Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 9 - Semana 19/10 – 23/10

Exercício 1. *Determine a expansão em série de Maclaurin de cada uma das seguintes funções (sugestão: toda série de potências que converge a uma função num intervalo centrado em $x = 0$ deve ser a série de Maclaurin dessa função):*

a $\cos\sqrt{x}$

b $\sin x^2$

c $x^2 e^x$

Solução. Vamos determinar a expansão para cada item :

a Na Aula, o prof. Cláudio Possani, mostrou que a Serie de Maclaurim do seno é dada por:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

e além disso a serie converge em toda a reta real. Podemos derivar a série termo a termo, e obtemos

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Assim, substituindo x por $\sqrt{x}$, para $x \geq 0$, na série anterior temos:

$$\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n}}{(2n)!}, \quad \forall\, x \in [0, \infty).$$

b Como $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

c Na aula do professor Cláudio Possani, vimos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo

$$x^2 e^x = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

□

Exercício 2. *Em cada caso estabeleça a série de Taylor no ponto x_0 indicado:*

a $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi/4$

b $f(x) = 1/x$, $x_0 = 2$

c $f(x) = e^x$, $x_0 = -3$

Solução. Vamos estabelecer a série para cada item : Lembre que a série de Taylor de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ no ponto x_0 é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

a

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \sin(x) \\ f^{(1)}(x) &= \cos(x) \\ f^{(2)}(x) &= -\sin(x) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Com isso temos que a série de Taylor de $\sin(x)$ no $x_0 = \frac{\pi}{4}$ é dada por

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \cdots$$

b Mais uma vez, note que f é infinitamente diferenciável em 2:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^{-1} \\ f^{(1)}(x) &= (-1)x^{-2} \\ f^{(2)}(x) &= (-1)^2 2x^{-3} \\ f^{(3)}(x) &= (-1)^3 3! x^{-4} \\ f^{(4)}(x) &= (-1)^4 4! x^{-5} \end{aligned} \tag{2}$$

Vemos então que $f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$, logo os termos da expansão são $\frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ e ficamos com a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$$

c De novo f é infinitamente diferenciável em -3 e $f^{(n)}(x) = e^x$, logo $f^{(n)}(-3)/n! = e^{-3}/n!$. Temos então a série de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-3}}{n!}(x+3)^n$$

□

Exercício 3. *Determine uma série para* $\ln x$ *em potências de* $x - 1$.

Solução. Note que $f'(x) = 1/x$ é o caso do item b, o qual já conhecemos a forma geral da derivada. Temos então que $f^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$. Aplicando em 1 temos $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, …, $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ para $n \geq 1$. A série fica então sendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

□

Exercício 4. *Obtenha o desenvolvimento em série de potências de* $f(x) \doteq \sqrt{1+x}$ *em torno de* $x = 0$ *e indique o raio de convergência.*

Solução. Usando a regra da cadeia, obtemos as primeiras derivadas em torno de 0 como segue:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (1+x)^{1/2} \\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{2}.\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2} \\
f^{(3)}(x) &= (-1)^2\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}(1+x)^{-5/2} \\
f^{(4)}(x) &= (-1)^3\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}(1+x)^{-7/2}
\end{aligned}$$

Logo a série é

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n$$

O raio de convergência é $R = 1$.

□