$$

Essa é a forma integral da lei de indução, expressa em função dos campos, e é uma das equações de Maxwell. Vemos que, se o campo magnético (e portanto o fluxo) estiver variando no tempo, o campo elétrico não é mais conservativo, ou seja, sua integral em um caminho fechado não é mais nula. Assim, não podemos mais pensar em potencial eletrostático, do qual o campo elétrico possa ser obtido fazendo $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

O sinal negativo da lei de indução, que dá o sentido da tensão induzida, é explicado pela chamada *lei de Lenz*, publicada por Heinrich Lenz em 1834 (além da lei que leva seu nome, Lenz também descobriu de forma independente a lei de Joule enquanto trabalhava na Universidade de São Petersburgo. Por esse motivo, na Rússia, essa lei é conhecida como lei de Joule-Lenz). O sinal negativo garante que a fem induzida é no sentido de criar um campo magnético que vai *se opor* à *variação* do fluxo. Em outras palavras, se o fluxo está aumentando, a tensão cria uma corrente que gera um fluxo negativo (na figura 1, isso corresponde a uma corrente no sentido oposto ao mostrado pelas setas).

A lei de Lenz é uma consequência da conservação de energia. Para ver isso, considere uma espira circular e um ímã com seus eixos alinhados, com o polo norte do ímã voltado para a espira, como na figura 2. Se o ímã se aproxima da espira (figura 2a), é induzida uma corrente anti-horária na espira (vista a partir do ímã). Assim, a espira passa a atuar como um eletroímã, com o polo norte voltado para o ímã, e eles se repelem. Caso o ímã esteja se afastando (figura 2b), a corrente seria no sentido horário, o polo sul estaria voltado para o ímã, e a força seria de atração. Em qualquer um dos casos, a força é contrária ao movimento. Se não fosse assim, um pequeno movimento em qualquer sentido geraria uma força no mesmo sentido, e a velocidade (e a energia cinética) iria aumentar indefinidamente, o que não é compatível com a conservação de energia.

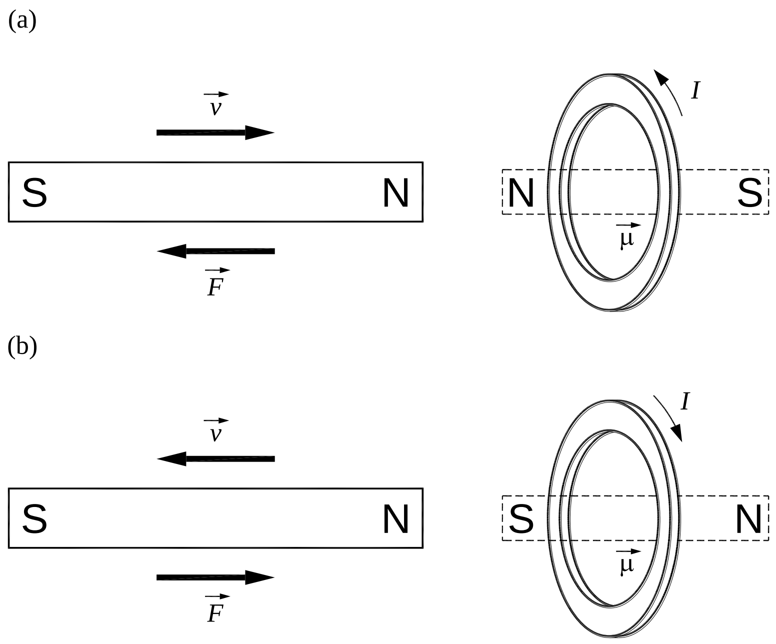

Figura 2 – Lei de Lenz aplicada a um ímã em movimento próximo a uma espira. (a) ímã se aproxima da espira, e é repelido. (b) ímã se afasta da espira, e é atraído.

Devido às contribuições de Neumann e Lenz, a lei da indução pode ser chamada de lei de Faraday, lei de Faraday-Lenz ou lei de Faraday-Neumann-Lenz.

II - Indutância mútua e autoindutância

A corrente em um circuito gera um campo magnético que produz fluxo sobre o próprio circuito; assim, a variação de corrente produz uma tensão no circuito, fenômeno que é conhecido como *autoindução*. O fluxo magnético é proporcional a corrente e a constante de proporcionalidade, que depende da geometria e das propriedades magnéticas do meio, é chamada de indutância (ou autoindutância) do circuito, denotada por L. Essa definição de indutância foi dada por Oliver Heaviside em 1886 (Heaviside foi também o criador dos termos impedância, condutância, permeabilidade e eletreto). De acordo com essa definição:

$$\Phi = LI \qquad [4]$$

A autoindutância de um circuito é sempre positiva. Com esse conceito, podemos reescrever a lei de indução de Faraday para o caso de um circuito fixo:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \qquad [5]$$

Se houver um segundo circuito próximo, a corrente nesse também pode produzir fluxo magnético sobre o primeiro, que é proporcional a corrente no segundo circuito. Dessa maneira, dois circuitos eletricamente isolados podem influenciar um ao outro quando a corrente em um deles estiver variando. Esse fenômeno é conhecido como *indução mútua*.

Os fluxos sobre os circuitos 1 e 2 pode ser escritos como:

$$\Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2 \qquad [6a]$$

$$\Phi_2 = L_{21} I_1 + L_{22} I_2 \qquad [6b]$$

Aqui a indutância mútua L_{12} relaciona o fluxo sobre o circuito 1 provocado pela corrente no circuito 2, e a autoindutância é representada com índices repetidos. Um fato importante, que não poderá ser provado aqui, é:

$$L_{12} = L_{21} \qquad [7]$$

A indutância mútua é o coeficiente de proporcionalidade entre o fluxo em um circuito pela corrente em outro e seu valor pode ser positivo ou negativo. Um valor positivo significa que o aumento da corrente em um circuito provoca um aumento do fluxo no outro circuito, e portanto uma fem induzida que tende a diminuir a sua corrente. Depende, portanto, da definição (arbitrária) do sentido positivo das correntes em cada circuito.

III - Armazenamento de energia em indutores

Quando um circuito é desligado da fonte, sua corrente varia e ele pode induzir uma corrente em um outro circuito próximo. Isso pode parecer a princípio estranho, porque um campo magnético constante não realiza trabalho. No entanto, quando a corrente está aumentando, é necessário compensar a tensão induzida pela variação de corrente, e isso requer energia. É essa energia que fica armazenada (na forma de campo magnético) e pode ser reaproveitada em outro momento.

Vamos considerar um circuito de autoindutância L_1, e vamos elevar sua corrente de 0 a I_1. Sendo a corrente em certo instante dada por i_1, a energia necessária para se chegar à corrente I_1 é dada pela soma dos trabalhos necessários para mover cargas dq contra a fem induzida, desde o início (i_1 = 0) até chegar na corrente I_1:

$$W = -\int e\,dq = \int L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \qquad [8]$$

Essa é a energia armazenada em um circuito devido à autoindutância. De modo análogo, se a corrente i_2 em um circuito próximo estiver variando de 0 a I_2, a energia necessária para manter a corrente no primeiro circuito constante é:

$$W = \int L_{12} I_1 \frac{di_2}{dt} dt = L_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = L_{12} I_1 I_2 \qquad [9]$$

Essa é a energia armazenada nos dois circuitos devido à indutância mútua. Desta forma, quando a corrente no circuito 1 for I_1 e a corrente em 2 for I_2, a energia armazenada nessa configuração é:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 \qquad [10]$$

A energia tem que ser positiva para quaisquer valores de I_1 e I_2, porque, se não fosse assim, haveria uma situação com correntes energeticamente mais favorável do que a situação sem correntes e, portanto, poderiam ser observadas correntes aparecendo espontaneamente. A equação 11 pode ser considerada um polinômio de segundo grau em I_1, e seu determinante deve ser negativo para que a expressão seja sempre positiva:

$$\Delta = (L_{12} - L_1 L_2) I_2^2 \leq 0 \qquad [11]$$

A condição para isso é:

$$|L_{12}| \leq \sqrt{L_1 L_2} \qquad [12]$$

A indutância mútua é sempre menor (em módulo) do que a média geométrica das autoindutâncias. Isso permite definir um parâmetro, denominado acoplamento magnético entre dois circuitos, que varia de 0 a 1:

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad [13]$$

Acoplamento magnético igual a 1 significa que as linhas de fluxo que atravessam um circuito são as mesmas que atravessam o outro. Acoplamento magnético igual a 0 significa que nenhuma linha de fluxo atravessa ambos os circuitos. O acoplamento magnético é uma medida da capacidade de dois circuitos influenciarem magneticamente um ao outro.

IV - Indutância de algumas configurações simples

IV.1 - Solenoide longo

O campo no interior de um solenoide longo, de raio r, número de espiras N e comprimento C, percorrido por corrente I, é:

$$B = \frac{\mu_o NI}{C} \quad [14]$$

Desta forma, o fluxo é dado por:

$$\phi = BNA = \frac{\mu_o N^2 \pi r^2}{C} I \quad [15]$$

E a autoindutância é:

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_o N^2 \pi r^2}{C} \quad [16]$$

IV.2 - Dois solenoides longos coaxiais (indutância mútua)

Vamos considerar dois solenoides coaxiais: o mais interno tem raio r_1 e N_1 voltas; o mais interno tem raio r_2 e N_2 voltas. O comprimento C dos dois é igual. Essa situação está mostrada na figura 3.

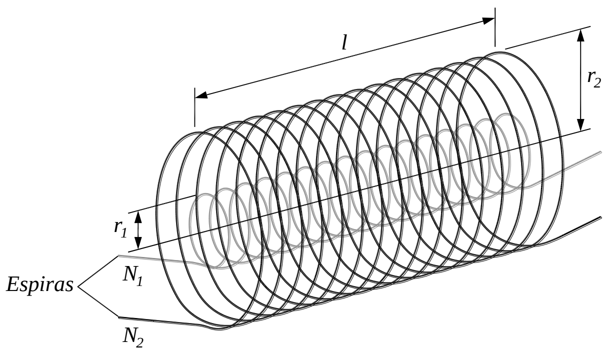

Figura 3 – Dois solenoides coaxiais

Na aproximação de solenoide longo, o campo magnético que o solenoide externo gera na região próxima ao eixo comum é:

$$B_2 = \frac{\mu_o N_2 I_2}{C} \qquad [17]$$

O fluxo sobre o solenoide interno é:

$$\phi_1 = B_2 N_1 A_1 = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{C} I_2 \qquad [18]$$

A indutância mútua é a razão entre o fluxo e a corrente:

$$L_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{C} \qquad [19]$$

Ou seja, a indutância mútua depende apenas de fatores geométricos e das propriedades magnéticas do meio onde os solenoides estão inseridos. Vamos agora calcular a indutância mútua considerando que o campo é gerado pelo solenoide interno e induz corrente no solenoide externo. O campo devido ao solenoide interno é:

$$B_1 = \frac{\mu_o N_1 I_1}{C} \qquad [20]$$

Esse campo está presente apenas na região interna ao solenoide interno, e é nulo fora. O fluxo sobre o solenoide externo é, portanto, proporcional à área do solenoide interno:

$$\phi_2 = B_1 N_2 A_1 = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{C} I_1 \qquad [21]$$

E a indutância mútua é dada por:

$$L_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{C} \qquad [22]$$

Vemos então que $L_{12} = L_{21}$ e de acordo com o que foi dito anteriormente, trata-se de uma relação geral. O acoplamento magnético entre os dois solenoides é:

$$k = \frac{r_1}{r_2} \qquad [23]$$

V - Experimentos

Para quantificar o comportamento instantâneo de tensões, correntes e campos magnéticos que variam no tempo, utilizaremos um osciloscópio. Portanto, preste muita atenção na ligação do osciloscópio para que os cabos "terra" estejam sempre ligados no mesmo ponto do circuito.

V.1 - Medida do campo magnético e autoindução de um solenoide percorrido por uma corrente que varia no tempo

➢Monte um circuito, como o mostrado na figura 4, utilizando um resistor de 10Ω em série com uma bobina solenoidal.

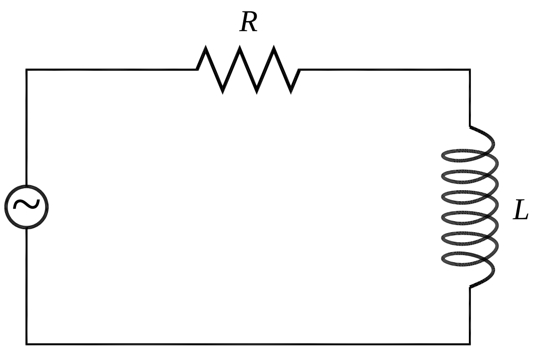

Figura 4 – Circuito para alimentar um indutor com corrente alternada

➢Ajuste o gerador de funções para a máxima tensão (amplitude) e uma onda senoidal com frequência de aproximadamente 1 kHz.

➢Para obter a corrente que percorre a bobina, meça a tensão sobre o resistor (que é proporcional à corrente) no canal 1 do osciloscópio.

➢Conecte a saída da sonda Hall no canal 2 do osciloscópio. Introduza a sonda no centro da bobina maior (como na figura 5). Observe a curva de tensão na sonda Hall (proporcional ao campo magnético no centro da bobina) juntamente com a curva da tensão nos terminais do resistor (ajuste o osciloscópio para visualizar ambos os canais, em modo Alt e canal 2 normal). Compare as curvas da corrente (medida no canal 1 do osciloscópio) e da tensão Hall (medida no canal 2 do osciloscópio) e discuta a relação de fases entre elas. O comportamento observado é o esperado? Explique por que.

➢Utilizando os dados da calibração da sonda Hall, obtenha o campo magnético como função do tempo no interior do solenoide.

➢Faça um esboço do gráfico do campo magnético e da corrente na bobina em papel milimetrado, indicando os parâmetros relevantes (valor de pico, período e fase relativa).

➢Utilizando os parâmetros geométricos da bobina, as característica magnética do meio, e a corrente do circuito, faça um gráfico do campo magnético como função do tempo utilizando a equação para o campo do solenoide finito de comprimento L. Compare essa curva com a curva experimental esboçada no item anterior.

➢Ajuste o canal 1 para medir a tensão nos terminais do solenoide e observe a curva de tensão juntamente com a curva da tensão Hall (canal 2 do osciloscópio). Faça um esquema do campo magnético e da tensão nos terminais do solenoide, indicando os parâmetros relevantes. Compare as curvas da tensão nos terminais do solenoide e da tensão Hall e discuta a relação de fases entre elas. O comportamento observado é o esperado? Explique por que.

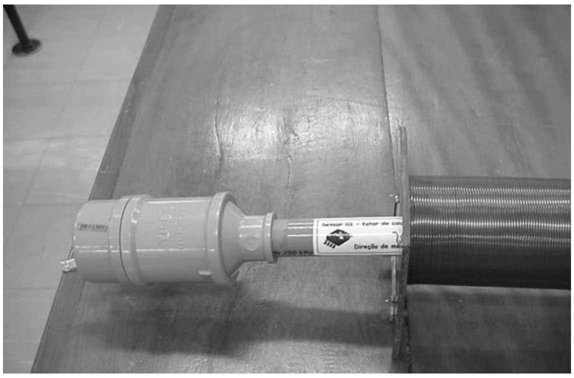

Figura 5 – Configuração para medir o campo magnético no interior de um solenoide

Medida do campo magnético e autoindução de um solenoide percorrido por uma corrente que varia no tempo

Período =	
Corrente (pico-a-pico) =	
Tensão Hall (pico-a-pico) =	
Campo Magnético (pico-a-pico) =	
Fase relativa entre corrente e campo magnético =	
Tensão nos terminais do solenoide (pico-a-pico) =	
Fase relativa entre a tensão nos terminais do solenoide e a corrente =	

V.2 - Caracterização da tensão induzida em uma bobina

➢Na montagem anterior, aplique um sinal de tensão com forma de onda triangular de frequência 100 Hz e utilize a bobina maior como indutor.

➢Conecte a saída da sonda Hall no canal 2 do osciloscópio. Introduza a sonda no centro da bobina maior (como na figura 5). Observe a curva de tensão na sonda Hall (proporcional ao campo magnético no centro da bobina) juntamente com a curva da tensão nos terminais do resistor (ajuste o osciloscópio para visualizar ambos os canais, em modo Alt e canal 2 normal). Compare as curvas da corrente da tensão Hall e discuta a forma das curvas. O comportamento observado é o esperado? Explique por que utilizando as equações pertinentes.

➢Mantendo o circuito anterior, insira a bobina de prova, também solenoidal, no centro da bobina maior, como mostrado na figura 6. O suporte branco serve para garantir que as bobinas ficarão coaxiais.

➢Use o canal 1 do osciloscópio para medir a tensão sobre o resistor e o canal 2 para medir a tensão induzida na bobina de prova. Compare esses sinais. O comportamento observado é o esperado? Explique por que usando as equações pertinentes.

➢Repita os procedimentos anteriores aplicando na bobina maior uma onda quadrada de 100 Hz.

Indutância mútua entre dois solenoides: onda triangular e quadrada no solenoide maior

Forma de onda na bobina maior	Forma de onda na bobina menor
Onda triangular	
Onda quadrada	

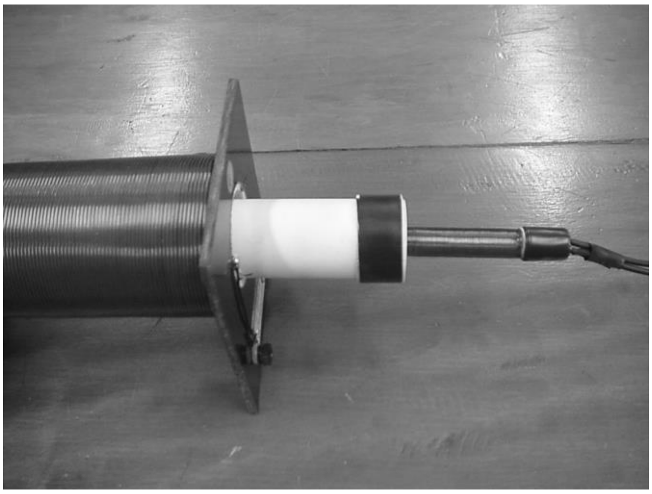

Figura 6 – Bobina de prova sendo colocada no centro da bobina maior.

V.3 - Determinação da indutância mútua entre dois solenoides

Na montagem anterior, aplique um sinal de tensão com forma de onda senoidal de frequência 1 kHz na bobina maior.

➢Use o canal 1 do osciloscópio para medir a tensão sobre o resistor e o canal 2 para medir a tensão induzida na bobina de prova. Compare esses sinais. Compare as formas de onda observadas e discuta a relação de fases entre elas. O comportamento observado é o esperado? Explique por que.

➢Faça um esquema em papel milimetrado das formas de onda das tensões observadas indicando os parâmetros relevantes.

➢Varie a frequência da fonte para 500, 1000, 1500, 2000, 2500 Hz. Para cada frequência meça a amplitude da corrente no solenoide externo (I_0) e a força eletromotriz induzida (ε_0) na bobina de prova. Faça um gráfico de ε_0 como função de ωI_0. Qual deve ser o comportamento da curva segundo a lei de Faraday? Determine a indutância mútua a partir desta curva.

➢Calcule a indutância mútua utilizando a expressão 19. Compare o valor calculado com o valor determinado experimentalmente, discutindo eventuais discordâncias.

Indutância mútua entre dois solenoides: onda senoidal no solenoide maior

Período =	
Corrente =	
Tensão induzida na segunda bobina =	
Indutância mútua =	
Indutância mútua esperada (equação 19) =	