Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 7 - Semana 05/10 – 09/10

Exercício 1. *Determine um valor aproximado para a soma das séries alternadas abaixo com erro inferior à* $0,01$.

a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

b $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

c $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{2n+1}$

d $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$

Demonstração. Todas as séries satisfazem as duas hipóteses necessárias para a aplicação do critério de Leibniz. Resta encontrarmos n_0 grande o suficiente para $a_{n_0+1} < 0,01$, o que devemos encontrar pois $\lim a_n = 0$.

a Para que $\frac{1}{n^2} = n^{-2} < 10^{-2}$ devemos ter $n^2 > 10^2$, ou $n > 10$. Teremos então $|s_{10} - s| \leq a_{11} < 0,01$.

Com isso temos a soma parcial:

$$s_{10} = \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{(-1)}{100} = 0.81796217561$$

Que oferece a precisão desejada.

b Para que $\frac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-2}$ devemos ter $\sqrt{n} > 10^2$, ou $n > 10^4$. Teremos então $|s_{10^4} - s| \leq a_{10^4+1} < 0,01$.

c Para que $\frac{\sqrt{n}}{2n+1} < 10^{-2}$ devemos ter

$$\begin{aligned}\sqrt{n} < 10^{-2}(2n+1) &\iff 0 < 10^{-4}(4n^2+4n+1) - n \\ &\iff 0 < 4n^2 + (4-10^4)n + 1\end{aligned}$$

Note que $-10^4 < 4-10^4$, então $-10^4 n < (4-10^4)n$, de onde temos que $4n^2 - 10^4 n + 1 < 4n^2 + (4-10^4)n + 1$. Se a parábola minorante for positiva, também será a majorante. Se tivermos então

$$\frac{10^4 + \sqrt{10^8 - 4\cdot 4\cdot 1}}{8} < \frac{10^4 + \sqrt{10^8}}{8} = \frac{10^4}{4} = 2500 < n$$

Acabamos com $|s_{2500} - s| < a_{2501} < 10^{-2}$.

d Para que $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 10^{-2}$, temos $e - 10^{-2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Observe que $e - 10^{-2} = 2,70828...$, assim procuramos um menor racional maior que $e - 10^{-2}$, por exemplo, $2,709$. Basta tomar então $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2,709$ e teremos a desigualdade desejada. Isto deve acontecer pois a_n é crescente e $a_n \to e > 2.709$. Note que:

$a_1 = (1+1)^1 = 2$
$a_2 = (1+\frac{1}{2})^2 = 2,25$
$a_{10} = (1+\frac{1}{10})^{10} = 2,59$

$a_{50} = (1 + \frac{1}{50})^{50} = 2,69$
$a_{100} = (1 + \frac{1}{100})^{100} = 2,704$
$a_{130} = (1 + \frac{1}{130})^{130} = 2,707$
$a_{150} = (1 + \frac{1}{150})^{150} = 2,709$
Assim, para $n \geq 150$, temos que $e - 10^{-2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Então, $|s_{149} - s| < a_{150} < 10^{-2}$

e Para que $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} < 10^{-2}$, devemos ter

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - 1 > 100 &\iff \sqrt{n+1} > 101 \\ &\iff n > 101^2 - 1 = 10200 \end{aligned}$$

Acabamos com $|s_{10200} - s| < a_{10201} < 10^{-2}$.

$\square$