Introdução aos espaços Lp - MAT0234 Medida e Integração
Prof. Jorge Adrian Beloqui

1 Os espaços L_p e l_p

Definição 1.1. Se V é um espaço vetorial real, então uma função $N : V \to \mathbb{R}$ é uma norma em V se:

1. $N(v) \geq 0$ para todo $v \in V$.
2. $N(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$.
3. $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.
4. (Desigualdade triangular) $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ para $v, u \in V$.

Se N não cumprir a propriedade (2) ela chama-se uma **semi-norma**. Um espaço vetorial V com uma norma N chama-se um espaço vetorial **normado**.

Exemplo. 1. O espaço $\mathbb{R}$ com o valor absoluto $|\cdot|$ é um espaço vetorial normado.

2. Em $\mathbb{R}^n$ temos as normas (verificar):
   (a) $N(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} |u_j|$
   (b) $N_p(i_1, \ldots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^p\right)^{1/p}$, com $p \geq 1$.
   (c) $N_\infty(u_1, \ldots, u_n) = \sup_{1 \leq j \leq n}\{|u_j|\}$.
   A norma mais utilizada é
   $$N_2(u_1, \ldots, u_n) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} u_j^2}$$
   . N_2 é a única norma p que vem de um produto interno $<,>$.
   Note que toda norma N induz uma métrica d definida por $d(x, y) = N(x - y)$. Logo todo espaço normado é métrico.

3. Espaços l_p das sequências reais: Para $p \geq 1$, l_p é o espaço das sequências $u = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ com $N_p(u) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^p\right)^{1/p} < \infty$.
   A sequência $u = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$ tem $N_p(u) < \infty$ para todo $p > 1$.

4. Considere $B(X)$ as funções a valores reais limitadas em X. Uma norma em $B(X)$ é $N(f) = \sup_{x \in X}\{|f(x)|\}$

5. Um exemplo de semi-norma: Em $C^1([a, b])$ definimos $N(f) = \sup_{x \in [a,b]}\{|f'(x)|\}$, assim $N(f) = 0 \Leftrightarrow f$ é constante.

Exemplo. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ as funções integráveis. Então $N(f) = \int_X |f| d\mu$ é uma semi-norma ($N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.t.p).

Já vimos que $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço vetorial. N verifica a desigualdade triangular:

$$N(f+g) = \int |f+g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = N(f) + N(g)$$

Vamos agora definir os espaços L_p de classes de funções equivalentes qtp. Dada uma medida, dizemos que $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ q.t.p. Então essa é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de equivalência de f por $[f]$

Definição 1.2. Se $1 \leq p < \infty$ o espaço $L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência de funções reais $[f]$ para as quais $\int |f|^p d\mu < \infty$. E definimos $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Pergunta: quais outros espaços vetoriais de dimensão infinita conhecem?

Veremos mais adiante que $\|\cdot\|_p$ é uma norma (desigualdade de Minkowski).
Em geral trabalharemos identificando a classe de equivalência com alguma função na classe, quando não houver lugar a confusão.
Note que L_p é um espaço vetorial real: Se $f, g \in L_p$ então $f + g \in L_p$. Com efeito:

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \int 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} d\mu \leq 2^p \int |f|^p + |g|^p d\mu < \infty$$

(Mas isto não é a desigualdade triangular!)
L_2 é particularmente importante porque tem o produto interno $< f, g > = \int f(x)\, g(x)\, d\mu$. ISto permite considerar funções ortogonais, etc.

Definição 1.3. $L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ é o espaço das classes de funções essencialmente limitadas. Dizemos que f é **essencialmente limitada** se existe $B \in \mathbb{R}$ com $|f(x)| \leq B$ q.t.p. A norma N_∞ é o supremo essencial de f, dado por:

$$N_\infty(f) = \inf\{B \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq B \text{ q.t.p }\}$$

Exemplo. Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e r_n uma enumeração de $\mathbb{Q}$, considere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ n, & \text{se } x = r_n \end{cases}$$

Então f é ilimitada, mas essencialmente limitada com $N_\infty(f) = 1$.

Observação. Se $0 < p < 1$, então definindo a norma p como acima não verifica a desigualdade triangular.

Exercícios:

1. Mostre que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; \in L^p[0,1]$ somente para $1 \leq p < 2$
2. Mostre que $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}; \in L^p[0,1]$ somente para $1 \leq p < 3$
3. Mostre que $f(x) = \frac{1}{x}; \in L^p[1,\infty]$ somente para $1 < p \leq \infty$
4. Para quais $p \geq 1$ temos que se f, g $\in L^p[0,1]$ então $fg \in L^p[0,1]$? Sugestão: considere $f = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{p+1}}}$.
5. Para quais $\infty \geq p \geq 1$ temos que $(a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in l^p \Rightarrow a_n \to 0$?

1.1 Desigualdade de Hölder

Todos conhecem a relação entre a média aritmética e a média geométrica. Mais ainda, a média geométrica ponderada é menor ou igual que a média aritmética ponderada com os mesmos pesos. A Desigualdade de Hölder é consequência dessa relação.
Enunciemos isto:

Proposição 1. *Sejam* $r_1, r_2 > 0$, $0 \leq t \leq 1$, *então* $r_1^t r_2^{1-t} \leq tr_1 + (1-t)r_2$.

Desigualdade de Hölder: se $p, q \in [1, +\infty]$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $F \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ a valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ temos que:

1. fg é integrável, ou seja, $\int_X |fg| d\mu < \infty$
2. $$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Desigualdade de Hölder nos espaços lp Se $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in lp$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in lq$ então $(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots) \in l_1$.
Exemplo: a sequência $(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots) \in l_3$ e $l_{3/2}$. Então $(1, 1/4, 1/9, \ldots, 1/n^2, \ldots) \in l_1$.

1.2 Desigualdade de Minkowski

Esta desigualdade serve para mostrar que $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ é uma norma, porque verifica a desigualdade triangular.

Teorema 2. *Se* $f, h \in L_p$, *com* $p \geq 1$, *então* $f + h \in L_p$ *e*

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$$