Mercados completos

Mauro Rodrigues (USP)

2020

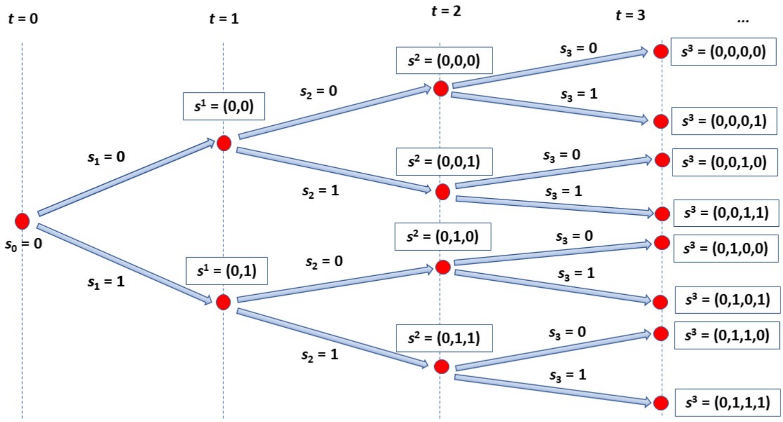
Introdução

- Referência:
  - Ljungqvist and Sargent. *Recursive Macroeconomic Theory*. 2nd edition, chapter 6.
- Economia de dotação, em que agentes tomam decisão de consumo sob incerteza
  - Conjunto de ativos transacionados permite que os agentes reduzam flutuação de consumo
- Mercados completos
  - Há um conjunto suficientemente amplo de ativos, capaz de cobrir todas as contingências
  - Agentes conseguem eliminar todo o risco individual
- Estrutura também permite determinar preço de ativos
- Serve como *benchmark* para outras estruturas de mercado de ativos

Preferências e dotações

- Tempo discreto: $t \in \{0, 1, 2, ...\}$
- Em cada tempo t, um estado estocástico é realizado $s_t \in \boldsymbol{S}$ é realizado
- $s^t = [s_0, s_1, ..., s_t]$ = história de eventos até t
  - $\pi(s^t)$: prob. (não condicional) de que a história s^t seja realizada
  - $\pi(s^t | s^\tau)$: prob. de que a história s^t seja realizada, dado que a história s^τ ocorreu
- Estado inicial $= s_0$
  - $\pi(s_0) = 1$
- Exemplo com dois estados: $s_t \in \boldsymbol{S} = \{0, 1\}$, $s_0 = 0$

Exemplo



$t = 0$
$t = 1$
$t = 2$
$t = 3$
...
$s_0 = 0$
$s_1 = 0$
$s_1 = 1$
$s^1 = (0,0)$
$s^1 = (0,1)$
$s_2 = 0$
$s_2 = 1$
$s_2 = 0$
$s_2 = 1$
$s^2 = (0,0,0)$
$s^2 = (0,0,1)$
$s^2 = (0,1,0)$
$s^2 = (0,1,1)$
$s_3 = 0$
$s_3 = 1$
$s_3 = 0$
$s_3 = 1$
$s_3 = 0$
$s_3 = 1$
$s_3 = 0$
$s_3 = 1$
$s^3 = (0,0,0,0)$
$s^3 = (0,0,0,1)$
$s^3 = (0,0,1,0)$
$s^3 = (0,0,1,1)$
$s^3 = (0,1,0,0)$
$s^3 = (0,1,0,1)$
$s^3 = (0,1,1,0)$
$s^3 = (0,1,1,1)$

Preferências e dotações

- I agentes, $i \in \{1, 2, ..., I\}$
  - $y^i(s^t)$: dotação recebida pelo agente i na história s^t
  - $c^i(s^t)$: consumo do agente i na história s^t
  - $c^i = \{c^i(s^t)\}$: sequência de consumo do agente i

- Preferências (da perspectiva do período $t = 0$)

$$U(c^i) = \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i) \right\}$$

  - $\beta \in (0, 1)$: fator de desconto
  - $u'(c) > 0, u''(c) < 0, u'(0) = \infty$

Preferências e dotações

- Reescrevendo:

$$U(c^i) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \sum_{s^t} u\left(c^i(s^t)\right) \pi\left(s^t\right) \right\} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u\left(c^i(s^t)\right) \pi\left(s^t\right)$$

- Uma alocação é factível se:

$$\sum_{i=1}^{I} c^i(s^t) \leq \sum_{i=1}^{I} y^i(s^t) = Y(s^t), \ \forall t, s^t$$

- Em que $Y(s^t)$ é a dotação agregada

Dois arranjos equivalentes

- **Arrow-Debreu**
  - Mercados abrem somente no período zero
  - Agentes compram/vendem ativos (*contingent claims*) que pagam em cada história s^t
  - **Mercados completos**: há um ativo/mercado para cada história s^t
- **Mercados sequenciais**
  - Mercados abrem em cada período t
  - Agentes compram/vendem ativos contingentes à realização de um estado no período seguinte
- Resolveremos o modelo seguindo o primeiro arranjo

Problema de Pareto

- Resolveremos primeiro o problema do planejador central
- λ_i: peso atribuído pelo planejador central à utilidade do indivíduo i
  - $\sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1$
- Problema do planejador central

$$\max_{\{c^i\}} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i U(c^i) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u\left(c^i(s^t)\right) \pi\left(s^t\right) \right\}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{I} c^i(s^t) \leq \sum_{i=1}^{I} y^i(s^t), \ \forall t, s^t$$

Problema de Pareto

- Lagrangeano:

$$\mathscr{L}^{\mathrm{P}} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \left\{ \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \beta^t u\left(c^i(s^t)\right) \pi\left(s^t\right) + \theta(s^t) \left[\sum_{i=1}^{I} \left(y^i(s^t) - c^i(s^t)\right) \right] \right\}$$

  - $\theta(s^t)$: preço sombra da restrição de recursos do período t, história s^t

- Condição de primeira ordem (com relação a $c^i(s^t)$)

$$\lambda_i \beta^t u'\left(c^i(s^t)\right) \pi\left(s^t\right) = \theta(s^t)$$

Problema de Pareto

- Considere duas histórias s^t e s^h, para o mesmo indivíduo i. Podemos então obter a taxa marginal de substituição entre o consumo nessas duas histórias para i:

$$TMS^i_{s^t,s^h} = \frac{\lambda_i \beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi(s^t)}{\lambda_i \beta^h u'\left(c^i(s^h)\right)\pi(s^h)} = \frac{\theta(s^t)}{\theta(s^h)}$$

- Note que o lado direito não depende de i. Portanto:

$$TMS^i_{s^t,s^h} = TMS^j_{s^t,s^h},\ \forall i,j$$

Problema de Pareto

- Considere agora a mesma história s^t, e dois indivíduos i e j

$$\frac{\lambda_i \beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi(s^t)}{\lambda_j \beta^t u'\left(c^j(s^t)\right)\pi(s^t)} = \frac{\theta(s^t)}{\theta(s^t)}$$

- Logo:

$$\frac{u'\left(c^i(s^t)\right)}{u'\left(c^j(s^t)\right)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i}$$

- Resolvendo para $c^i(s^t)$

$$u'\left(c^i(s^t)\right) = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} u'\left(c^j(s^t)\right)$$

$$c^i(s^t) = u'^{-1}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} u'\left(c^j(s^t)\right)\right)$$

Problema de Pareto

- Somando entre todos os indivíduos $i \in \{1, 2, ..., I\}$

$$\sum_{i=1}^{I} c^i(s^t) = \sum_{i=1}^{I} u'^{-1}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} u'\left(c^j(s^t)\right)\right)$$

- Da restrição de recursos, o lado esquerdo é igual à dotação agregada $Y(s^t)$

- Equação acima permite obter implicitamente $c^j(s^t)$ em termos de $Y(s^t)$ e outros parâmetros constantes
  - Note que $c^j(s^t)$ não depende diretamente da dotação individual $y^j(s^t)$
  - Isso vale para todos os indivíduos dessa economia

Problema de Pareto

- **Resultado:** consumo de cada indivíduo não depende diretamente de sua dotação individual, apenas da dotação agregada
- **Intuição**: indivíduos são avessos ao risco, de modo que é ótimo para o planejador eliminar toda a variação de consumo possível
  - A única parte não diversificável é a da dotação agregada (incerteza agregada)
- **Exemplo:** ausência de incerteza agregada, i.e., $Y(s^t) = Y$
  - Logo $c^i(s^t) = \bar{c}^i$ constante para todo i
  - Nível do consumo é dado pelos pesos de Pareto

$$\frac{u'\left(\bar{c}^i\right)}{u'\left(\bar{c}^j\right)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i}$$

  - Quanto maior λ_j/λ_i,menor $\bar{c}^i/\bar{c}^j$, dado que $u''(c) < 0$

Arrow-Debreu

- Equilíbrio competitivo em que os agentes transacionam ativos contingentes (*contingent claims*) apenas no período zero

- Ativos especificam quantidades a serem entregues em uma dada história s^t

- $q^0(s^t)$: preço de um ativo que entrega 1 unidade de consumo na história s^t
    - Normalize $q^0(s_0) = 1$

- **Mercados completos:** há um ativo para cada história s^t

- Restrição orçamentária do agente i

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q^0(s^t) c^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q^0(s^t) y^i(s^t)$$

Arrow-Debreu

- Problema do agente i

$$\max_{\{c^i\}} U(c^i) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u\left(c^i(s^t)\right) \pi\left(s^t\right)$$

s.t.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q^0(s^t) c^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q^0(s^t) y^i(s^t)$$

- Lagrangeano:

$$\mathscr{L}^i = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u\left(c^i(s^t)\right) \pi\left(s^t\right) + \mu_i \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q^0(s^t) \left[y^i(s^t) - c^i(s^t)\right] \right\}$$

- Condição de primeira ordem (com relação a $c^i(s^t)$)

$$\beta^t u'\left(c^i(s^t)\right) \pi\left(s^t\right) = \mu_i q^0(s^t)$$

Arrow-Debreu

Um **equilíbrio competitivo** é uma sequência de preços $\{q^0(s^t)\}$, e alocações $c^i = \{c^i(s^t)\}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., I\}$, tais que:

1. Dados preços $\{q^0(s^t)\}$, c^i resolve o problema do agente i
2. A alocação é factível, i.e.

$$\sum_{i=1}^{I} c^i(s^t) = \sum_{i=1}^{I} y^i(s^t), \ \forall t, s^t$$

Arrow-Debreu

- De maneira similar ao problema do planejador central, considere duas histórias s^t e s^h, para o mesmo agente i. Utilizando a condição de primeira ordem, podemos então obter a taxa marginal de substituição:

$$TMS^i_{s^t,s^h} = \frac{\beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi(s^t)}{\beta^h u'\left(c^i(s^h)\right)\pi(s^h)} = \frac{\mu_i q^0(s^t)}{\mu_i q^0(s^h)}$$

- Como anteriormente, o lado direito não depende de i. Portanto:

$$TMS^i_{s^t,s^h} = TMS^j_{s^t,s^h},\ \forall i,j$$

  - Aqui o sistema de preços induz os indivíduos a igualarem suas TMS's

- Também é possível mostrar que, com mercados completos, os indivíduos conseguem eliminar o risco individual utilizando os ativos disponíveis

Arrow-Debreu

- Considere a mesma história s^t, e dois indivíduos i e j

$$\frac{\beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi(s^t)}{\beta^t u'\left(c^j(s^t)\right)\pi(s^t)} = \frac{\mu_i q^0(s^t)}{\mu_j q^0(s^t)}$$

- Logo:

$$\frac{u'\left(c^i(s^t)\right)}{u'\left(c^j(s^t)\right)} = \frac{\mu_i}{\mu_j}$$

- Resolvendo para $c^i(s^t)$

$$u'\left(c^i(s^t)\right) = \frac{\mu_i}{\mu_j} u'\left(c^j(s^t)\right)$$

$$c^i(s^t) = u'^{-1}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j} u'\left(c^j(s^t)\right)\right)$$

Arrow-Debreu

- Somando entre todos os indivíduos $i \in \{1, 2, ..., I\}$

$$Y(s^t) = \sum_{i=1}^{I} c^i(s^t) = \sum_{i=1}^{I} u'^{-1}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j} u'\left(c^j(s^t)\right)\right)$$

- Equação acima permite obter implicitamente $c^j(s^t)$ em termos de $Y(s^t)$ e outros parâmetros constantes

- Como na solução do problema do planejador central, consumo de cada agente não depende diretamente de sua dotação, apenas da dotação agregada

- Agentes conseguem eliminar todo o risco individual via mercado

Arrow-Debreu

- Equilíbrio competitivo é **eficiente**

$$\text{Planejador: } \frac{u'\left(c^i(s^t)\right)}{u'\left(c^j(s^t)\right)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i}$$

$$\text{Eq. Competitivo: } \frac{u'\left(c^i(s^t)\right)}{u'\left(c^j(s^t)\right)} = \frac{\mu_i}{\mu_j}$$

- Para uma dada configuração de pesos de Pareto $\lambda_i = 1/\mu_i$, condições marginais são as mesmas
- Alocação é factível nos dois casos
- Nesse caso, preços são iguais aos multiplicadores de Langrange

$$\text{Planejador} : \beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi\left(s^t\right) = \mu_i q^0(s^t)$$
$$\text{Eq. Competitivo} : \lambda_i \beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi\left(s^t\right) = \theta(s^t)$$

- Com $\lambda_i = 1/\mu_i$, segue que:

$$q^0(s^t) = \theta(s^t)$$

Exemplo 1

- Ausência de incerteza agregada, i.e., $Y(s^t) = Y$
  - $c^i(s^t) = \bar{c}^i$ constante para todo i
- Para encontrar nível do consumo, utilize a restrição orçamentária do agente i

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \underbrace{q^0(s^t)}_{=\beta^t u'(\bar{c}^i)\pi(s^t)/\mu_i} \underbrace{c^i(s^t)}_{\bar{c}^i} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \underbrace{q^0(s^t)}_{=\beta^t u'(\bar{c}^i)\pi(s^t)/\mu_i} y^i(s^t)$$

$$\bar{c}^i \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{\sum_{s^t} \pi\left(s^t\right)}_{=1} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t y^i(s^t)\pi\left(s^t\right)$$

- Portanto:

$$\bar{c}^i = (1-\beta)\left[\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t y^i(s^t)\pi\left(s^t\right)\right]$$

Exemplo 2

- Utilidade CRRA: $u(c) = [c^{1-\gamma} - 1]/(1-\gamma)$, $u'(c) = c^{-\gamma}$

$$\frac{u'\left(c^i(s^t)\right)}{u'\left(c^j(s^t)\right)} = \left(\frac{c^i(s^t)}{c^j(s^t)}\right)^{-\gamma} = \frac{\mu_i}{\mu_j}$$

$$c^i(s^t) = \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{-1/\gamma} c^j(s^t)$$

- Agregando:

$$Y(s^t) = \sum_{i=1}^{I} c^i(s^t) = \frac{c^j(s^t)}{\mu_j^{-1/\gamma}} \sum_{i=1}^{I} \mu_i^{-1/\gamma}$$

$$c^j(s^t) = \frac{\mu_j^{-1/\gamma}}{\sum_{i=1}^{I} \mu_i^{-1/\gamma}} Y(s^t)$$

- Consumo de cada agente é uma fração constante da dotação agregada

Precificação de ativos

- A estrutura de ativos cobre todas as contingências
  - Quaisquer outros ativos são redundantes
  - Podem ser construídos (e precificados) a partir dos ativos disponíveis

- Considere um ativo que paga uma sequência de dividendos $\{d(s^t)\}$. Preço do ativo, da perspectiva de $t = 0$:

$$p^0(s_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q^0(s^t) d(s^t)$$

em que:

$$q^0(s^t) = \beta^t u'\left(c^i(s^t)\right) \pi(s^t) / \mu_i$$

Precificação de ativos

- Dada a normalização $q^0(s_0) = 1$, então $\mu_i = u'\left(c^i(s_0)\right)$. Logo:

$$q^0(s^t) = \frac{\beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi(s^t)}{u'\left(c^i(s_0)\right)}$$

- Preço do ativo que paga $\{d(s^t)\}$, da perspectiva de $t = 0$, é então:

$$\begin{aligned} p^0(s_0) &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t}\frac{\beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi(s^t)}{u'\left(c^i(s_0)\right)}d(s^t) \\ &= \mathbb{E}_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\beta^t u'(c_t^i)}{u'(c_0^i)}d_t\right\}\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo 1:

- Ativo que paga 1 unidade de consumo em t, com certeza (e zero nos demais períodos):

$$d(s^t) = \begin{cases} 1, \text{ no período } t \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Preço do ativo (da perspectiva de $t = 0$):

$$\sum_{s^t} q^0(s^t)$$

- Taxa de juros livre de risco (entre 0 e t):

$$\frac{1}{\sum_{s^t} q^0(s^t)} - 1$$

Exemplos

Exemplo 2: Ativo paga $\{d(s^h)\}_{h\geq t}$ apenas se a história s^t é realizada

- $s^h|s^t$: histórias que sucedem s^t
- Preço do ativo, da perspectiva do período zero:

$$p^0(s^t) = \sum_{h\geq t} \sum_{s^h|s^t} q^0(s^h)d(s^h)$$

- Note que:
  - $q^0(s^t)$: preço de uma unidade de consumo em s^t, da perspectiva de 0
  - $q^0(s^h)$: preço de uma unidade de consumo em s^h, da perspectiva de 0

Exemplos

- Portanto, o preço de uma unidade de consumo em s^h, da perspectiva de s^t é:

$$q^t(s^h) = \frac{q^0(s^h)}{q^0(s^t)} = \frac{\beta^h u'\left(c^i(s^h)\right)\pi(s^h)/u'\left(c^i(s_0)\right)}{\beta^t u'\left(c^i(s^t)\right)\pi(s^t)/u'\left(c^i(s_0)\right)}$$
$$= \frac{\beta^{h-t} u'\left(c^i(s^h)\right)}{u'\left(c^i(s^t)\right)}\pi(s^h \middle| s^t)$$

- Assim, preço do ativo da perspectiva de s^t:

$$p^t(s^t) = \sum_{h\geq t}\sum_{s^h|s^t} q^t(s^h)d(s^h)$$
$$= \sum_{h\geq t}\sum_{s^h|s^t} \beta^{h-t}\frac{u'\left(c^i(s^h)\right)}{u'\left(c^i(s^t)\right)}\pi(s^h \middle| s^t)d(s^h)$$
$$= \mathbb{E}_t\left\{\sum_{h\geq t}\frac{\beta^{h-t}u'(c_h^i)}{u'(c_t^i)}d_h\right\}$$

Exemplos

Exemplo 3: Ativo que paga $\{d(s^{t+1})\}$ no período seguinte a t.

- Emula ativos transacionados em uma estrutura de mercados sequenciais
- Preço do ativo em t:

$$p^t(s^t) = \mathbb{E}_t \left\{ \frac{\beta u'(c^i_{t+1})}{u'(c^i_t)} d_{t+1} \right\}$$

em que:

$\dfrac{\beta u'(c^i_{t+1})}{u'(c^i_t)}$: pricing kernel, ou fator de desconto estocástico

Ativo arriscado vs ativo livre de risco

- Considere dois ativos de 1 período, transacionados no período t
  - Ativo sem risco: paga 1 unidade de consumo no período seguinte, independente do estado da natureza
  - Ativo arriscado: paga d_{t+1} no período seguinte, contingente ao estado da natureza
  - Suponha que eles tenham o mesmo dividendo esperado:

$$\mathbb{E}_t \{d_{t+1}\} = 1$$

- Para simplificar, suponha que os agentes são idênticos
- Preço do ativo sem risco em t

$$q_t = \mathbb{E}_t \left\{ \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right\}$$

- Preço do ativo arriscado em t

$$p_t = \mathbb{E}_t \left\{ \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} d_{t+1} \right\}$$

Ativo arriscado vs ativo livre de risco

- Note que, para duas variáveis aleatórias X e Y

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
\mathbb{E}(XY) &= cov(X,Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

- Aplicando na expressão do ativo arriscado:

$$\begin{aligned}
p_t &= \mathbb{E}_t \left\{ \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} d_{t+1} \right\} \\
&= cov_t \left(\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, d_{t+1} \right) + \underbrace{\mathbb{E}_t \left\{ \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right\}}_{=q_t} \underbrace{\mathbb{E}_t \left\{ d_{t+1} \right\}}_{=1}
\end{aligned}$$

Ativo arriscado vs ativo livre de risco

- Portanto:

$$p_t = q_t + cov_t\left(\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, d_{t+1}\right)$$

- Assim:

$$p_t < q_t \text{ se } cov_t\left\{\beta u'(c_{t+1})/u'(c_t), d_{t+1}\right\} < 0$$
$$p_t > q_t \text{ se } cov_t\left\{\beta u'(c_{t+1})/u'(c_t), d_{t+1}\right\} > 0$$

- Nesse último caso, o ativo arriscado tende a pagar mais nos estados em que a utilidade marginal do consumo é mais alta (ou seja, em que o consumo é mais baixo)
  - Ativo arriscado provê mais seguro que o ativo livre de risco