Teoremas de Riesz Fischer e de Lusin - MAT0234
Medida e Integração
Prof. Jorge Adrian Beloqui

1 Teorema de Riesz-Fischer

Veremos algumas definições a partir da observação de que qualquer norma define uma métrica.

Definição 1.1. a) Uma sequência $\{f_n\}$ em L_p é uma **sequência de Cauchy** em L_p se para todo $\varepsilon > 0$ existe $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq M(\varepsilon)$ temos $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$

b) Uma sequência $\{f_n\}$ em L_p **converge para** f **em** L_p se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N(\varepsilon)$ temos $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Neste caso dizemos que $f \to f$ **em média** p.

c) Um espaço normado é **completo** se toda sequência de Cauchy converge a um elemento do espaço. Estes espaços chamam-se **espaços de Banach**.

Note que, se $f_n \to f$ então $\{f_n\}$ é de Cauchy.

Teorema 1. *Se $1 \leq p < +\infty$ então o espaço L_p é completo com a norma $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$*

Demonstração. Seja $\{f_n\}$ de Cauchy para a norma $\|\cdot\|_p$. Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ e consideramos uma subsequência f_{n_k} tal que $\|f_{n_k} - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ para todo $m \geq n_k$. Definimos agora $g_k = f_{n_k}$, ou seja,

$$\|g_k - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k} \tag{A}$$

e $g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|$. Logo g é mensurável e está em M^+. Afirmamos que $g \in L^p$.

Com efeito, pelo Lema de Fatou aplicado às somas parciais:

$$\int \liminf |g|^p d\mu \leq \liminf \int \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|\right)^p d\mu$$

Tomando $\sqrt[p]{\cdot}$ dos dois lados segue que:

$$\|g\|_p \leq \liminf \left(\int \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|\right)^p d\mu\right)^{1/p}$$

Pela desigualdade de Minkowski:

$$\begin{aligned}
\|g\|_p &\leq \liminf \left\{ \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p \right\} \\
&\leq \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \|g_1\|_p + 1
\end{aligned}$$

Logo $g \in L_p$ e $\mu(\{x \mid g(x) = +\infty\}) = 0$. Então g converge a um valor finito em quase todo ponto. Observe que $g \geq 0$. Seja $A = \{x \mid g(x) < +\infty\}$. Agora definimos f (o limite da sequência f_n):

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}(x) - g_k(x)), \text{ se } x \in A \\ 0, \text{ se } x \notin A \end{cases}$$

Note que $|g_k| = |g_1 + (g_2 - g_1) + \cdots + (g_k - g_{k+1})| \leq |g_1| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1} - g_j| \leq g$

Agora, $g_k \to f$ q.t.p. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada $f \in L_p$ porque se $|g_k| \leq g$ e $\lim g_k = f$ então $|f| \leq g$ e assim $\int |f|^p d\mu \ \leq \ \int |g|^p$.

Para mostrar que $\|g_k - f\|_p \to 0$ (ou seja, que $g_k \to f$ na norma de L_p) aplicamos o Teorema da Convergência Dominada à sequência $|g_k - f|^p$ dominada por $2^p g^p$ e assim:

$$\|g_k - f\|_p \to 0 \tag{B}$$

Mostramos assim que uma subsequência de $\{f_n\}$ converge para f. Agora lembramos que $\{f_n\}$ é de Cauchy em L_p e, portanto,

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - g_k\|_p + \|g_k - f\|_p$$

por (A) e (B) temos $\|f_n - f\|_p \to 0$. □

O que acontece com L_∞? Ele é um espaço vetorial com a norma do supremo essencial. A desigualdade triangular verifica-se diretamente: com efeito, se $f,\ g \ \in \ L_\infty$, isto significa que $|f(x)| \ \leq \ ||f||_\infty$ qtp e $|g(x)| \ \leq \ ||g||_\infty$ qtp. Logo $||f \ + \ g||_\infty \ \leq \ ||f||_\infty \ + \ ||g||_\infty$.

Teorema: L_∞ é completo

Demonstração. Se $f_n \ \in \ L_\infty$, for uma sequência de Cauchy em L_∞, isto significa que $f_n(x)$ é de Cauchy qtp. Seja $A \ = \{x \mid f_n(x)\}$ é de Cauchy. Então $\mu(A^c) \ = \ 0$. Definimos f(x), dada pelo limite em cada ponto x de A, e f(x)=0 em A^c.

Vejamos que $||f_n \ - \ f|| \ \to \ 0$. Seja $\varepsilon \ > \ 0$. Consideramos N tal que $||f_n \ - \ f_m|| \ < \ \varepsilon/2 \,\forall\, n,\ m \ > N$. Para cada x $\exists\, n_x \ > \ N \mid |f_{n_x}(x) \ - \ f(x)| \ < \varepsilon/2$. Logo $|f_n(x) \ - \ f(x)| \ < \ |f_n(x) \ - \ f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) \ - \ f(x)| \ < \ \varepsilon$. Assim mostramos que $||f_n \ - \ f|| \ < \ \varepsilon \,\forall\, n \ > \ N$.

Temos que ver agora que $f \ \in \ L_\infty$. Mas isto segue de que $|f(x)| \ < \ ||f_n \ - \ f|| + |f_n(x)| \ < \ ||f_n \ - \ f|| + ||f_n||$.

□

2 Teorema de Lusin

O Teorema de Lusin mostra que para espaços localmente compactos X, as funções contínuas com suporte compacto em $L^p(X)$ são densas ($1 \leq p < +\infty$). Nós consideraremos $X \subset \mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}^n$ entre eles variedades diferenciáveis de dimensão finita. A medidaμ deve ser uma regular e σ-finita.

Daremos algumas definições e demonstraremos somente para $X \subset \mathbb{R}^n$ e μ a medida de Lebesgue.

Definição 2.1. Dado um espaço métrico X, ele se diz **localmente compacto** se todo ponto p tem uma vizinhança de fecho compacto.

Exemplos: $X \subset \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n$

Definição 2.2. Dada uma função contínua $f : X \to \mathbb{F}$ (com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e X um espaço métrico), o **suporte de** f é o conjunto

$$S(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

f é dita de **suporte compacto** se $S(f)$ é compacto.

Exemplo. a) $f_1(x) = \sin(x)\chi_{[0,\pi]}$

b) $f_2(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}$

c) $f_3 = e^x$ não tem suporte compacto.

Definição 2.3. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida onde X é um espaço métrico e $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra dos Borelianos ou seu completamento. Dizemos que μ é **regular** se para todo $A \in \mathcal{A}$:

1. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \text{ é aberto com } A \subset U\}$
2. $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ é compacto com } K \subset A\}$

Como vimos nas aulas de medida exterior, a medida de Lebesgue é uma medida regular. Portanto, também as medidas dadas por $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$ onde $f \in M^+$ são regulares.

Primeiramente, enunciamos o Lema de Urysohn para o caso de um espaço métrico:

Lema 2. *Seja X um espaço métrico, $K \subset X$ compacto e U aberto com $K \subset U$. Então existe $g : X \to [0,1]$ contínua tal que:*

1. $x \in K \Rightarrow g(x) = 1$
2. $x \notin U \Rightarrow g(x) = 0$

Demonstração. Seja $F = U^c$, fechado. Então $g(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F)+d(x,K)}$ é um exemplo das funções que procuramos. Complete os detalhes para ver que g é contínua. □

Começamos aproximando as funções características por uma função contínua de suporte compacto:

Lema 3. ***Lema de Lusin:*** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{A}$ a σ-álgebra dos Borelianos ou seu completamento e μ a medida de Lebesgue. Seja $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < +\infty$, então dado $\varepsilon > 0$ existe g contínua com suporte compacto que verifica:*

1. *$\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq \chi_A(x)\}) < \varepsilon$*
2. *Para todo $x \in X$, $0 \leq g(x) \leq 1$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Seja B(0,n) a bola de centro 0 e raio n. Consideremos $A_n = A \cap B(0,n)$. Existe n_0 tal que $\mu(A_{n_0}) + (\varepsilon/2) > \mu(A)$. Chamemos novamente de A este A_{n_0}. Sejam $K \subset A$ um compacto e $A \subset U$ com U aberto tais que

1. $U \subset B(0, n_0 + 1)$;
2. $\mu(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{4}$;.
3. $\mu(A \setminus K) < \frac{\varepsilon}{4}$

. Isso acontece pela regularidade de μ.
Logo:

$$\mu(U \setminus K) = \mu(U \setminus A) + \mu(A \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomamos agora V aberto com $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$, observamos que:

$$\mu(A) - \frac{\varepsilon}{4} \leq \mu(K) \leq \mu(V) \leq \mu(U) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

Aplicamos então o Lema de Urysohn a K e V, ou seja, existe $g : X \to [0,1]$ com

a. $x \in K \Rightarrow g(x) = 1 = \chi_A(x)$

b. $x \notin V \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = \chi_A(x)$ se $x \notin U$

Assim o suporte $S(g)$ está contido em $\overline{V}$ compacto (porque U limitado) e portanto é compacto.

E obtemos

$$\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq \chi_A(x)\}) \leq \mu(V \setminus K) + \mu(U \setminus V) = \mu(U \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Por último: Voltando à notação inicial, mostramos que $\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq \chi_{A_{n_0}}(x)\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Agora $\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq \chi_A(x)\}); < \mu(\{x \in X \mid g(x) \neq \chi_{A_{n_0}}(x)\}) + \frac{\varepsilon}{2}; \leq \varepsilon$. □

Exercício. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se X for σ-finito então $\mu(p) < \infty \; \forall \; p \in X$.

Exercício. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito onde $\mathcal{A}$ contém os Borelianos e μ é regular. Então:

1. cada ponto $p \in X$ tem uma vizinhança U_x com $\mu(U_x) < \infty$.
2. todo compacto K tem $\mu(K) < \infty$

Exercício. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua com suporte compacto, então $f \in L^p(X)$ para todo $1 \leq p < +\infty$.

Exercício. As funções contínuas com suporte compacto formam um espaço vetorial $\mathcal{C}_c(X)$.

Exercício. Se $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < +\infty$, pelo lema anterior, tomemos $g \in \mathcal{C}_c(X)$ com $\mu(\{g \neq \chi_A\}) < \varepsilon^p$. Mostre que $\|g - \chi_A\|_p < \varepsilon$.

Exercício (da lista)**.** Seja $f \in L^p(X)$, então existe φ simples com $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$. (considere $f = f^+ - f^-$)

Teorema 4 (Teorema de Lusin)**.** *$\mathcal{C}_c(X)$ é denso em $L^P(X)$, com $1 \leq p < +\infty$*

Demonstração. Pelos primeiros dois exercícios, o espaço vetorial $\mathcal{C}_c(X)$ está contido no espaço vetorial $L^p(X)$. Seja Z o fecho de $\mathcal{C}_c(X)$ em $L^p(X)$. Logo Z é um espaço fechado em $L^p(X)$. Pelo lema, Z contém χ_A, com $\mu(A) < \infty$. Como é um espaço vetorial, contém todas as funções simples (chamemos de S o espaço das funções simples). Assim $S \subset Z$, e como $L^p(X)$ é completo, pelo último exercício $L^p(X) \subset Z$. $\square$

Exercício: mostre que as funções degrau são densas em $L^p(X)$