UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

João Silva Rocha

MANAUS
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

João Silva Rocha

ESTUDO DE CONGRUÊNCIA E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R672e

Rocha, João Silva

Estudo de Congruência e Semelhança de Triângulos: Uma Proposta Para o Ensino Básico / João Silva Rocha. 2019

73 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Geometria. 2. Congrência. 3. Semelhança. 4. Ensino de Matemática. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

JOÃO SILVA ROCHA

ESTUDO DE CONGRUÊNCIA E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23 de agosto de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Orientador

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Membro Interno

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

À Deus em primeiro lugar, que em todos os momentos da minha vida, me deu forças pra vencer os meus obstáculos, principalmente neste momento de vitória, a Ele dedico minha vida e tudo que conquistei.

À minha mãe, Olga da Silva Rocha, que sempre esteve ao meu lado cuidando da minha educação escolar e familiar, a ela agradeço imensamente pelo incentivo e a cada passo que dei em favor de ser um cidadão de bem.

À minha querida esposa, Raione Serrão Rocha, aos meus dois amados filhos, Júlia Maria Serrão Rocha e João Miguel Serrão Rocha, pela dedicação, amor e apoio imensurável nessa caminhada, pois sempre estiveram ao meu lado nos momentos mais difíceis compreendendo as minhas ausências e me dando força e encorajamento para concluir mais esta etapa da minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela confiança e dedicação, por toda liberdade no desenvolvimento dessa dissertação e por ter acreditado em meu potencial, obrigado pelos ensinamentos e pelas horas de apoio e disponibilidade.

Aos professores da Universidade Federal do Amazonas (UFAM), que participaram direta ou indiretamente da minha formação acadêmica e as demais instituições envolvidas.(PROFMAT, OBM, IMPA)

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudo durante o período desse curso de mestrado.

RESUMO

Este trabalho tem por propósito estudar a congruência e a semelhança de triângulos como uma proposta o ensino básico, cujo objetivo é especificar esses casos estabelecendo relações para o estudo e egresso ao mestrado profissional, facilitando o processo de ensino-aprendizagem nos níveis fundamentais e médios, por ser um conteúdo importante de matemática, o mesmo é ensinado através de memorização mecânica. Com o auxílio do aplicativo GeoGebra, régua e compasso, ocorrerá uma construção lúdica por meio meio desses instrumentos de aprendizagem, sendo suporte para o o estudo professores e alunos. Pretende-se também desmitificar esse conteúdo que normalmente não é tratado com sutileza e é transmitido ao longo dos anos através de memorização mecânica e visam aprimorar também os estudos e pesquisas posteriores.

Palavras-chave: Geometria, Congruência, Semelhança, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the congruence and similarity of triangles as a basic education proposal, whose objective is to specify these cases establishing relationships for the study and egress to the professional master, facilitating the teaching-learning process at the fundamental and middle levels, Because it is an important math content, it is taught through mechanical memorization. With the help of the application GeoGebra, ruler and compass, there will be a playful construction through these learning tools, being support for the study teachers and students. It is also intended to demystify this content that is not normally treated with subtlety and is transmitted over the years through mechanical memorization and also aims to improve further studies and research.

Keywords: Geometry, Congruence, Resemblance, Mathematics Teaching.

.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\cong$	Congruência.
$\sim$	Semelhança.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta que passa pelos pontos A e B .
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta de origem A e que passa por B.
$\overline{AB}$	Segmento de reta de extremidades AB.
$A\hat{O}B$	Ângulo com o vértice em O de lados OA e OB.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se.
$\Rightarrow$	Então, implica que.
$\square$	Indica o fim de uma demonstração.

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentaremos os casos de congruência e semelhança de triângulos que são estudados no ensino fundamental, médio e superior como uma proposta para o ensino básico, a nossa pesquisa é de caráter bibliográfico e tem como principais referências o livro de Geometria Plana da coleção Fundamentos de Matemática Elementar volume 9, onde seus autores são, Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeu, outro livro utilizado nesta pesquisa foi o de Geometria Euclidiana Plana da coleção do professor de matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) onde João Lucas Marques Barbosa é o autor dessa obra e também foi utilizado o livro Geometria da Coleção PROFMAT (SBM) onde seu autor é Antônio Caminha Muniz Neto. Deste último livro citado vamos fazer uso de conceitos, exemplos e aplicações a partir da construção dos mesmos com régua e compasso, método que não é apresentado para nossos leitores, mas se mostram de grande importância tanto para resolução de problemas aparentemente complicados. A escolha do tema teve como principal objetivo criar um modelo e linguagem que pudesse facilitar a construção lúdica para que o leitor deste trabalho possa compreender os conteúdos aqui estudados. Além disso, queremos contribuir com alunos e professores de todos os níveis e mostrar a importância da congruência e semelhança de triângulos no currículo acadêmico.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro fizemos uma revisão histórica da congruência e semelhança de triângulos, onde destacamos a relação de Euclides e a Geometria Dedutiva, Tales e a Semelhança de Triângulos, Gauss e a congruência com intuito de reiterar a importância que os mesmos tiveram no desdobramento desses conteúdos. No segundo enfatizaremos a definição de congruência de triângulos, teoremas, postulados e destacaremos cada caso de congruência através de exemplos construídos com o auxílio de régua e compasso que posteriormente serão demonstrados, para fixar este conteúdo utilizamos diversas aplicações e listaremos alguns exercícios dos quais uns foram resolvidos e outros deixamos para o leitor solucionar. Já no terceiro capítulo iremos abordar a semelhança de triângulos através da definição, dos casos de semelhança, teoremas, postulados e para uma compreensão mais qualificada construiremos exemplos utilizando com régua e compasso, além de várias aplicações e uma lista de exercícios onde iremos solucionar vários deles alternadamente. E no capítulo quatro finalizaremos este trabalho relacionando diversas questões de avaliações externas, PROFMAT e IME.

Capítulo 1

Revisão Histórica da Congruência e Semelhança

1.1 Um breve relato sobre a História da Matemática

A matemática surgiu da necessidade de resolver situações problemas da época, os povos babilônicos já saberiam resolver equações do segundo grau. Em seguida, em cada época teria acrescentado uma pequena contribuição até que, por volta do século XVI, a álgebra começaria a se desenvolver na Europa, tendo adquirido os contornos definitivos da disciplina que denominamos por este nome. A sistematização da matemática em teoremas e demonstrações teria se iniciado na Grécia antiga. Desde então destaca-se a importância do método lógico-dedutivo, que seria desconhecido de outros povos antigos e relegados por povos medievais e mesmo renascentistas. Esse ideal teria sido retomado nos séculos XVII e XVIII, mas foi recolocado no centro da atividade matemática a partir do século XIX.

Em comparação aos tempos áureos da Grécia, o conhecimento teórico teria começado uma decadência desde a Antiguidade tardia, alcançando seu nível mais baixo na Idade Média, quando a matemática era exercida somente com finalidades práticas. Seu caráter teórico voltaria a ser valorizado com o Renascimento e, apesar de alguns obstáculos, teria triunfado em épocas diferentes, segundo uma narrativa que destaca seu antagonismo em relação ao conhecimento prático. A forma de escrever uma conexão das definições, dos teoremas e das demonstrações é, desde muitos séculos, uma preocupação fundamental da matemática. Porém, não podemos deixar de compreender uma diferença crucial entre a ordem lógica da exposição, a maneira como um texto matemático é organizado para ser apresentado e a ordem da inversão que diz respeito ao modo como os resultados matemáticos se desenvolveram. O filósofo francês Léon Brunschvicg relatava essa diferença e a necessidade de reverter a ordem da exposição, se quisermos entender o sentido amplo das noções matemáticas.

Uma das causas que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Isto é, em vez de partirmos da forma como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas as quais ele responde, apropriamos esse conceito como algo pronto. Provavelmente, quando as pessoas pedem que a matemática se torne mais concreta, não só desejam ver esse conhecimento aplicado as necessidades práticas, mas também querem compreender seus conceitos em relação a algo que lhes dê sentido. E a matemática pode ser ensinada assim, desde que seus conceitos sejam tratados a partir de um contexto, isso não significa precisamente partir de um problema do cotidiano, e sim saber com o que esses conceitos se relacionam, ou seja, como podem ser inseridos em uma rede de relações.

Compreender os problemas que alimentam a matemática de hoje é muito difícel, tendo em vista a sua complexidade e a especificidade da linguagem e do simbolismo por meio do qual se exprimem, mas os conteúdos que ensinamos, desde o ensino fundamental até o superior, já foram desenvolvidos há muitos séculos. Podemos, então, analisar o momento em que os conceitos foram criados e como os resultados, que hoje consideramos clássicos, foram demostrados, contrabalançando a concepção tradicional que se tem da matemática como um saber operacional, técnico ou abstrato, a história da matemática pode perfeitamente tirar do esconderijo os problemas que constituem o campo de experiência do matemático, isto é, o lado concreto do seu fazer, a fim de que possamos entender melhor o sentido dos seus conceitos.

1.2 Euclides e a Geometria Dedutiva

Quando a Grécia foi derrotada na batalha de Queronéia pelas forças do rei Felipe, tornou-se parte do império macedônico no ano 338 a.C. Dois anos depois, com a morte de Felipe, assume o poder seu filho Alexandre, com apenas 20 anos de idade, ele incorporou ao seu império grande parte do mundo civilizado daquela época, dessa forma, a cultura grega adotada pelos macedônios foi estendida para o Oriente antigo. Em sua arrancada expansionista, Alexandre fundou muitas cidades, uma delas em especial, teria um papel extraordinário na história da Matemática, Alexandria no Egito.

Depois da morte de Alexandre, o domínio sobre o Egito passou às mãos de Ptolomeu e seus líderes militares. Uma das primeiras e talvez a mais importante obra de Ptolomeu foi criar em Alexandria, junto ao museu, o primeiro modelo do que viriam a ser as universidades, séculos depois. Nesse centro, intelectuais do mundo inteiro, trabalhando em tempo integral, dedicavam-se às pesquisas e ao ensino às expensas dos cofres do estado. O ponto alto da instalação era uma biblioteca, que chegou a ter, no auge de seu esplendor, próximo de 700 mil rolos de papiro. Muitos grandes matemáticos trabalharam ou se formaram no museu entre eles o primeiro talvez, e um dos mais notáveis, foi Euclides.

Quase nada se sabe sobre a vida de Euclides, salvos algumas poucas informações esparsas. Mesmo sua formação matemática não há nenhuma certeza, é possível que tenha sido feita em Atenas, na Academia de Platão, mas sua presença de espírito talvez possa ser avaliada pela história segundo a qual, há uma indagação de Ptolomeu sobre se não haveria um caminho mais curto para a geometria que o proposto por Euclides e ele respondeu da seguinte forma: "Não há nenhum caminho real na geometria". Embora seja autor de outros trabalhos, a sua fama repousa sobre seus Elementos, o mais antigo texto da matemática grega a chegar completa a nossos dias.

Os Elementos dedicam um bom espaço à teoria dos números, três livros, mas com o enfoque geométrico que permeia toda a obra. Mas, sem dúvida o forte dos Elementos é a geometria, são cinco noções comuns cinco postulados específicos e algumas definições, centenas de teoremas são deduzidos, alguns de grande profundidade. Além de ser o mais antigo texto de matemática na forma axiomático-dedutiva que chegou a nossos dias, nele Euclides foi muito feliz na escolha e no enunciado de seus postulados básicos.

1.3 Tales e a Semelhança de Triângulos

Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar-se a parte final de sua vida ao estudo e algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sua sombra,fato que iremos relatar no próximo parágrafo. De volta a Mileto, ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo.

Conta-se que quando Tales estava em uma visita ao Egito,o Faraó conhecendo a sua fama de grande matemático, pediu a ele que medisse a altura da pirâmide de Queópes sem, no entanto, subir nela. Tales foi até uma das pirâmides, acompanhado de alguns matemáticos egípcios, tomou uma estaca de madeira, marcou na areia o seu comprimento, colocou a estaca na posição vertical e esperou que a sombra da estaca ficasse igual ao seu comprimento. Determinou então que no mesmo instante que mediu a sombra da estaca, a sombra da pirâmide também fosse medida e em seguida somou essa medida com a metade da medida do lado da base da pirâmide, ao final de sua experiencia Tales chegou a medida da altura da pirâmide de Queópes em 140 metros aproximadamente, e hoje sabemos que a sua altura inicial era de 146,60 metros, ou seja, uma diferença muito pequena para o cálculo feito por Tales.

Tales de Mileto além de ter sido um grande e reconhecido matemático no período do século VI a.C.,seus estudos e descobertas no campo da matemática o fizeram ser taxado como pai da geometria descritiva. Depois que Tales conseguiu medir a altura da pirâmide de Queópes, esse procedimento utilizado por ele, é conhecido hoje como o Teorema de Tales, este teorema se dá pela intersecção de retas transversais, onde estas formam seguimentos proporcionais. Tales defendia que a luz proporcionada pelo sol chegava à terra de forma diagonal, isto é, inclinada, foi seguindo essa ideia que ele conseguiu intitular uma situação de proporcionalidade que relaciona as retas paralelas e as transversais.

1.4 Gauss e a Congruência

Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, de família humilde mas com o incentivo de sua mãe obteve brilhantismo em sua carreira. estudando em sua cidade natal, certo dia quando o professor mandou que os alunos somassem os números de 1 a 100, imediatamente Gauss achou a resposta no valor de 5050 aparentemente sem cálculos.Supõe-se que já aí houvesse descoberto a fórmula de uma soma de uma progressão aritmética.

Gauss foi para Gõttingen sempre contando com o auxílio financeiro do duque de Brunswick, decidindo-se pela matemática em 30 de março de 1796, quando se tornou o primeiro a construir um polígono regular de dezessete lados somente com o auxílio de régua e compasso. Gauss doutourou-se em 1798, na Universidade de Helmstädt e sua tese foi a demonstração do "Teorema fundamental da Álgebra", provando que toda equação polinomial $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz real ou imaginária e para isso baseou-se em considerações geométricas. Deve-se a Gauss a representação gráfica dos números complexos pensando nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano.

Ele foi o grande introdutor da congruência, pois começou a mostrar ao mundo a congruência a partir de um trabalho realizado em 1801, Disquisitiones Arithmeticae, quando tinha apenas 24 anos de idade. Várias ideias usadas na teoria dos números foram introduzidas neste trabalho, até mesmo o símbolo usado na congruência atualmente foi o que Gauss utilizou naquela época.

Suas Pesquisas matemáticas continuaram em teoria das funções e Geometria aplicada a teoria de Newton, Em Geodésia inventou o helitropo, aparelho que transmite sinais por meio de luz refletida e em Eletromagnetismo inventou o magnetômetro bifiliar e o telégrafo elétrico. Sua única ambição era o progresso da matemática pelo que lutou até o momento em que se conscientizou do fim por sofrer de dilatação cardíaca, Gauss morreu aos 78 anos e é considerado o "príncipe da Matemática".

Capítulo 2

Congruência de Triângulos

Este capítulo é dedicado ao estudo de condições necessárias e suficientes para que dois triângulos possam ser considerados iguais, ou seja, congruentes num sentido a ser exigido. Discutimos ainda, várias consequências interessantes através de axiomas, postulados e teoremas, com o objetivo de facilitar o entendimento deste estudo e para que o leitor possa compreender melhor, utilizaremos figuras pra que o mesmo possa visualizar os assuntos aqui relatados e demonstrados, utilizaremos exemplos construídos com régua e compasso, o primeiro exemplo iniciaremos a seguir.

Exemplo 2.1. *Construa com régua e compasso um triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lados iguais a l, como mostra a Figura 2.1.*

Descrição dos passos

1. Marque no plano um ponto arbitrário A e um segmento de medida igual a l, com uma de suas extremidades em A;
2. Com a abertura do compasso igual a l, centre-o em A e construa a circunferência de centro A e raio l;
3. Marque um ponto arbitrário B sobre tal circunferência;
4. Com a abertura do compasso igual a l, centre-o em B e construa a circunferência de centro em B e raio l;
5. Denotando por C uma qualquer das interseções das duas circunferências traçadas, construiremos um triângulo $\triangle ABC$, equilátero de lado l.

Observação 2.1. *No* **exemplo 2.1**, *foi construído um triângulo tendo certas propriedades pré estabelecidas (ser equilátero, com comprimento dos lados conhecidos).*

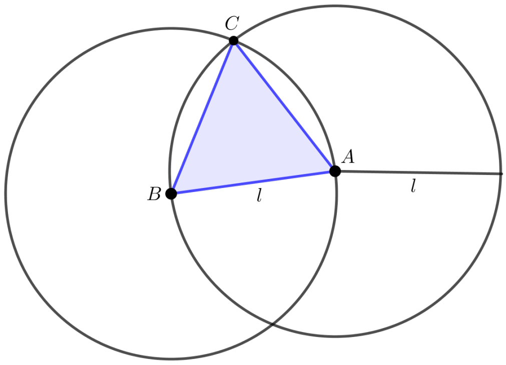

Figura 2.1: Construção de um triângulo equilátero com régua e compasso.

Ao resolvê-lo, aceitamos implicitamente o fato de que só havia, essencialmente, um triângulo satisfazendo as propriedades pedidas, de outra forma, qualquer outro triângulo que tivéssemos construído deveria ser qualificado como igual ao triângulo construído, uma vez que só diferiria desse por sua posição no plano.

A discussão acima motiva a noção de *igualdade* para triângulos, a qual recebe o nome especial de *congruência*, dizemos que dois triângulos que são *congruentes* se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.

Assim se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ forem congruentes, deve existir uma correspondência entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como o sejam os lados opostos a vértices correspondentes.

A congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

Agora vamos destacar essas propriedade individualmente para que o leitor possa refletir sobre elas.

Propriedade 2.1. *Reflexiva: todo triângulo é congruente a si próprio*

Propriedade 2.2. *Simétrica: tanto faz afirmarmos que um triângulo ABC é congruente a um triângulo DEF, quanto que DEF é congruente a ABC, ou mesmo que ABC e DEF são congruentes. Isso porque, se pudermos mover o triângulo ABC, sem deformá-lo, até fazer com que ele coincida com o triângulo DEF, então certamente podemos fazer o movimento contrário com o triângulo DEF, até superpô-lo ao triângulo ABC.*

Propriedade 2.3. *Transitiva: Se o triângulo ABC for congruente ao triângulo DEF e o triângulo DEF for congruente ao triângulo DHI, então o triângulo ABC será congruente ao triângulo DHI. Isso porque podemos mover o triângulo ABC até coincidir com o triângulo GHI por partes, primeiro movemos o triângulo ABC até que ele coincida com o triângulo DEF e, então, continuamos a movê-lo ate que ele coincida com o triângulo GHI.*

Definição 2.1. *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ na Figura 2.2.

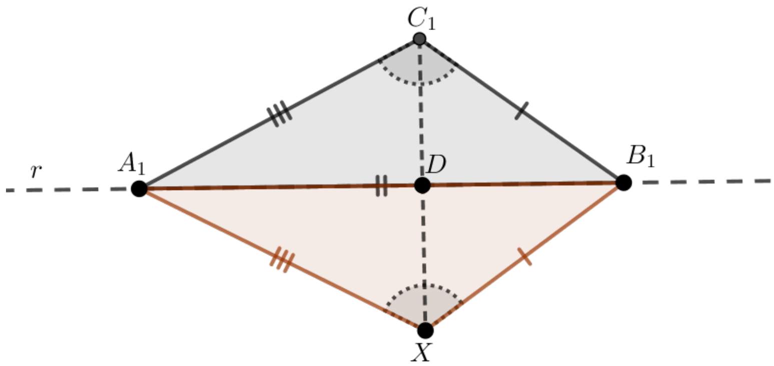

Figura 2.2: Dois triângulos congruentes

O triângulo $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, se e somente se,

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E}, \hat{C} \cong \hat{F}.$$

2.1 Primeiro Caso: Lado Ângulo Lado (LAL)

Para motivar nosso primeiro caso de congruência de triângulo, considere a seguinte construção do exemplo a seguir.

Exemplo 2.2. *Construa com régua e compasso o triângulo $\triangle ABC$, conhecidos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\hat{C} = \gamma$, como mostra a Figura 2.3.*

Descrição dos passos

1. Marque um ponto C no plano e, em seguida, trace uma semirreta $\overrightarrow{CX}$ de origem C;
2. Transporte o ângulo dado para um ângulo $X\hat{C}Y = \gamma$, de vértice C, determinando a semirreta $\overrightarrow{CY}$ de origem C;
3. Sobre as semirretas $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{CY}$ marque, respectivamente, os pontos A e B tais que $\overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b$.

Analisando os passos da construção acima notamos que, escolhendo outra posição para o vértice C e outra direção para os lados do ângulo $X\hat{C}Y$, a construção do triângulo $\triangle ABC$ continuaria determinada pelos dados do exemplo e obteríamos um triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ que, intuitivamente, gostaríamos de qualificar como congruente ao triângulo inicial. O que se refere o caso LAL.

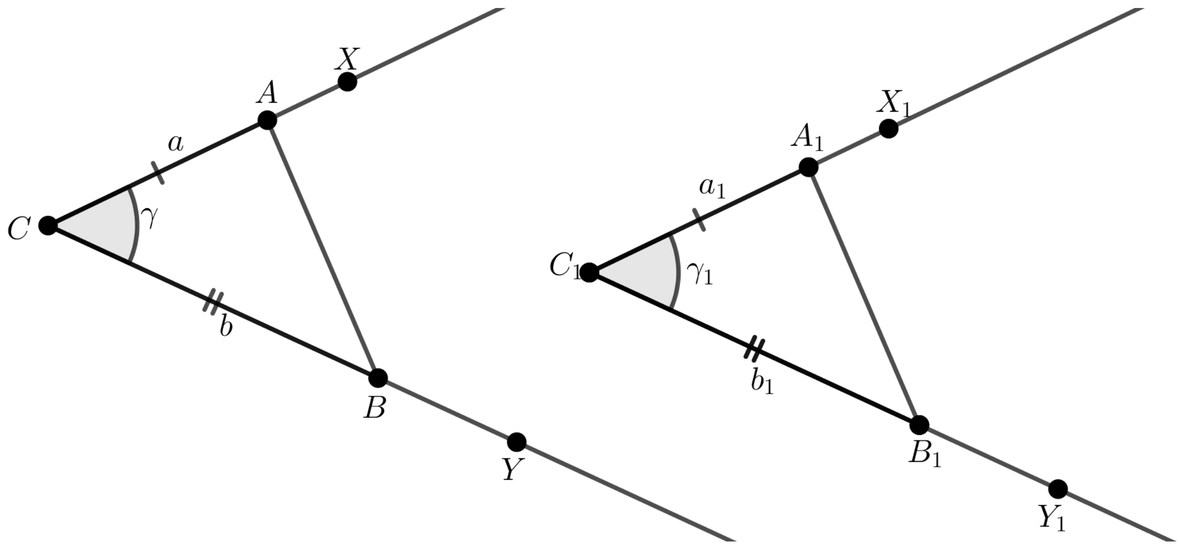

Figura 2.3: Construção do caso LAL de congruência de triângulo

Proposição 2.1. *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses lados, então eles são congruentes, veja a Figura 2.4.*

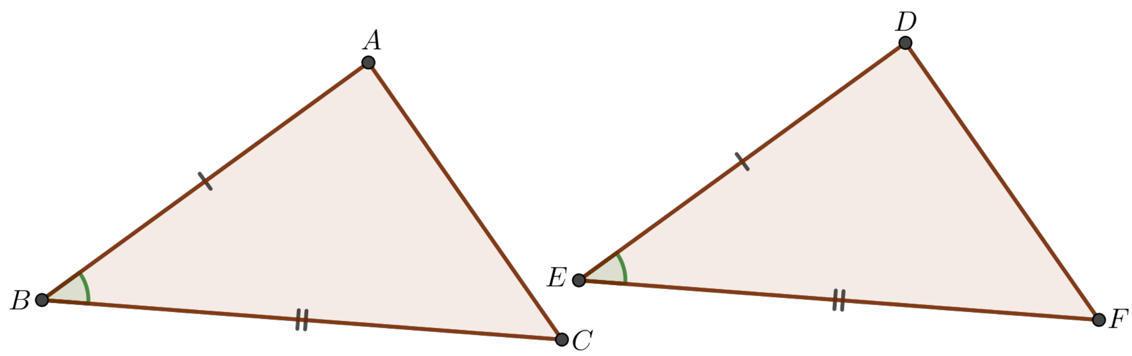

Figura 2.4: Dois triângulos congruentes, axioma LAL

Esta proposição é um postulado e indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre estes lados, então o lado restante e os outros dois ângulos restantes, também são ordenadamente congruentes.

Esquema do primeiro caso

Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ordenadamente, então o triângulo $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Então, $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$.

Teorema do Triângulo Isósceles

Teorema 2.1. *Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados também são congruentes.*

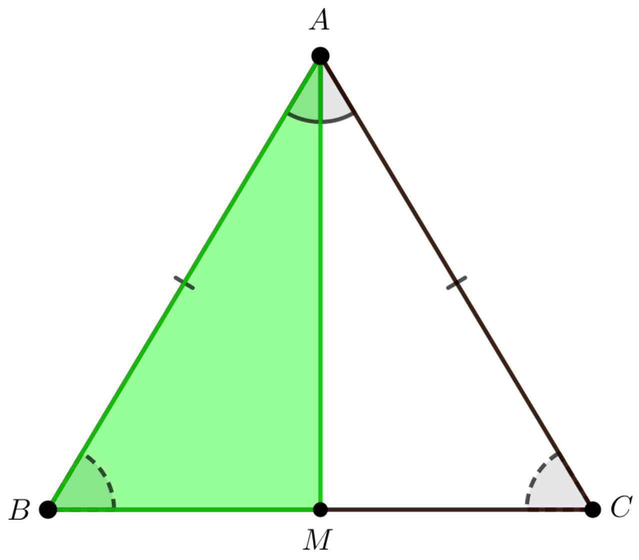

Figura 2.5: Teorema do Triangulo Isósceles

Demonstração:

Para começar esta demonstração destacaremos inicialmente a hipótese e a tese do teorema.

Hipótese: O lado $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Tese: O ângulo $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Seja o triângulo $\triangle ABC$ Isósceles, representado na Figura 2.5.

Construa uma bissetriz no ângulo $B\hat{A}C$, que intercepta o lado $\overline{BC}$ no ponto M, representado na Figura 2.5.

Considere os triângulos $\triangle AMB$, e $\triangle AMC$, representado na Figura 2.5.

(L): Por hipótese os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes, ou seja, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

(A): Por construção os ângulos, $B\hat{A}M$ e $M\hat{A}C$, são congruentes, isto é, $B\hat{A}M \cong M\hat{A}C$.

(L): Por construção o lado $\overline{AM}$ é comum aos triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle AMC$.

Assim pelo caso LAL, os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle AMC$, são congruentes, ou seja, $\triangle AMB \cong \triangle AMC$, em particular, $A\hat{B}M \cong A\hat{C}M$.

Como $A\hat{B}M \cong \hat{B}$ e $A\hat{C}M \cong \hat{C}$;

Logo, $\hat{B} \cong \hat{C}$. $\square$ ∎

2.2 Segundo Caso: Ângulo Lado Ângulo (ALA)

Exemplo 2.3. *Construa com régua e compasso o triângulo, $\triangle ABC$, conhecidos $\overline{BC} = a$, $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \gamma$, como mostra a Figura 2.6.*

Descrição dos passos*:*

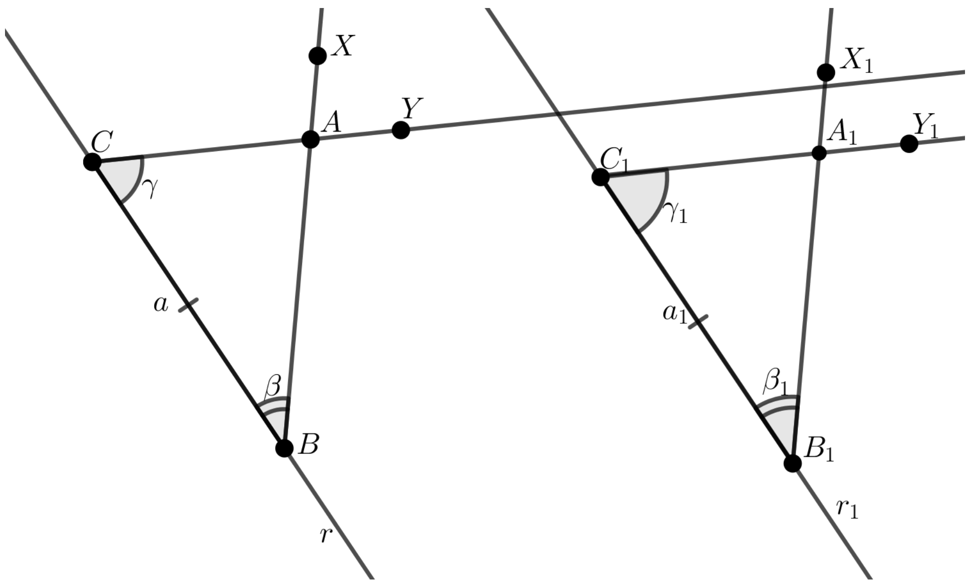

Figura 2.6: Construção de triângulos congruentes com o auxílio de régua e compasso, caso ALA

1. *Trace uma reta r e, sobre a mesma, marque postos B e C tais que $\overline{BC} = a$;*
2. *Construa uma semirreta $\overline{BX}$ tal que $C\hat{B}X = \beta$;*
3. *No semiplano determinado por r e X construa a semirreta $\overrightarrow{CY}$ tal que $B\hat{C}Y = \gamma$;*
4. *Marque o ponto A como intersecção das semirretas $\overrightarrow{BX}$ e $\overrightarrow{CY}$.*

Aqui novamente analisando os passos da construção descrita acima, notamos que, escolhendo para o lado $\overline{BC}$ e mantendo $\overline{BC} = a$, a construção do triângulo $\triangle ABC$ continuaria determinada pelas medidas impostas aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, de modo que obteríamos um triângulo que gostaríamos de qualificar como congruente ao triângulo inicial. Essa discussão motiva o nosso segundo caso de congruência, o caso ALA.

Proposição 2.2. *Se dois triângulos têm ordenadamente congruente um lado e os ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes, observe a Figura 2.7.*

Os ângulos adjacentes ao lado $\overline{BC}$ são $\hat{B}$ e $\hat{C}$, os adjacentes ao lado $\overline{B_1C_1}$ são $\hat{B}_1$ e $\hat{C}_1$. Para demonstrarmos o axioma ALA vamos inicialmente destacar dois itens:

1. *Congruência de segmentos: A congruência de segmentos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:*
   (a) *Reflexiva: Todo segmento é congruente a si mesmo, isto é, $\overline{AB} \cong \overline{BA}$;*
   (b) *Simétrica: Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, então $\overline{CD} \cong \overline{AB}$;*
   (c) *Transitiva: Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.*

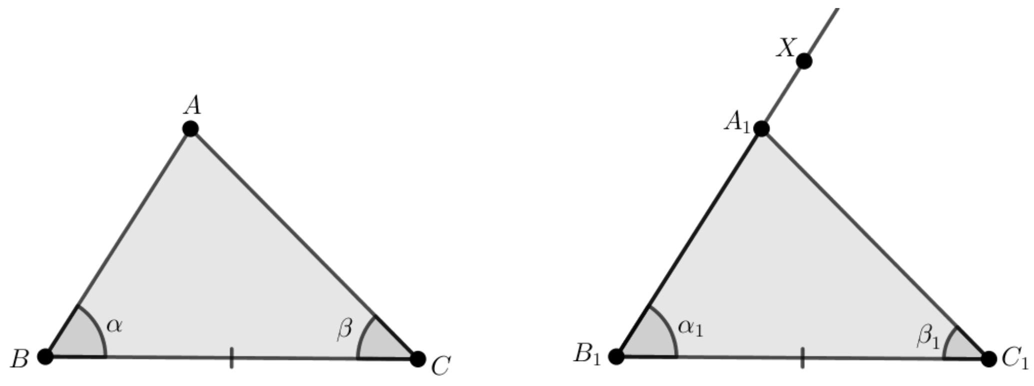

Figura 2.7: Triângulos congruentes, caso ALA

1. *Congruência entre ângulos: A congruência entre ângulos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:*

   (a) *Reflexiva: Todo ângulo é congruente a si mesmo, ou seja,* $A\hat{B}C \cong C\hat{B}A$*;*

   (b) *Simétrica: Se* $A\hat{B}C \cong C\hat{D}E$*, então* $C\hat{D}E \cong A\hat{B}C$*;*

   (c) *Transitiva: Se* $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$ *e* $D\hat{F}E \cong G\hat{H}I$*, então* $A\hat{B}C \cong G\hat{H}I$*.*

Demonstração: *Vamos iniciar a demonstração destacando a hipótese e a tese do caso LAL.*

Hipótese:
O Ângulo $\hat{B} \cong \hat{B}_1$*(1);*
O lado $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$*(2);*
O Ângulo $\hat{C} \cong \hat{C}_1$*(3).*

Tese:
O triângulo $\triangle ABC \cong \triangle ABC$*.*

Vamos provar que $\overline{BA} \cong \overline{B_1A_1}$*, pois com isso recairemos no primeiro caso.*

Pelo postulado do transporte de segmentos, mencionado acima no primeiro item, obtemos na semirreta $\overrightarrow{B_1A_1}$ *um ponto* X *tal que* $\overline{B_1X} \cong \overline{BA}$*.(4)*

Da hipótese (2), temos que, $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$*;(L)*

Da hipótese (1), têm-se, $\hat{B} \cong \hat{B}_1$*;(A)*

De (4) temos que, $\overline{BA} \cong \overline{B_1X}$*;(L)*

Logo pelo caso (LAL) $\triangle ABC \cong \triangle XB_1C_1 \Rightarrow B\hat{C}A \cong B_1\hat{C}_1X$*.(5)*

Da hipótese (3) têm-se $B\hat{C}A \cong B_1\hat{C}_1A_1$*, com (5) temos que* $B\hat{C}A \cong B_1\hat{C}_1X$ *e com o postulado do transporte de segmentos, mencionado anteriormente no segundo ítem, decorre que* $\overline{B_1C_1}$ *e* $\overline{C_1X} = \overline{C_1A_1}$ *interceptam-se num único ponto* $X = A_1$*.*

De $X = A$*, com (4), decorre que* $\overline{B_1A_1} \cong \overline{BA}$*.*

Então: (L) $\overline{BA} \cong \overline{B_1A_1}$*;*

(A) $\hat{B} \cong \hat{B}_1$;
(L) $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$.
Assim pelo caso (LAL) os triângulos $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. ■

Esquema do caso (ALA), veja figura *2.8.*

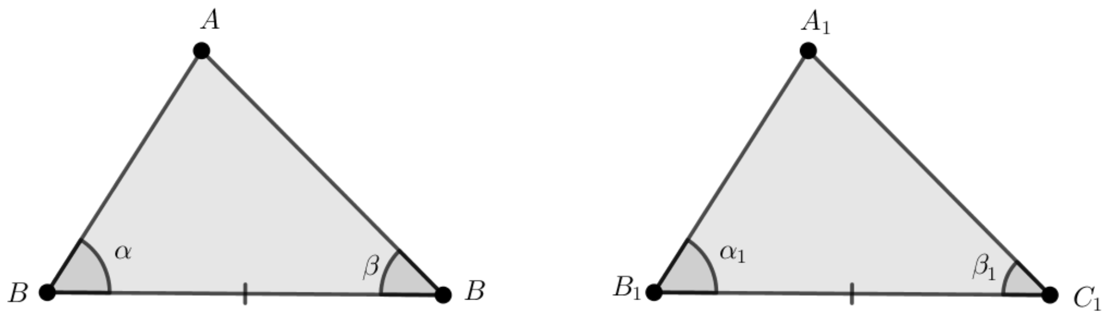

Figura 2.8: Esquema do caso ALA

- *(A)* $\hat{B} \cong \hat{B}_1$;
- *(L)* $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$;
- *(A)* $\hat{C} \cong \hat{C}_1$.

Então pelo caso (ALA): $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Portanto:

- $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$;
- $\hat{A} \cong \hat{A}_1$;
- $\overline{AC} \cong \overline{A_1C_1}$.

Observação 2.2. *Com base no segundo caso (ALA) pode-se provar a recíproca do teorema do triângulo isósceles:* **Se um triangulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles**.

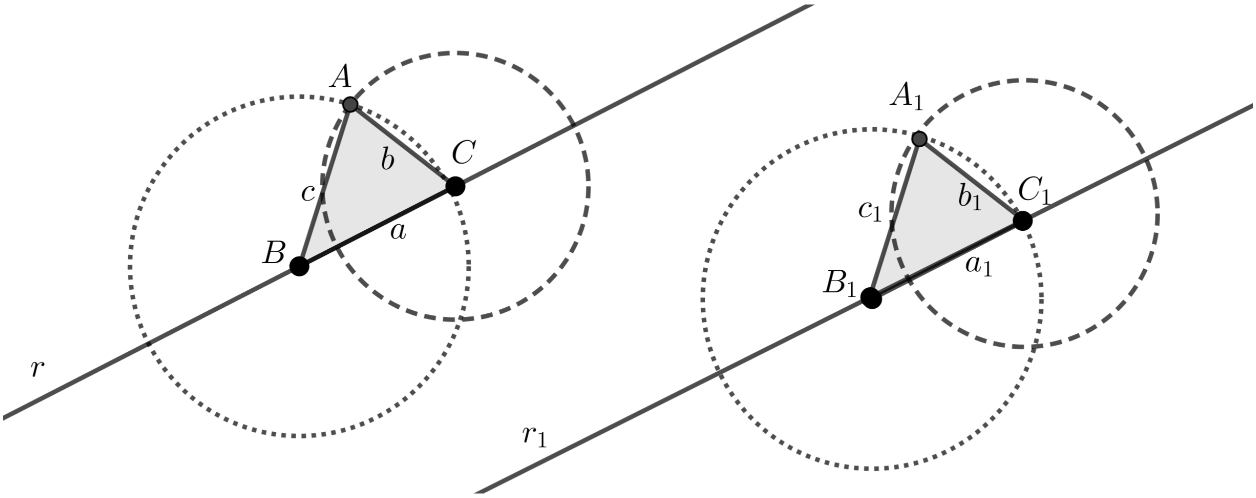

Figura 2.9: Construção com auxílio de régua e compasso, caso LLL

2.3 Terceiro Caso: Lado Lado Lado (LLL)

Exemplo 2.4. *Construa com régua e compasso o triângulo, $\triangle ABC$, conhecidos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = c$ e $\overline{BC} = a$, de acordo com a figura 2.9.*

Descrição dos passos

1. *Trace uma reta r e, sobre a mesma, marque os pontos B e C tais que $\overline{BC} = a$;*
2. *Trace os círculos de centro em B e raio c e de centro C e raio b;*
3. *Marque o ponto A como um dos pontos de intersecção dos círculos traçados no item anterior.*

Uma vez mais, os passos da construção evidenciam que, com outro posicionamento inicial para o lado $\overline{BC}$ mantida a condição de que $\overline{BC} = a$, obteríamos um triangulo que gostaríamos de qualificar como congruente ao triângulo inicial. Isto motiva, então, nosso terceiro caso de congruência, o caso (LLL), enunciado a seguir.

Axioma 2.1. *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes, de acordo com a Figura 2.10.*

Demonstração:

Vamos inicialmente destacar a hipótese e a tese do axioma LLL.

Hipótese:
O lado $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$;(1)

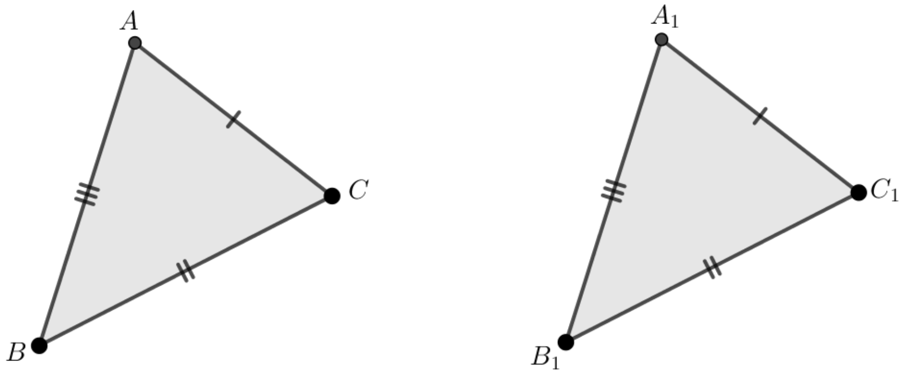

Figura 2.10: Triângulos congruentes, axioma LLL

O lado $\overline{AC} \cong \overline{A_1C_1}$*;(2)*
O lado $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$*.(3)*

Tese: *O triângulo* $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Pelo postulado do transporte de ângulos, e do transporte de segmentos, obtemos um ponto X *tal que:*

O ângulo $X\hat{A_1}B_1 \cong C\hat{A}B$*.(4) O lado* $\overline{A_1X} \cong \overline{AC}$*.(5)*

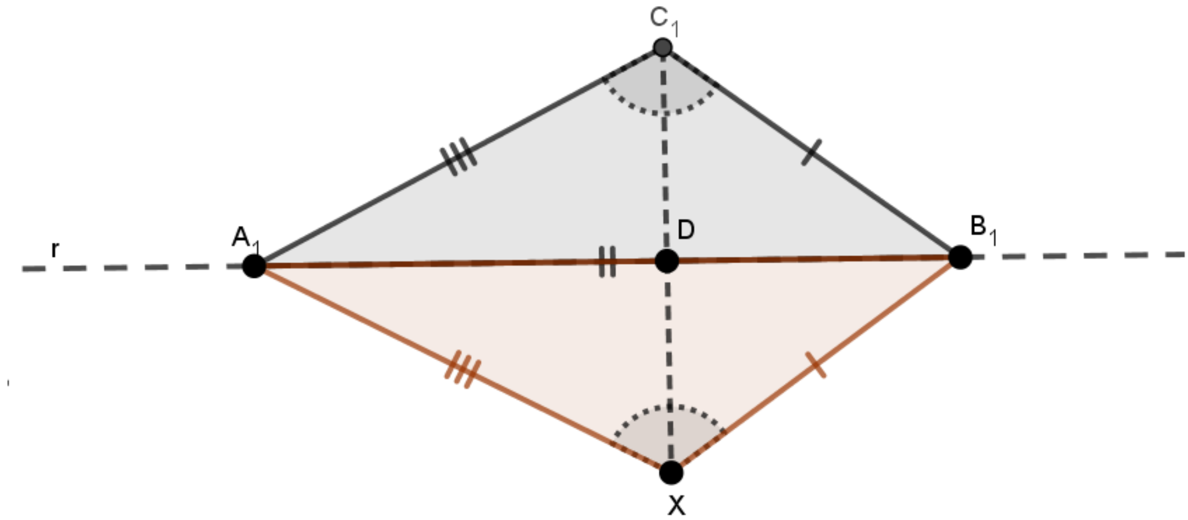

Figura 2.11: Demonstração do caso LLL

Estando X *no semiplano oposto ao de* C_1 *em relação à reta* r *que passa pelos pontos* A_1 *e* B_1.

De (5) e (2) temos que $\overline{A_1X} \cong \overline{A_1C_1}$*.(6)*

Seja D *o ponto de intersecção de* $\overline{C_1X}$ *com a reta* r.

De (1), (4) e (5), têm-se o caso LAL, então, o triângulo $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1X$*.(7)*

Isso implica que o lado $\overline{XB_1} \cong \overline{CB}$ *e por (3) temos que o lado* $\overline{XB_1} \cong \overline{C_1B_1}$*.(8)*

Por (6) temos que o triângulo $\triangle A_1C_1X$ *é isósceles de base* $\overline{C_1X}$*, o que implica em,* $A_1\hat{C}_1X$ $\cong A_1\hat{X}C_1$*.(9)*

Por (8) temos que o triângulo $\triangle B_1C_1X$ *é isósceles de base* $\overline{C_1X}$*, o que implica em,* $B_1\hat{C}_1X$ $\cong B_1\hat{X}C_1$*.(10)*

Por soma ou diferença de (9) e (10), conforme D *seja interno ou não ao segmento* $\overline{A_1B_1}$*, obtemos, o ângulo* $A_1\hat{B}_1C_1 \cong A_1\hat{X}B_1$*.(11)*

De (1), (11) e (8), temos que o triângulo $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1B_1X$ *e por (7), concluímos que o triângulo* $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$*.* ■

Vale observar que os casos de congruência ALA e LLL decorrem do caso LAL no seguinte sentido: dados no plano dois triângulos quaisquer, pode ser mostrado que a validade de um qualquer dos conjuntos de condições ALA ou LLL para os os mesmos acarreta a validade de uma condição do tipo LAL. Porém, como tais deduções não implicariam em ganho substancial para o propósito deste capítulo, não as apresentaremos aqui. Por fim, observamos que, uma vez estabelecida a congruência de dois triângulos, sempre que não houver perigo de confusão omitiremos a correspondência entre seus vértices. Essa praxe será utilizada várias vezes no restante deste capítulo, de maneira que estimule o leitor, em cada uma de tais oportunidades, a checar com cuidado a correspondência apropriada entre os vértices envolvidos, para o bem da compreensão de congruência de triângulos.

Teorema do Ângulo Externo

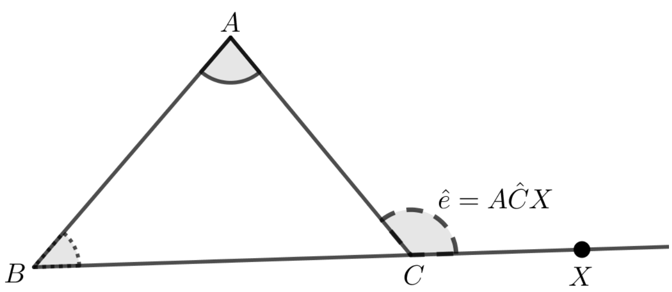

Figura 2.12: Teorema do ângulo externo

Dado um triângulo $\triangle ABC$ *e sendo* $\overrightarrow{CX}$ *a semirreta oposta à semirreta* $\overrightarrow{CB}$*, o angulo* $A\hat{C}X$ $= \hat{e}$ *é o ângulo externo do triângulo* $\triangle ABC$ *adjacente a* $\hat{C}$ *e não adjacente aos ângulos* $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$*, o ângulo* $\hat{e}$ *é o suplementar de* $\hat{C}$*, como mostra a Figura 2.12.*

Teorema 2.2. *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração:

Para começarmos a demonstração vamos destacar a hipótese e a tese.

Hipótese:

No triângulo $\triangle ABC$, o ângulo $\hat{e}$ é externo adjacente a $\hat{C}$.

Tese: *O Ângulo $\hat{e} > \widehat{A}$ e $\hat{e} > \hat{B}$.*

Seja o triângulo $\triangle ABC$, tal que M seja o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e P pertence a semirreta $\overrightarrow{BM}$, onde $\overline{BM} = \overline{MP}$.

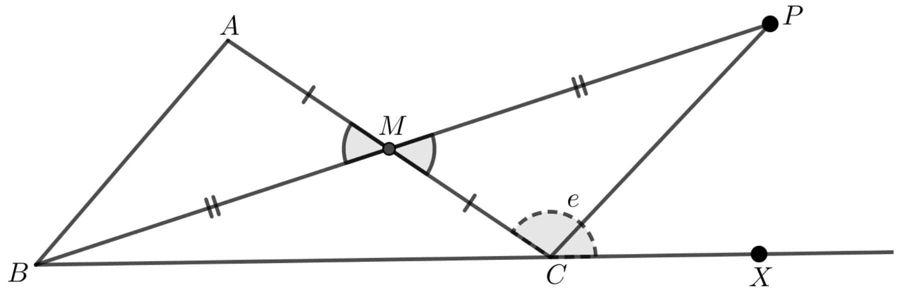

Figura 2.13: Demonstração do Teorema do ângulo externo

Considere os triângulos $\triangle BMA$ e $\triangle PMC$, então:

(L) O lado $\overline{BM} \cong \overline{MP}$, por construção;

(A) O ângulo $B\hat{M}A \cong P\hat{M}C$, são ângulos opostos pelo vértice;

(L) O lado $\overline{AM} \cong \overline{MC}$, pois M é o ponto médio de $\overline{AC}$.

Assim, pelo caso LAL de congruência de triângulos, o triângulo $\triangle BMA \cong \triangle PMC$;

Em particular o ângulo $B\hat{A}M \cong P\hat{C}M$;(1)

como o ponto P é interno ao ângulo $\hat{e} = A\hat{C}X$, vêm que, $\hat{e} > P\hat{C}M$;(2)

De (1) e (2), concluímos que $\hat{e} > B\hat{A}M$.

Analogamente, tomando o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, também concluiremos que $\hat{e} > A\hat{B}C$. ■

2.4 Quarto Caso: Lado Ângulo Ângulo Oposto (LAA_O)

O quarto caso de congruência de triângulos, decorre do teorema do ângulo externo, verificaremos através do próximo axioma.

Axioma 2.2. *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração: *Para iniciar a demonstração desse axioma, vamos destacar inicialmente a hipótese e tese do mesmo.*

Hipótese:

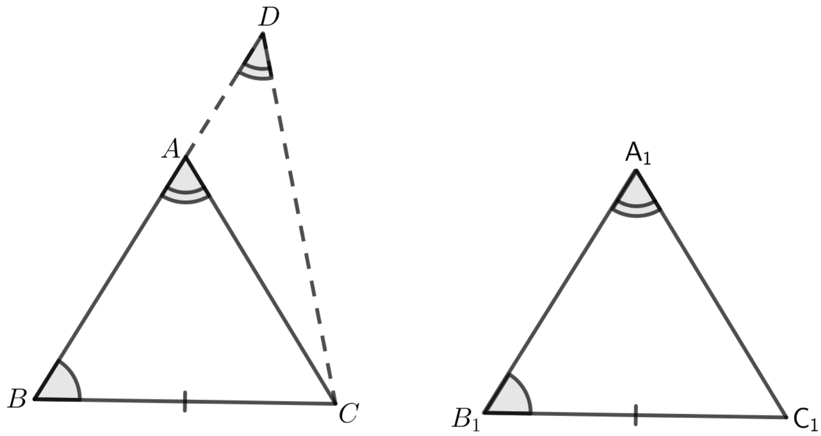

Figura 2.14: Congruência de triângulos

O lado $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$*;(1)*
O ângulo $\hat{B} \cong \hat{B}_1$*;(2)*
O ângulo $\hat{A} \cong \hat{A}_1$*;(3)*
Tese: *O triângulo* $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.
Há três possibilidades para o lado $\overline{AB}$ *e* $\overline{A_1B_1}$*:*

1. *O lado* $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$*;*

2. *O lado* $\overline{AB} < \overline{A_1B_1}$*;*

3. *O lado* $\overline{AB} > \overline{A_1B_1}$.

Se a possibilidade (a) se verifica, então temos:
(L) O lado $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$*;*
(A) O ângulo $\hat{B} \cong \hat{B}_1$*;*
(L) O lado $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$*;*
Assim, pelo caso LAL, o triângulo $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.
Se a possibilidade (b) se verificasse, tomando um ponto D *na semirreta* $\overrightarrow{BA}$*, tal que,* $\overline{BD} = \overline{A_1B_1}$ *(postulado do transporte de segmentos) então teríamos:*
(L) O lado $\overline{DB} \cong \overline{A_1B_1}$*;*
(A) O ângulo $\hat{B} \cong \hat{B}_1$*;*
(L) O lado $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$*;*
Assim, pelo caso LAL, o triângulo $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.
Em particular o ângulo $\hat{D} \cong \hat{A}$*, mas por (3) o ângulo* $\hat{A} \cong \hat{A}_1$*, o que é uma contradição, pois de acordo com o teorema do ângulo externo no triângulo* $\triangle ADC$.
Logo a possibilidade (b) não se verifica.
A possibilidade (c) também não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença que D *estaria entre os pontos* A *e* B.

Como só pode ocorrer a possibilidade (a).
Logo temos que $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. ■

2.5 Aplicações de Congruência

Nesta seção, iremos destacar algumas aplicações úteis dos casos de congruência estudados na seção anterior, tais aplicações aparecerão de agora em diante com muita frequência que o leitor deve se esforçar por memorizá-las o quanto antes.

Aplicação 1. *Existência da Bissetriz Interna*

Definição 2.2. *Dado um triângulo* $\triangle AOB$*, a bissetriz de* $\triangle AOB$ *é a semirreta* $\overrightarrow{OC}$ *que o divide em dois ângulos iguais. Neste caso, dizemos que* $\overrightarrow{OC}$ *bissecta* $\triangle AOB$*.*

Assim, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ *bissecta* $\triangle AOB$*, se e somente se,* $A\hat{O}C = B\hat{O}C$*.*

Assumiremos, aqui, que a bissetriz interna de um ângulo, caso exista, é única. O próximo exemplo ensina como construí-la.

Exemplo 2.5. *Construa com régua e compasso a bissetriz do ângulo* $A\hat{O}B$ *dado na figura 2.15*

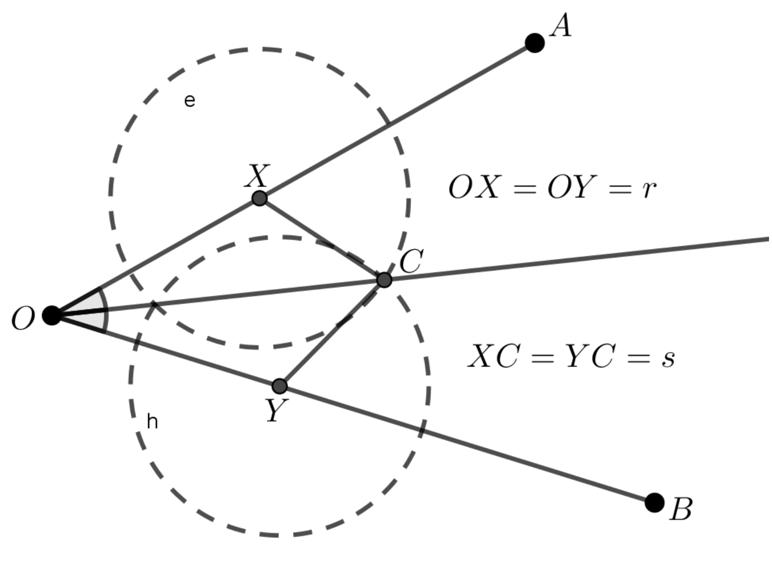

Figura 2.15: Bissetriz Interna

Descrição dos passos

1. *Centre o compasso em* O *e, e com uma mesma abertura* r*, marque pontos* $X \in \overrightarrow{OA}$ *e* $Y \in \overrightarrow{OB}$*.*

2. *Fixe uma abertura* $s > \dfrac{1}{2}\,\overline{XY}$ *e trace, dos círculos de raio* s *e centros* X *e* Y*, arcos que se intersectem num ponto* C*. A semirreta* $\overrightarrow{OC}$ *é a bissetriz de* $A\hat{O}B$*.*

De fato, em relação aos triângulos $\triangle XOC$ *e* $\triangle XOC$ *construídos na figura 2.15, temos* $\overline{OX}$ $= \overline{OY} = r$ *e* $\overline{XC} = \overline{YC} = s$*, uma vez que o lado* $\overline{OC}$ *é comum aos dois triângulos, segue do terceiro caso de congruência (LLL) que o triângulo* $\triangle XOC \cong \triangle XOC$*. Logo* $X\hat{O}C \cong Y\hat{O}C$ *ou ainda,* $A\hat{O}C \cong B\hat{O}C$*.*

Em um triângulo $\triangle ABC$ *a bissetriz interna relativa ao lado* $\overline{BC}$*, ou em relação ao vértice* A*, é o segmento de reta* $\overline{AP}$*, onde* $P \in \overline{BC}$*. Analogamente, temos no triangulo* $\triangle ABC$*, as bissetrizes internas relativas aos lados* $\overline{AC}$ *e* $\overline{AB}$*, ou em relação aos vértices* B *e* C*, respectivamente, de modo que o triangulo* $\triangle ABC$*, possui exatamente três bissetrizes internas, onde* I *é o ponto de interseção dessas bissetrizes e recebe o nome de Incentro, pelo qual é possível construir uma circunferência inscrita no triangulo* $\triangle ABC$*.*

Aplicação 2. *Existência do Ponto Médio*

É possível determinar também através da congruência de triângulos a existência do ponto médio de um segmento qualquer, esse ponto divide o segmento de reta em dois segmentos iguais. Para isso, é necessário combinar os casos LLL e LAL, que mostraremos no próximo exemplo a sua construção.

Exemplo 2.6. *Construa com régua e compasso o ponto médio do segmento de reta* $\overline{AB}$*, conforme Figura 2.16.*

Descrição dos passos:

1. *Fixe uma abertura* $r > \dfrac{1}{2}\,\overline{AB}$ *e trace, dos círculos de raio* r *e centros* A *e* B*, arcos que se intersectem nos pontos* X *e* Y*;*

2. *O ponto* M *de interseção da reta* t*, que passa pelos pontos* X *e* Y*, com o segmento de reta* $\overline{AB}$ *é o ponto médio de* $\overline{AB}$*.*

Considere os triângulos $\triangle AXY$ *e* $\triangle BXY$*, temos que:*

- *(L) O lado* $\overline{AX} \cong \overline{BX}$*;*
- *(L) O lado* $\overline{AY} \cong \overline{BY}$*;*
- *(L) O lado* $\overline{XY}$ *é comum aos dois triângulos.*

Assim, pelo caso de congruência (LLL) o triângulo $\triangle AXY \cong \triangle BXY$*.*
Em particular o ângulo $A\hat{X}Y \cong B\hat{X}Y$*, ou ainda,* $A\hat{X}M \cong B\hat{X}M$*.*
Agora Considere os triângulos $\triangle AXM$ *e* $\triangle BXM$*, temos que:*

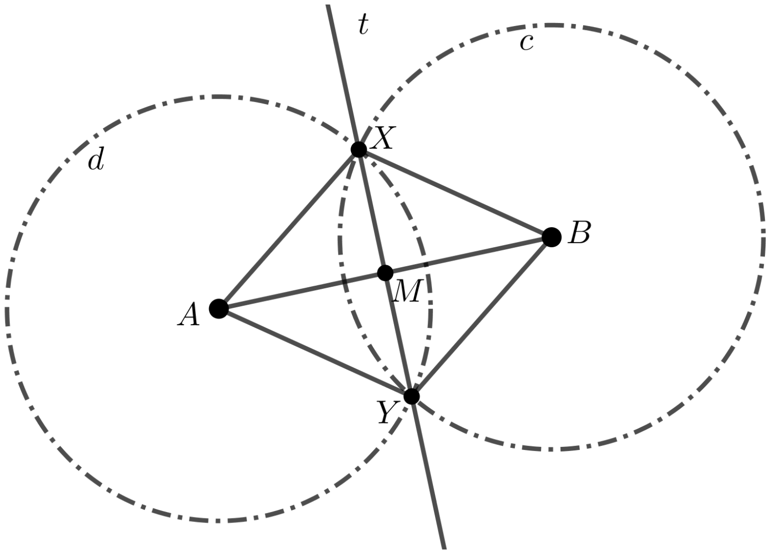

Figura 2.16: Construção do ponto médio

- *(L) O lado* $\overline{AX} \cong \overline{BX}$;
- *(A) O ângulo* $A\hat{X}M \cong B\hat{X}M$;
- *(L) O lado* $\overline{XM}$ *é comum aos dois triângulos.*

Logo, pelo caso de congruência (LAL) o triangulo $\triangle AXM \cong \triangle BXM$.
Em particular o lado $\overline{AM} \cong \overline{BM}$.
Portanto M *é o ponto médio do segmento de reta* $\overline{AB}$.

Aplicação 3. *Mediana de um triângulo*

Definição 2.3. *Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.*

Em um triângulo $\triangle ABC$, *a mediana relativa ao lado* $\overline{BC}$, *ou ao vértice* A, *é o segmento de reta que une o vértice* A *ao ponto médio do lado* $\overline{BC}$. *Analogamente, temos no triângulo* $\triangle ABC$ *medianas relativas aos lados* $\overline{AC}$ *e* $\overline{AB}$, *ou aos vértices* B *e* C, *respectivamente, de modo que todo triangulo possui exatamente três medianas, como mostra a Figura 2.17*

Retas Perpendiculares

Aplicação 4. *Sejam duas retas* r *e* s *no plano, dizemos que* r *é perpendicular a* s, *que* s *é perpendicular a* r *ou, ainda, que* r *e* s *são perpendiculares quando* r *e* s *tiverem um ponto em comum e formarem entre elas ângulos de* 90. *Escrevemos* $r \perp s$ *para denotar que duas retas* r *e* s *são perpendiculares.*

Exemplo 2.7. *Dados, no plano, uma reta* r *e um ponto* A, *construa com régua e compasso uma reta* s *tal que* $r \perp s$ *e* $A \in s$.

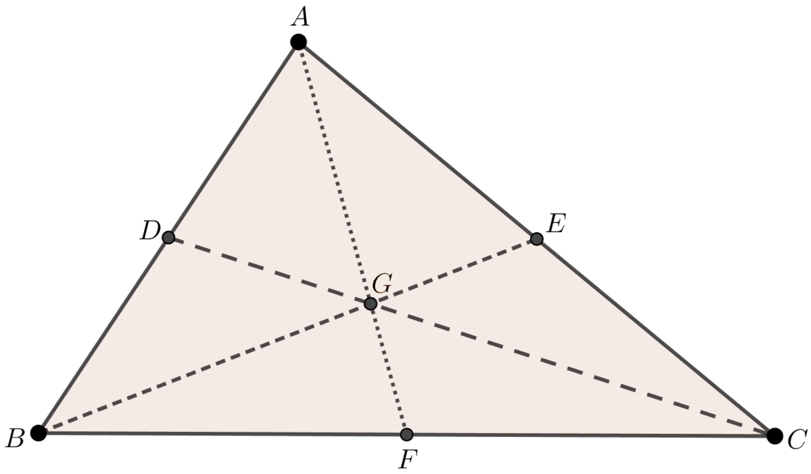

Figura 2.17: Medianas de um triângulo

Descrição dos passos

1. *Com o compasso centrado em A, descreva um arco de círculo que intersecte a reta r em dois pontos distintos B e C;*

2. *Construa o ponto médio M de $\overline{BC}$ e faça $s = \overleftrightarrow{AM}$.*

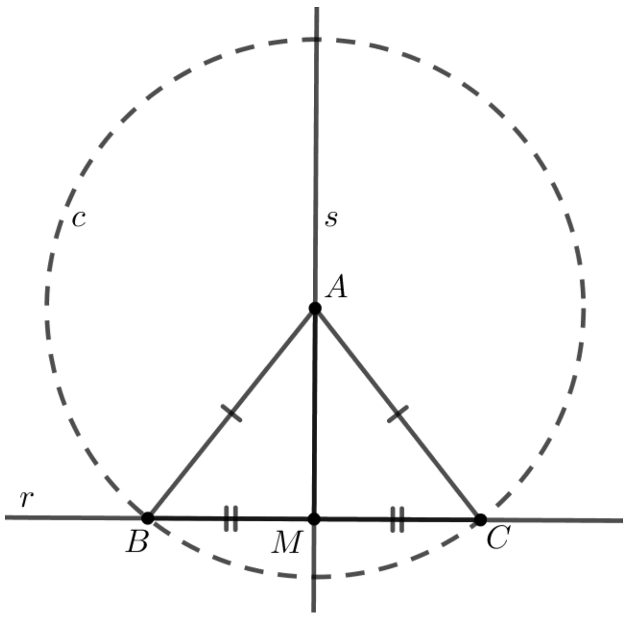

Figura 2.18: Retas perpendiculares

Solução: 1. *Considere os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$;*

(L) Pela descrição 1 o lado $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, pois equivalem ao raio do círculo construído;

(L) Pela descrição 2 o lado $\overline{BM} \cong \overline{CM}$;

(L) O lado $\overline{AM}$ é comum aos dois triângulos;

Logo, pelo caso LLL, o triângulo $\triangle ABM \cong \triangle ACM$;

Em particular o ângulo $A\hat{M}B \cong A\hat{M}C$;

Da Figura 2.18, temos que:

$B\hat{M}C = A\hat{M}B + A\hat{M}C = 180$;*(I)*

$A\hat{M}B = A\hat{M}C$,*(II)*.

Substituindo (II) em (I), obtêm-se:

$A\hat{M}B + A\hat{M}B = 180 \Rightarrow 2\cdot\, A\hat{M}B = 180$
$\Rightarrow 2\cdot\, A\hat{M}B = 180 \Rightarrow A\hat{M}B = 90 = A\hat{M}C$;
$\Rightarrow \therefore \overleftrightarrow{AM} \perp r \therefore s \perp r$.

Em um triângulo $\triangle ABC$, a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, ou ao vértice A, é o segmento que une o vértice A ao pé da perpendicular baixada de A à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Nesse caso, denominamos o pé da perpendicular em questão de pé da altura relativa a $\overline{BC}$. Analogamente, temos no triangulo $\triangle ABC$ altura relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, ou aos vértices B e C, respectivamente, de modo que todo o triângulo possui exatamente três alturas. A esta altura sugerimos ao leitor desenhar um triângulo qualquer $\triangle ABC$, juntamente com suas alturas relativas aos vértices A, B, C e os pés das alturas correspondentes.

Lista de exercícios

Nesta lista de exercícios destacaremos diversas aplicações envolvendo congruência de triângulos, das quais resolveremos algumas e deixaremos o restante para o leitor resolver.

1. *Na Figura 2.19, tem-se $\overline{AD} \cong \overline{AE}$, $D\hat{A}B \cong D\hat{E}C$ e $A\hat{D}E \cong B\hat{D}C$. Mostre que os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle EDC$ são congruentes.*

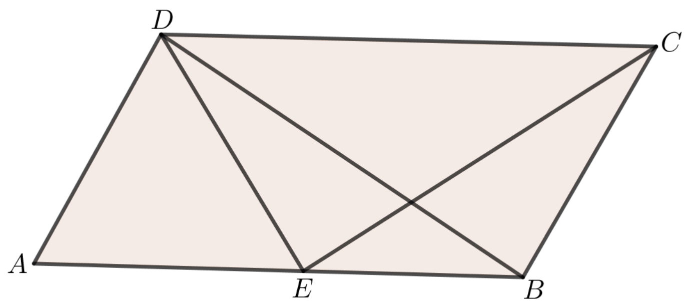

Figura 2.19:

Solução: 2. *Iniciarmos a solução deste exercício destacando a hipótese, a tese e fazendo algumas observações em relação aos triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle DEC$ na Figura 2.19.*

Hipótese:

O lado $\overline{AD} \cong \overline{DE}$;

O ângulo $D\hat{A}B \cong D\hat{E}C$.

O ângulo $A\hat{D}E \cong C\hat{D}B$.

Tese:

O triângulo $\triangle ADB \cong \triangle EDC$.

Considere os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle EDC$, então temos que;

O ângulo $A\hat{D}B = A\hat{D}E + E\hat{D}B$ e $C\hat{D}E = C\hat{D}B + B\hat{D}E$; (I)

Por hipótese $A\hat{D}E \cong C\hat{D}B$ e por (I) tem-se:

$A\hat{D}B = A\hat{D}E + E\hat{D}B = C\hat{D}B + B\hat{D}E = C\hat{D}E$

$\Rightarrow A\hat{D}B \cong C\hat{D}E$. **(II)**

(A) Por hipótese, $D\hat{A}B \cong D\hat{E}C$;

(L) Também por hipótese, $\overline{AD} \cong \overline{DE}$;

(A) De (I) e (II), temos que, $A\hat{D}B \cong C\hat{D}E$;

Logo, pelo caso de congruência ALA, o triângulo $\triangle ADB \cong \triangle EDC$.

2. *Considere um triângulo equilátero ABC em que P, Q e R são os pontos médios dos seus lados, respectivamente. Mostre que o $\triangle PQR$ é equilátero.*

3. *Num paralelogramo $ABCD$ traçamos sua diagonal $\overline{AC}$. Pelos vértices B e D traçamos dois segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{DQ}$ perpendiculares à diagonal $\overline{AC}$, com P e Q pertencentes a $\overline{AC}$. Prove que $\overline{BP}$ é congruente a $\overline{DQ}$.*

4. *Mostre que os ângulos opostos pelo mesmo vértice (o.p.v) são congruentes.*

5. *Mostre que todo ângulo externo de um triângulo mede mais que qualquer dos ângulos internos não-adjacentes a ele.*

6. *Mostre que se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.*

7. *Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{RB}$ se bisseccionam no ponto F, então $\triangle FAB \cong \triangle FHR$.*

8. *Na Figura 2.20 os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são retos e o segmento $\overline{DE}$ corta $\overline{CA}$ no ponto médio B de $\overline{CA}$. Mostre que $\overline{DA} \cong \overline{CE}$.*

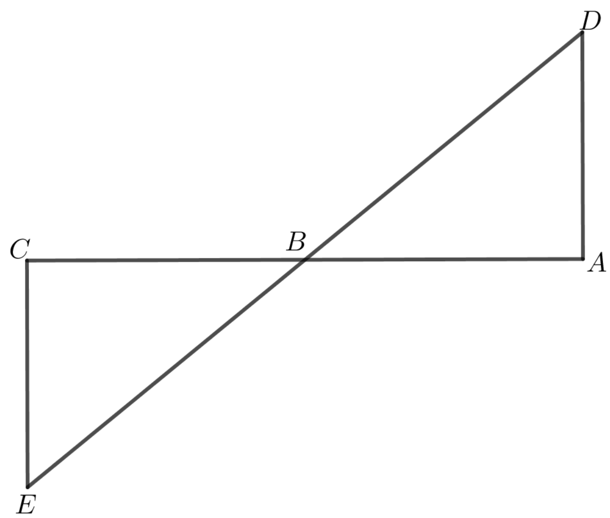

Figura 2.20:

9. *Na figura 2.21 $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$ são triângulos isósceles com base $\overline{BD}$. Prove que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são congruentes.*

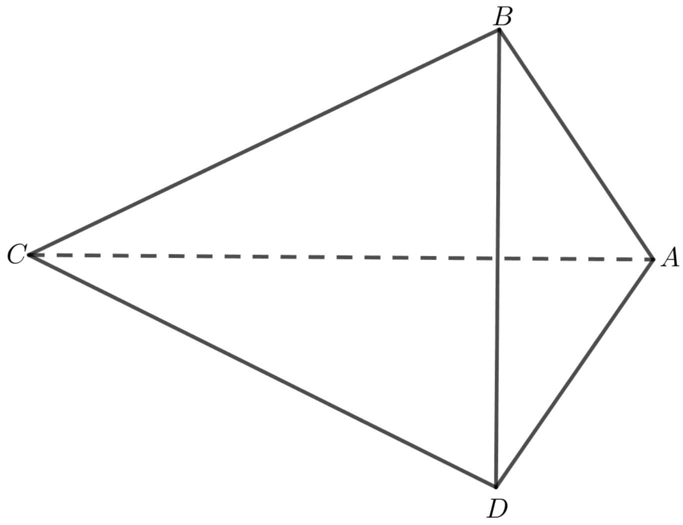

Figura 2.21:

Solução: 3. *Como o triângulo $\triangle BCD$ é isósceles de base $\overline{BD}$, então $\overline{CB} \cong \overline{CD}$;*

Também temos que o triângulo $\triangle BAD$ é isósceles de base $\overline{BD}$, então $\overline{AB} \cong \overline{CA}$;

Assim temos que:

Hipótese:

O lado $\overline{CB} \cong \overline{CD}$;

O lado $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.

Tese: *O ângulo $A\hat{B}D \cong A\hat{D}C$.*

Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ na figura 2.21, então temos:

(L) O lado $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, por hipótese;

(L) O lado $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, também por hipótese;

(L) o lado $\overline{AC}$ é comum aos dois triângulos.

Logo pelo caso (LLL) de congruência de triângulos o triângulo $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, em particular os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são congruentes.

$\therefore A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$.

10. *Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{RB}$ se bisseccionam no ponto F, então, $\triangle FAB \cong \triangle FHR$.*

11. *Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se bisseccionam, então $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.*

12. *Mostre que:*

    (a) *Se dois ângulos de triângulos são congruentes, então o triângulo é isósceles.*

    (b) *Todo triângulo equiângulo é equilátero.*

13. *Mostre que:*

    (a) *A bissetriz em $\hat{A}$ de um triângulo $\triangle ABC$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$ se, e somente se, o triângulo é isósceles com base $\overline{BC}$.*

    (b) *Dado um triângulo $\triangle ABC$ com base $\overline{BC}$, a mediana desde o vértice A desse triângulo coincide com a bissetriz do triângulo correspondente ao ângulo $\hat{A}$.*

14. *Prove que as bissetrizes relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.*

15. *Prove que, se a bissetriz relativa a um lado de um triângulo é também mediana relativa a esse lado, então esse triângulo é isósceles.*

16. *O triângulo $\triangle ABC$ é isósceles no qual as bissetrizes internas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ dos ângulos da base se cortam em F. Mostre que os triângulos $\triangle BCF$ e $\triangle DEF$ são ambos isósceles.*

17. *Mostre que*

    (a) *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes não são congruentes, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

    (b) *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes não são congruentes, e o maior lado é oposto ao maior ângulo.*

18. *O $\triangle ABC$ é um triângulo isósceles no qual as bissetrizes internas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ dos ângulos da base se cortam em F. Mostrar que os triângulos $\triangle BCF$ e $\triangle DEF$ são ambos isósceles.*

19. *Prove que as bissetrizes dos ângulos obtusos de um paralelogramo são paralelas.*

20. *Num trapézio isósceles $ABCD$, a base menor $\overline{AB}$ é congruente aos lados não paralelos. Prove que as diagonais são bissetrizes dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$.*

21. *Mostre que se dois lados de um quadrilátero são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.*

22. *Mostre que se as diagonais de um quadrilátero se bisseccionam, então o quadrilátero é um paralelogramo.*

23. *Na figura 2.22, temos* $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. *Mostre que* $D\hat{B}C \cong E\hat{C}B$.

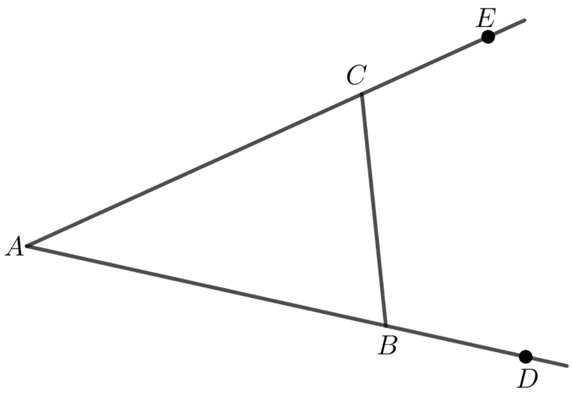

Figura 2.22:

24. *Prove que as bissetrizes dos ângulos formados pelas diagonais de um retângulo são paralelas aos lados do retângulo.*

25. *Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos. Mostre que valem as seguintes propriedades sobre paralelogramos:*

    (a) *Cada diagonal separa um paralelogramo em dois triângulos congruentes;*

    (b) *Dois lados opostos quaisquer num paralelogramo são congruentes;*

    (c) *Dois ângulos opostos quaisquer num paralelogramo são congruentes;*

    (d) *Dois ângulos consecutivos quaisquer num paralelogramo são suplementares.*

26. *Mostre que o segmento com extremidades nos pontos médios de dois de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade de seu comprimento.*

27. *Um losango é um paralelogramo cujos lados são congruentes. Um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são retos. Um quadrado é retângulo cujos lados são congruentes. Mostre que:*

    (a) *Se um paralelogramo tem um ângulo reto, então tem quatro ângulos retos, e o paralelogramo é um retângulo;*

    (b) *Em um losango as diagonais são perpendiculares e se bisseccionam;*

    (c) *Se as diagonais de um quadrilátero se bisseccionam e são perpendiculares, então o quadrilátero é um losango.*

Capítulo 3

Semelhança de Triângulos

Neste capítulo desenvolveremos um conjunto de ferramentas que nos possibilitarão iniciar o estudo sistemático dos aspectos métricos da Geometria Euclidiana plana a grosso modo, como veremos é aquele em que comparamos razões de comprimentos de segmentos. Dentre muitas aplicações importantes e interessantes aqui reunidas, ressaltaremos inicialmente o Teorema de Tales.

Apresentaremos também as definições, os postulados, os teoremas e as diversas aplicações que envolvem semelhança de triângulos. Antes de prosseguirmos, precisamos enunciar o teorema da base média, mas o mesmo não será demonstrado, pois o utilizaremos na explicação do teorema de Tales.

Proposição 3.1. *Seja $ABCD$ um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lados não paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Sejam, ainda, M e N os pontos médios dos lados não paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e P e Q os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, também respectivamente. Então:*

1. *M, N, P e Q são colineares e $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.*
2. *$\overline{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)$ e $\overline{PQ} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{AB} - \overline{CD}\right|$*

3.1 O Teorema de Tales

Teorema 3.1. *Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois seguimentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

Demonstração:

Vamos considerar a seguinte situação: temos no plano, retas paralelas r, s e t conforme Figura 3.1, em seguida vamos traçar as retas u e v, a primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C, a segunda intersectando r, s e t respectivamente em A_1, B_1 e C_1. Se tivermos $\overline{AB} = \overline{BC}$, o que não parece ser o caso da Figura 3.1, então, pelo teorema *da base média de um trapézio, proposição 3.1, termos que* $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1}$*. De outra forma, já sabemos que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = 1.$$

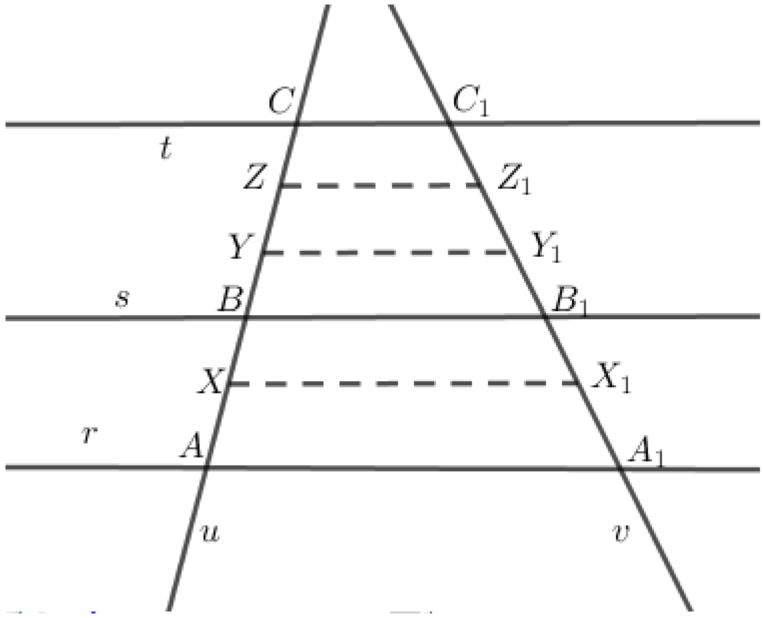

Figura 3.1: Paralelas cortadas por transversais

Suponha agora, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ *seja um número racional, digamos* $\frac{2}{3}$*, para exemplificar. Dividamos os segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$*, respectivamente em duas e três partes iguais, obtendo os pontos* X*,* Y *e* Z *que pertencem a reta* u*, como mostra a Figura 3.1, tais que:*

$$\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$$

Em seguida traçamos por X*,* Y *e* Z*, paralelas as retas* r*,* s *e* t*, as quais intersectam* v *nos pontos* X_1*,* Y_1 *e* Z_1*, respectivamente, então mais três aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem que:*

$$\overline{A_1X_1} = \overline{X_1B_1} = \overline{B_1Y_1} = \overline{Y_1Z_1} = \overline{Z_1C_1}$$

e, daí segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{2}{3}.$$

Prosseguindo com tal raciocínio, suponha agora, fosse $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{m}{n}$*, com* $m, n \in \mathbb{N}$*. Então uma pequena modificação do argumento acima, dividimos inicialmente,* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ *em* m *e* n *partes iguais, respectivamente, garantiria que* $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{m}{n}$*, tal que:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{m}{n}.$$

De outra forma concluímos que a relação

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}}.$$

é valida sempre que o primeiro ou o segundo membro for um número racional. A pergunta natural nesse momento é a seguinte: a igualdade das razões acima se mantém quando um dos membros da mesma for um número racional? A resposta é sim, pois a igualdade é válida para todo número real positivo. ■

Exemplo 3.1. *Construa com régua e compasso, a quarta proporcional dos segmentos dados abaixo.*

Descrição dos passos

1. *Trace duas retas r e s, concorrentes no ponto A.*
2. *Marque sobre a reta r os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, tais que, $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$ e marque sobre a reta s o segmento $\overline{AD}$, tal que, $\overline{AD} = c$.*
3. *Trace, pelo ponto C, a paralela à reta $\overleftrightarrow{BD}$, a qual intersecta a reta s no ponto E.*

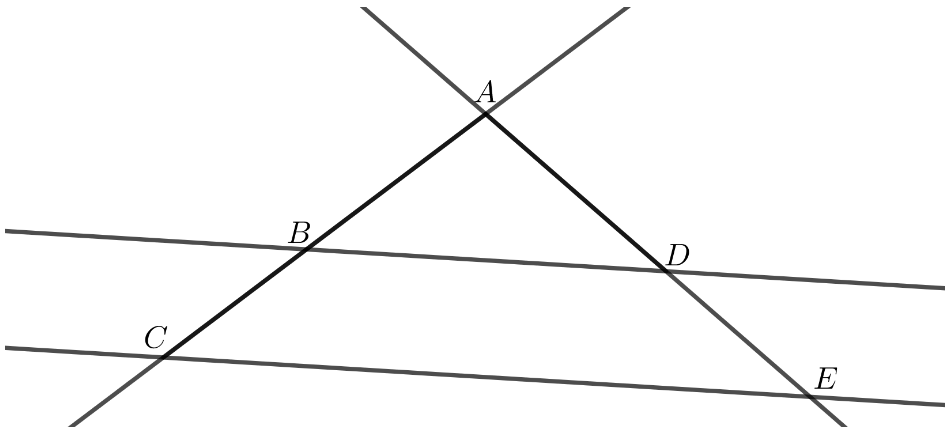

Figura 3.2: A quarta proporcional

.

Solução: 4. *Pelo teorema de Tales temos que:*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

Como $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$ e $DE = x$, então têm-se:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Aplicação 5. *As retas r, s e t são paralelas, com s entre r e t. As transversais u e v determinam sobre r, s, t, pontos A, B, C e A_1, B_1, C_1, respectivamente, tais que, $\overline{AB} = x + 2$, $\overline{BC} = 2y$ $\overline{A_1B_1} = y$ e $\overline{B_1C_1} = \frac{x-10}{2}$. Sabendo que $x + y = 18$, calcule $\overline{AB}$.*

Solução: 5. Inicialmente vamos construir a figura de acordo com os dados fornecidos pelo exemplo 5, então vamos obter a figura abaixo.

Aplicando o teorema de Tales na figura 3.3, temos:

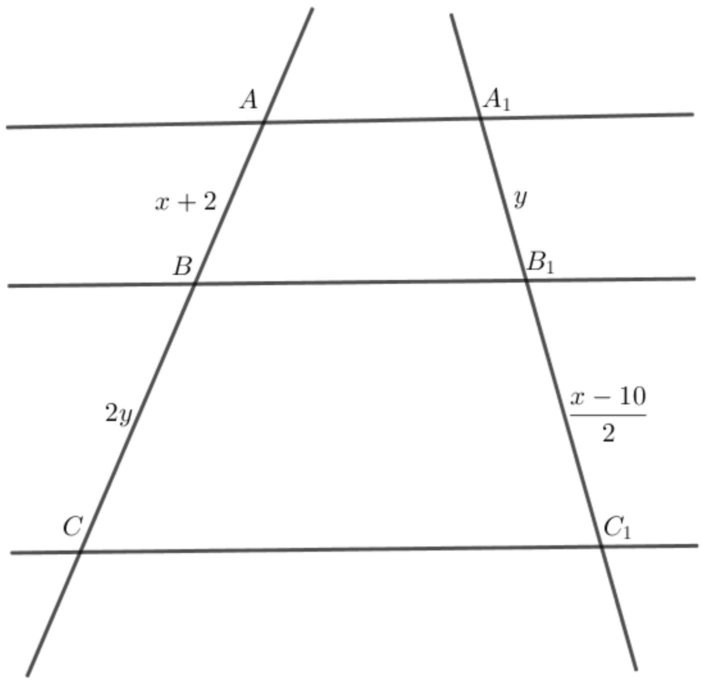

Figura 3.3: Aplicação do Teorema de Tales

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} \Rightarrow \frac{x+2}{2y} = \frac{y}{\frac{x-10}{2}} = \frac{2y}{x-10} \Rightarrow (x+2)(x-10) = 4y^2$$

$\Rightarrow x^2 - 4y^2 - 8x - 20 = 0$, *como* $x + y = 18 \Rightarrow y = 18 - x$, *então têm-se:*

$x^2 - 4(18-x)^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 136x + 1316 = 0 \Rightarrow x = 18$ *ou* $x = \frac{94}{3}$

Como $\overline{AB} = x + 2$, *então para* $x = 18 \Rightarrow \overline{AB} = 20$ *e para* $x = \frac{94}{3} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{100}{3}$

Conceito de semelhança de triângulos

Agora vamos destacar o conceito de semelhança de triângulos, o qual generaliza a noção de congruência de triângulos e se revelará de fundamental importância para tudo o que segue.

Definição 3.1. *Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma, conforme Figura 3.4.*

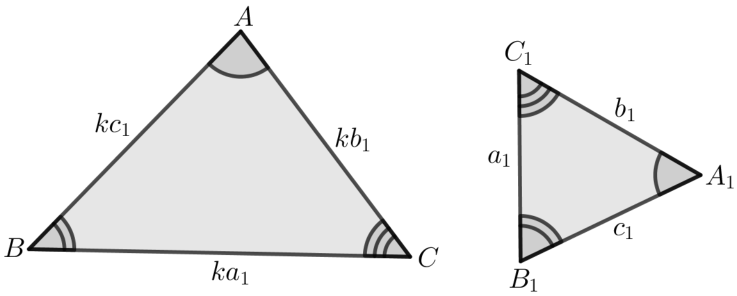

Figura 3.4: dois triângulos semelhantes

Fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro no final de tais operações. Na Figura 3.4, os triângulos $\triangle ABC$ *e* $\triangle A_1B_1C_1$ *são semelhantes, com a correspondência de vértices* $A \leftrightarrow A_1$, $B \leftrightarrow B_1$, *e* $C \leftrightarrow C_1$, *então,* $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$ *e existe* $k > 0$ *tal que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{kc_1}{c_1} = \frac{ka_1}{a_1} = \frac{kb_1}{b_1} = \frac{k(c_1 + b_1 + a_1)}{c_1 + b_1 + a_1} = k$$

onde $k > 0$ *e denominado a razão de semelhança entre os triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A_1B_1C_1$ *e escrevemos* $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ *par denotar que os triângulos mencionados acima são semelhantes.*

Da definição de semelhança de triângulos decorrem as seguintes propriedades:

Propriedade 3.1. *Reflexiva é quando todo triangulo é semelhante a si próprio, ou seja,*

$$\triangle ABC \sim \triangle ABC.$$

Propriedade 3.2. *Simétrica é quando temos a seguinte situação,*

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

Propriedade 3.3. *Transitiva é a propriedade que faz a seguinte relação:*

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ e } \triangle DEF \sim \triangle XYZ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle XYZ.$$

Teorema fundamental

Teorema 3.2. *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

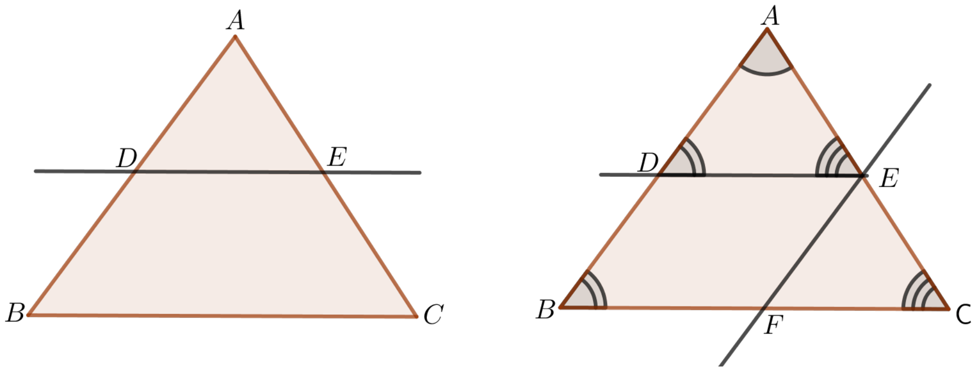

Figura 3.5: Teorema fundamental da semelhança de triângulos

Hipótese: *O segmento,* $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$*;*

Tese: *O triangulo* $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Demonstração:

Para mostrarmos a semelhança entre os triângulos $\triangle ADE$ *e* $\triangle ABC$*, precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais:*

1. *Ângulos congruentes:*

   Considere os triângulos $\triangle ADE$ *e* $\triangle ABC$*, têm-se por hipótese que a reta* $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$*, então, os ângulos* $A\hat{D}E$ *e* $A\hat{B}C$*,* $A\hat{E}D$ *e* $A\hat{C}B$*, são ordenadamente correspondentes, ou seja, ordenadamente congruentes, então:*

   $$A\hat{D}E \cong A\hat{E}D,\ A\hat{B}C \cong A\hat{C}B \text{ e } B\hat{A}C \text{ é comum aos dois triângulos. (I)}$$

2. *Lados homólogos proporcionais:*

   Considere os triângulos $\triangle ADE$ *e* $\triangle ABC$*, então pelo teorema de Tales temos,*

   $$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \text{ (1)}$$

   Agora construiremos pelo ponto E *a reta* $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$*, com* F *em* $\overline{BC}$*;*

   Do paralelogramo $BDEF$*, temos que,* $\overline{DE} = \overline{BF}$*; (2)*

   Também pelo teorema de Tales, têm-se,

   $$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}; \text{ (3)}$$

   Substituindo (2) em (3), teremos,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}; \text{ (4)}$$

Assim, por (1) e por (4), temos que,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}. \text{ (II)}$$

3. Logo, por (I) e por (II), concluímos que

$$\triangle ADE \sim \triangle ADE.$$

■

Casos ou Critérios de Semelhança de triângulos

As três proposições a seguir estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes, por tal razão são conhecidas na literatura como os casos ou critérios de semelhança de triângulos usuais. Suas demonstrações são consequências relativamente simples da recíproca do teorema de Tales, então faremos a prova dos três casos de semelhança de triângulos.

3.2 Primeiro caso: Lado, Lado, Lado (LLL)

Proposição 3.2. *Se dois triângulos tem os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes, isto é:*

Sejam dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ no plano, tais que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$

Então,

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

Hipótese: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$

Tese: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

Demonstração:

Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ da Figura 3.6, faça $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, então pelo teorema de Tales temos,

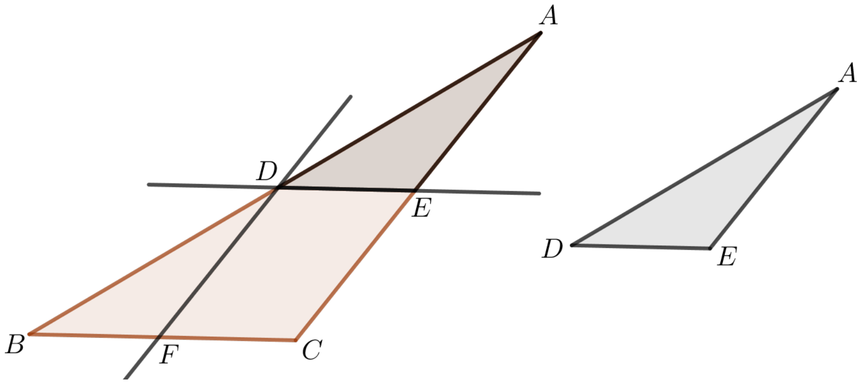

Figura 3.6: Dois triângulos semelhantes

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}\ (i)$$

Agora construa pelo ponto D a reta $\overleftrightarrow{DF} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, com F em $\overline{BC}$;
Do paralelogramo $DFCE$, temos que, $\overline{DE} = \overline{FC}$; (ii)
Também pelo teorema de Tales, têm-se,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}};\ (iii)$$

Substituindo (ii) em (iii), teremos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}};\ (iv)$$

Assim, por (i) e por (iv), temos que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}.$$

Portanto pelo caso (LLL) de semelhança de triângulos, concluímos que:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

■

3.3 Segundo caso: Lado, Angulo, Lado (LAL)

O próximo critério para a semelhança entre dois triângulos constarão na próxima proposição e é conhecido como o caso LAL de semelhança.

Proposição 3.3. *Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triangulo e os ângulos compreendidos, entre os respectivos lados de cada triangulo, são congruentes, então os triângulos são semelhantes, isto é:*
Sejam dois triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ no plano, tais que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k} \text{ e } B\hat{A}C \cong D\hat{A}E$$

Então,

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Conforme Figura 3.7

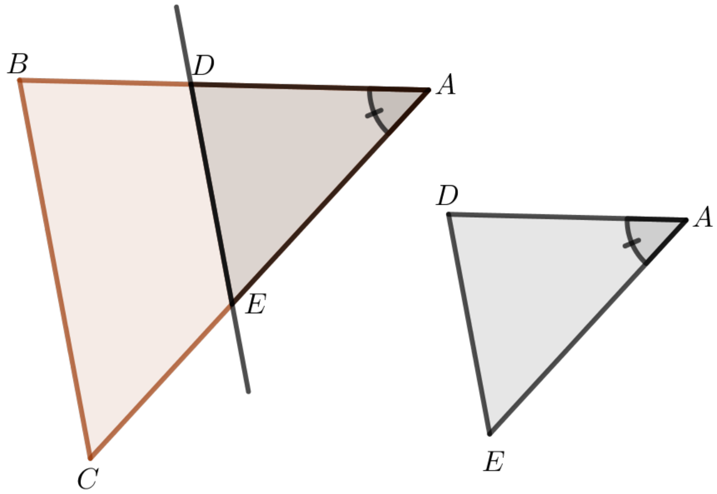

Figura 3.7: Dois triângulos semelhantes

.

Hipótese: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = k$ *e* $B\hat{A}C \cong D\hat{A}E$

Tese: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Demonstração:

Considere os triângulos, $\triangle ADE$ *e* $\triangle ABC$ *da Figura 3.7, faça* $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$*, então pelo teorema de Tales temos,*

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Temos ainda que,

$$D\hat{A}C \cong B\hat{A}C,$$

pois são comuns aos dois triângulos.

Portanto, pelo caso LAL de semelhança de triangulo, temos que:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

■

3.4 Terceiro caso: Ângulo, Ângulo (AA)

Por fim o último caso apresenta o caso AA de semelhança de triângulos.

Proposição 3.4. *Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes, isto é:*

Sejam dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ no plano, tais que:

$$B\hat{A}C \cong D\hat{A}C \text{ e } A\hat{B}C \cong A\hat{D}E$$

então,

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

conforme Figura 3.8.

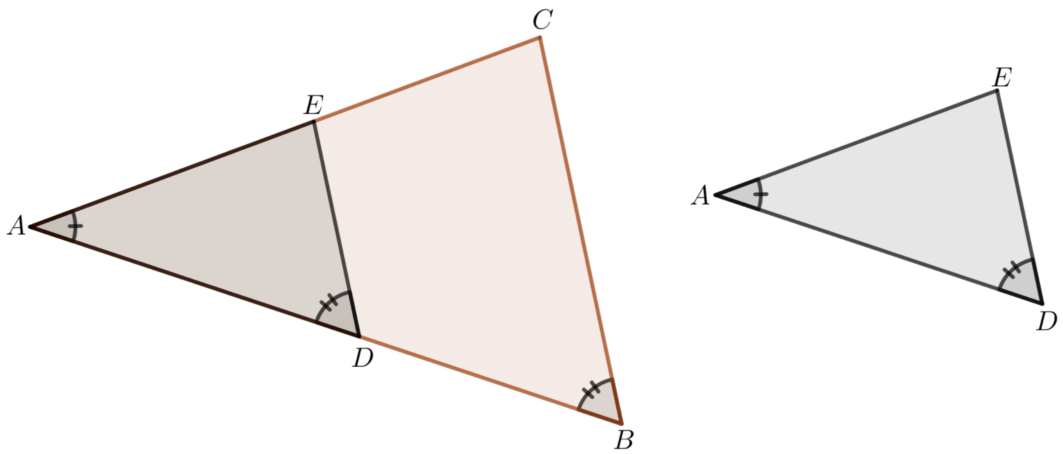

Figura 3.8: Dois triângulos semelhantes

.

Hipótese: $B\hat{A}C \cong D\hat{A}C$ e $A\hat{B}C \cong A\hat{D}E$

Tese: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

Demonstração:

Considere os triângulos, $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ da Figura 3.8, faça o lado $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, então

O ângulo $A\hat{D}E \cong A\hat{B}C$, pois são ângulos correspondentes. E o ângulo $D\hat{A}C \cong B\hat{A}C$, pois são ângulos comuns aos dois triângulos.

Assim, pelo caso ângulo, ângulo, temos que:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$\blacksquare$

Teorema da bissetriz interna

Geralmente o Teorema da Bissetriz Interna é demonstrado através do Teorema de Tales, mas pra enfatizar o estudo de semelhança de triângulos, vamos demonstrá-lo utilizando um dos casos.

Teorema 3.3. *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos aditivos proporcionais aos lados adjacentes, isto é.*

Seja o triângulo $\triangle ABC$, conforme Figura 3.9, se o ponto P é o pé da bissetriz interna em relação ao vértice A, então:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC}.$$

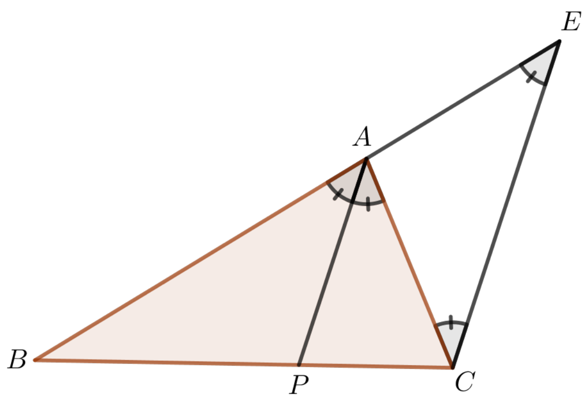

Figura 3.9: Teorema da Bissetriz Interna

.

Hipótese: *O ponto P é o pé da bissetriz em relação ao vértice A.*
Tese: $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC}$.

Demonstração:

Considere o triângulo $\triangle ABC$, tal que, $\overline{AP}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, construa por C uma reta paralela à bissetriz $\overline{AP}$ que intercepta a reta $\overleftrightarrow{BA}$, conforme Figura 3.9. Agora considere os triângulos $\triangle PAC$ e $\triangle ACE$, daí segue que $P\hat{A}C \cong A\hat{C}E$, pois $\overline{AP} \parallel \overline{CE}$. Por hipótese $B\hat{A}P \cong P\hat{A}C$, por construção $P\hat{A}C \cong A\hat{C}E$, também por construção $B\hat{A}P \cong A\hat{E}C$, então, o ângulo $A\hat{C}E \cong A\hat{E}C$, assim o triângulo $\triangle ACE$ é isósceles de base $\overline{CE}$, daí segue que:

$$\overline{AE} = \overline{AC}$$

Do triângulo $\triangle BEC$ temos que,

$$\overline{BE} = \overline{AB} + \overline{AE},$$

então substituindo $\overline{AC}$ no lugar de $\overline{AE}$, temos,

$$\overline{BE} = \overline{AB} + \overline{AC} \text{ (1)}$$

Também do triângulo $\triangle BEC$, obtemos,

$$\overline{BC} = \overline{BP} + \overline{PC} \text{ (2)}$$

Considere também os triângulos $\triangle BAP$ e $\triangle BEC$, então:
(A) O ângulo $B\hat{A}P \cong B\hat{E}C$, pois são ângulos correspondentes.
(A) O ângulo $\hat{B}$ é comum aos dois triângulos.
Então pelo terceiro caso AA, de semelhança de triângulos $\triangle BAP \sim \triangle BEC$.
Portanto

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} \text{ (3)}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), concluímos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB} + \overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BP} + \overline{PC}} \Rightarrow \overline{AB} \cdot (\overline{BP} + \overline{PC}) = \overline{BP} \cdot (\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BP} + \overline{AB} \cdot \overline{PC} = \overline{BP} \cdot \overline{AB} + \overline{BP} \cdot \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{PC} = \overline{BP} \cdot \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$$

■

Exemplo 3.2. *Em um triângulo $\triangle ABC$, seja P o pé da bissetriz interna relativa ao lado $\overline{BC}$. Construa o triângulo com régua e compasso, conhecendo os comprimentos $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ e $\overline{AB}$*

Solução: 6. *Para obtermos êxito na construção do triângulo $\triangle ABC$, temos que mostrar que vale a aplicação do teorema da bissetriz interna, ou seja:*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PC}}{PB}$$

Então vamos construir o triângulo solicitado passo a passo.

Descrição dos passos

1. *Sejam a reta s e os pontos C e D, tal que $C, D \in s$;*

2. *Construa duas circunferências de raio r, tal que, $r < \overline{CD} < 2r$, sendo uma com centro no ponto C e a outra de centro em D;*

3. *Seja A o ponto de interseção das duas circunferências, daí segue que o triângulo $\triangle ACD$ é isósceles de base $\overline{CD}$, isto é:*
$$A\hat{C}D \cong A\hat{D}C$$

4. *Trace pelos pontos D e A a reta t e pelo ponto C construa a reta u, que intercepta a reta t no ponto B;*

5. *Por A, trace uma reta $v \parallel s$, que intercepta a reta u em P;*

6. *Pelo teorema de Tales, temos que, $B\hat{A}P \cong A\hat{D}C$ e $P\hat{A}C \cong A\hat{C}D$, como $A\hat{D}C \cong A\hat{C}D$ pela descrição 3, então $B\hat{A}P \cong P\hat{A}C$, assim $\overline{AP}$ é bissetriz de $B\hat{A}C$.*

Logo o ponto P é o pé da bissetriz relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo $\triangle ABC$

Portanto, conhecendo os valores dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BP}$ e $\overline{PC}$, vamos determinar o valor do lado $\overline{AC}$ do triângulo $\triangle ABC$, aplicando o teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PC}}{PB}$$

Teorema da bissetriz externa

Enunciaremos o teorema da bissetriz externa, mas não iremos demonstrar, a demonstração do mesmo é de forma análoga ao teorema da bissetriz interna, no entanto, se o leitor preferir demonstrar utilizando o teorema de Tales, fica a seu critério.

Teorema 3.4. *Se a bissetriz de ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos subtrativos proporcionais aos lados ajacentes, ou seja.*

Seja o triângulo $\triangle ABC$, conforme Figura 3.11, se o ponto Q é o pé da bissetriz externa em relação ao vértice A, então:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{QC}.$$

Exemplo 3.3. *Sejam o triângulo $\triangle ABC$ e P e M respectivamente os pés da bissetriz interna e da mediana relativas ao lado $\overline{BC}$. Se P e M coincidirem prove que o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$.*

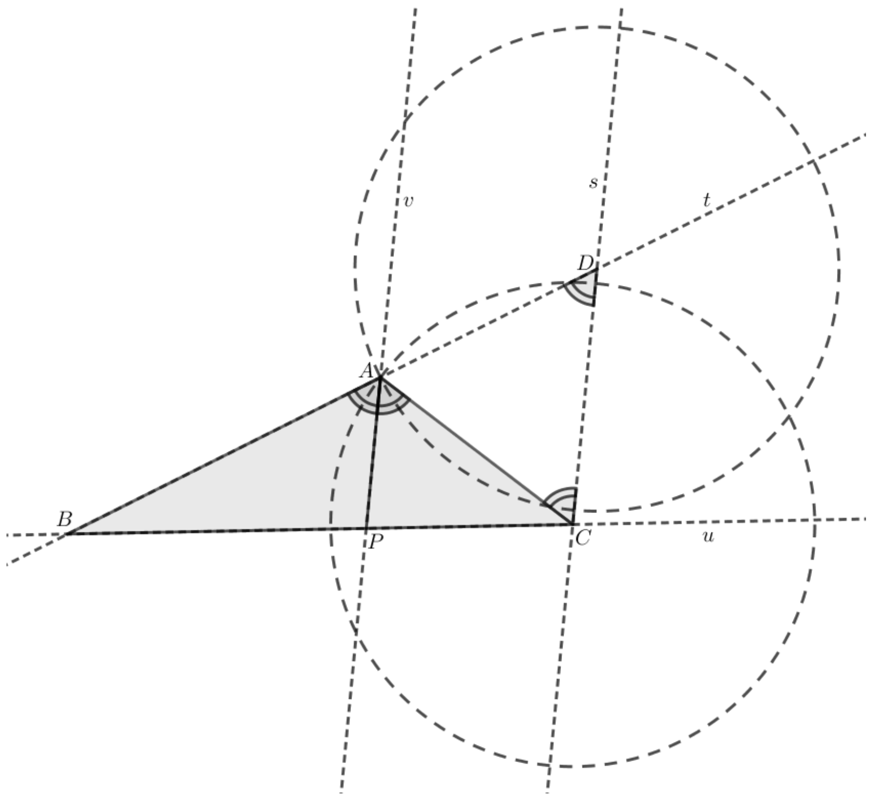

Figura 3.10: Construção do triângulo com régua e compasso

.

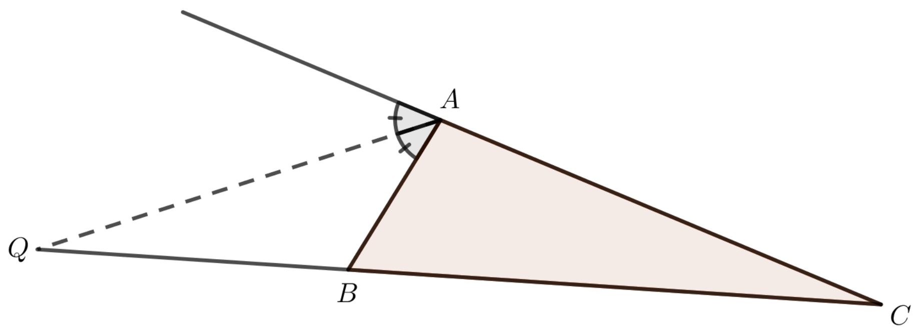

Figura 3.11: Teorema da Bissetriz Externa

.

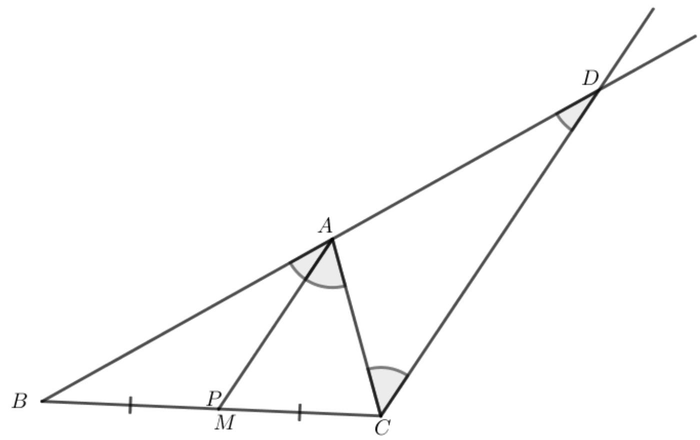

Figura 3.12: Exemplo de aplicação do teorema da bissetriz interna

.

Solução: 7. *Seja um triângulo qualquer $\triangle ABC$, onde os pontos P e M são, respectivamente, o pé da bissetriz interna e da mediana relativas ao lado $\overline{BC}$; veja figura 3.12*

Considere que P e M são coincidentes, então a bissetriz interna $\overline{AP}$ e a mediana $\overline{AM}$, coincidem também; observe a figura 3.12

Trace pelo ponto C uma reta paralela à bissetriz $\overline{AP}$ que interceptará o prolongamento de $\overline{BA}$ no ponto D, então $\overline{AP} \parallel \overline{CD}$, conforme figura 3.12.

Hipótese: $B\hat{A}P \cong P\hat{A}C$; e $\overline{BP} \cong \overline{PC}$.

Tese: *O triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$.*

Os ângulos $B\hat{A}P$ e $A\hat{D}C$, são ângulos correspondentes, ou seja, $B\hat{A}P \cong A\hat{D}C$;

Os ângulos $P\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$ são alternos internos, isto é, $P\hat{A}C \cong A\hat{C}D$;

Por hipótese, $B\hat{A}P \cong P\hat{A}C$, como $B\hat{A}P \cong A\hat{D}C$ e $P\hat{A}C \cong A\hat{C}D$, $A\hat{D}C \cong A\hat{C}D$, assim o triângulo $\triangle ACD$ é isósceles de base $\overline{CD}$, logo $\overline{AD} = \overline{AC}$;

Pelo Teorema de Tales, temos da figura 3.12 que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}},$$

pois $\overline{AD} = \overline{AC}$;

Também por hipótese têm-se, $\overline{BP} = \overline{PC}$, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BP}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 1 \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$$

Portanto o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$.

Relações métricas em Triângulos Retângulos

Para estabelecermos as relações métricas em triângulos retângulos, utilizaremos os casos de semelhança de triângulos para demonstrar a proposição destas relações.

Proposição 3.5. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = x$, $\overline{BH} = y$ e $\overline{AH} = h$, conforme Figura 3.13, temos:*

1. $ah = bc$.
2. $b^2 = ax$ e $c^2 = ay$.
3. $h^2 = xy$.
4. $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração:

Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABH$, daí temos que $A\hat{H}B \cong C\hat{A}B$ e $A\hat{B}H \cong C\hat{B}A$, então $\triangle ABC \sim \triangle ABH$ pelo caso AA de semelhança de triângulos, ou seja:

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{y}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = ay$$

ou, ainda

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow ah = bc$$

Considere também os triângulos $\triangle AHC$ e $\triangle ABC$, daí têm-se, $C\hat{A}H \cong A\hat{B}C$ e $B\hat{A}C$ cong $A\hat{H}C$, então $\triangle AHC \sim \triangle ABC$ pelo caso AA de semelhança de triângulos. isto é

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = ax$$

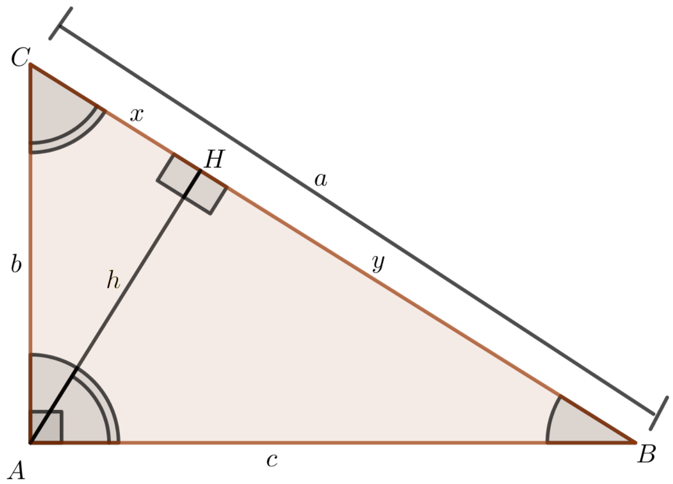

Figura 3.13: Relações métricas num triângulo retângulo

.

Somando membro a membro as relações $b^2 = ax$ e $c^2 = ay$, teremos

$$b^2 + c^2 = ax + ay \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (x + y), \text{ como } x + y = a, \text{ então } b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

Multiplicando membro a membro as relações $b^2 = ax$ e $c^2 = ay$, obtemos

$$b^2 \cdot c^2 = ax \cdot ay \Rightarrow b^2c^2 = a^2xy \Rightarrow (\frac{bc}{a})^2 = xy, \text{ como } h = \frac{bc}{a}, \text{ então } h^2 = xy.$$

■

Observação 3.1. *A relação $b^2 + c^2 = a^2$ é denominada como Teorema de Pitágoras, que Euclides mostrou em sua obra "Os Elementos", a sua relevância para a Geometria e suas aplicações. Este teorema revelou-se essencial à formulação do método analítico de Renê Descartes para análise de problemas geométricos e depois de sucessivas generalizações da relação de Pitágoras permitiram o desenvolvimento, nos séculos XIX e XX, da teoria dos espaços vetoriais com produto interno e, mais particularmente, dos dos espaços de Hilbert, assim como da Geometria Diferencial. Assim, mais que uma simples herança cultural da humanidade, o teorema de Pitágoras constitui-se em verdadeira pedra angular da moderna sociedade do conhecimento.*

3.5 Aplicações de Semelhança de Triângulos

Esta seção coleciona algumas aplicações interessantes de semelhança de triângulos, nosso primeiro resultado estabelece uma recíproca do teorema da bissetriz. Para o enunciado do mesmo, recorde que, em todo triângulo, as bissetrizes interna e externa relativas a um mesmo vértice são perpendiculares.

Aplicação 6. *Recíproca do teorema da bissetriz*

Proposição 3.6. *Seja um triângulo $\triangle ABC$ e P e Q pontos sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, com $P \in \overline{BC}$ e $Q \notin \overline{BC}$. Se*

$$P\hat{A}C = 90 \text{ e } \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}},$$

então $\overline{AP}$ é a bissetriz interna e $\overline{AQ}$ é a bissetriz externa do ângulo $B\hat{A}C$.

Demonstração:

Trace pelo ponto P, a paralela a $\overleftrightarrow{AQ}$, e sejam U e V seus pontos de interseção com $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, de acordo com a Figura 3.14, com isso $\overline{AQ} \parallel \overline{VU}$.

Como $\overline{AQ} \parallel \overline{VU}$, então $B\hat{U}P = B\hat{A}Q$ e $P\hat{V}C = Q\hat{A}C$, pois são ângulos correspondentes, respectivamente, por outro lado, $U\hat{B}P = A\hat{B}Q$, pois são ângulos opostos pelo vértice, e $P\hat{C}V = B\hat{C}A$, pois são ângulos comuns.

Portanto, pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos que, $\triangle BUP \sim \triangle BAQ$ e $\triangle PCV \sim \triangle QCA$, de forma que,

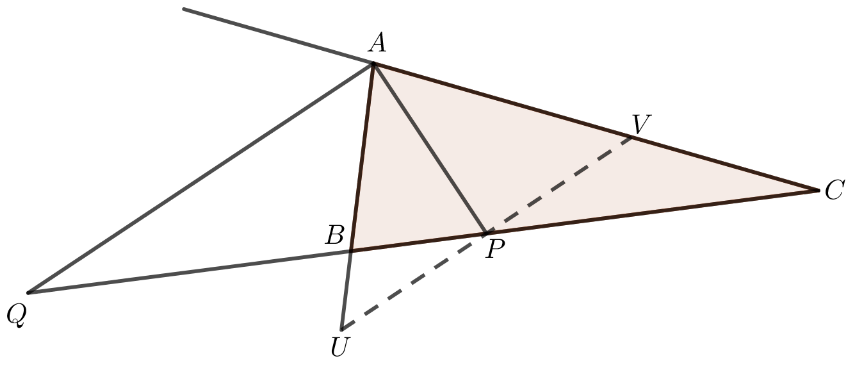

Figura 3.14: Recíproca do teorema da bissetriz

.

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{PU}}{\overline{QA}} \text{ e } \frac{\overline{PC}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{PV}}{\overline{AQ}}$$

Mas, como por hipótese $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{QC}}$*, as relações de semelhança acima nos dão,*

$$\frac{\overline{PU}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{PV}}{\overline{AQ}} \Rightarrow \overline{PU} = \overline{PV}, \text{ assim } \overline{AP} \perp \overline{AQ}.$$

Agora, de $\overline{AP} \perp \overline{AQ}$ *e* $\overline{AP} \parallel \overline{AQ}$*, temos* $\overline{UV} \perp \overline{AP}$*, de sorte que* $\overline{AP}$ *é mediana e altura do triângulo* $\triangle AUV$*, assim o ângulo* $P\hat{A}Q = 90$*.*

Dessa forma $\overline{AP}$ *é a bissetriz interna e* $\overline{AQ}$ *é a bissetriz externa do ângulo* $B\hat{A}C$*.* ■

Aplicação 7. Círculo de Apolônio

Vamos enunciar e provar agora, o teorema do Círculo de Apolônio, Apolônio de Perga, matemático grego do século III a.C deu grandes contribuições à Geometria Euclidiana, notadamente ao estudo das cônicas.

Teorema 3.5. *Dados um real positivo* $k \neq 1$ *e pontos* B *e* C *no plano, o Lugar Geométrico(LG) dos pontos* A *do plano tais que* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = k$ *é o círculo com diâmetro* $\overline{PQ}$*, tais que,* $P \in \overline{BC}$ *e* $Q \in \overleftrightarrow{BC}$*, onde* $Q \notin \overline{BC}$*, são os pontos tais que:*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC} = k$$

Hipótese*:* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = k$*, onde* $k \neq 1$*.*

Tese*:* $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = k$*, onde* $k \neq 1$*.*

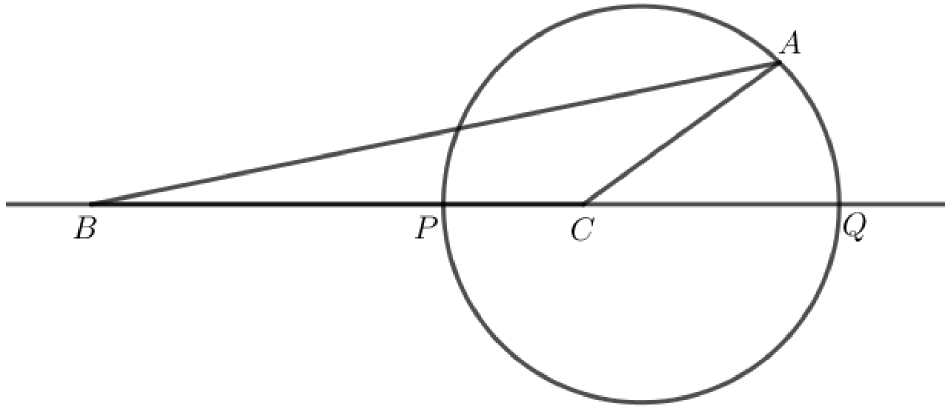

Figura 3.15: Círculo de Apolônio sobre $\overline{BC}$ na razão k

.

Demonstração:

Sejam a reta r e os pontos A, B e C distintos, tais que, $B, C \in r$ e $A \notin r$;

Considere o triângulo $\triangle ABC$ e trace as bissetrizes interna e externa do ângulo $B\hat{A}C$, que interceptam respectivamente, a reta r nos pontos P e Q, tais que, $P \in \overline{BC}$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC}$ onde $Q \notin \overline{BC}$, assim o ponto P é o pé da bissetriz interna e Q é o pé da bissetriz externa;

Em seguida determine o ponto médio O do segmento $\overline{PQ}$, como centro do círculo de diâmetro $\overline{PQ}$;

Suponhamos que LG dos pontos A seja o plano de diâmetro $\overline{PQ}$, tais que, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = k$, onde $k \neq 1$.

Assim pelos teoremas das Bissetrizes interna e externa, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = k, \text{ onde } k \neq 1$$

Portanto, o LG dos pontos A do plano, tal que, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = k$, onde $k \neq 1$ é o círculo de diâmetro $\overline{PQ}$. ∎

Aplicação 8. Teorema de Menelaus

Menelaus marcou um ponto importante na trigonometria esférica, tendo o seu trabalho sido aplicado em Astronomia. E ainda hoje, Menelaus é lembrado pelo teorema que, conhecido anteriormente no plano, foi demonstrado por Menelaus em geometria esférica.

Teorema 3.6. *Considerem-se três pontos L, M e N, respectivamente, em cada um dos lados ou das retas suportes dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo $\triangle ABC$. Então os pontos L, M e N são colineares se, e somente se,*

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

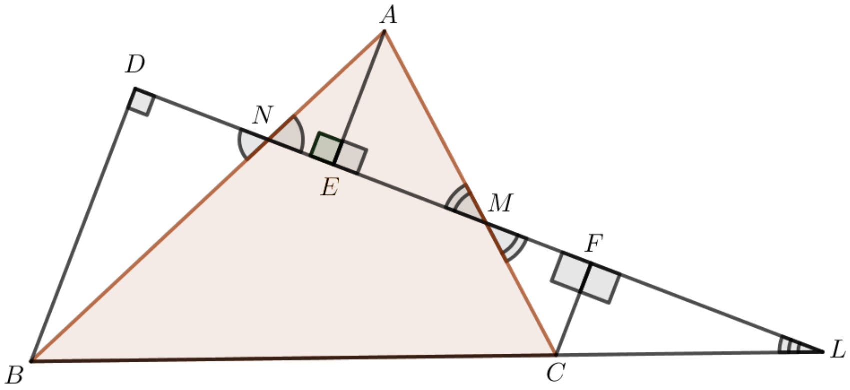

Figura 3.16: Teorema de Menelau

.

Demonstração: *Para demonstrarmos este teorema, temos que provar:*

$$\Rightarrow \textit{Se os pontos } L, M \textit{ e } N \textit{ são colineares, então, } \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1.$$

$$\Leftarrow \textit{Se } \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1, \textit{ então os pontos } L, M \textit{ e } N \textit{ são colineares.}$$

$\Rightarrow$ (Ida)

Considere o triângulo $\triangle ABC$, considere também três pontos L, M e N colineares, respectivamente, em cada um dos lados ou das três retas suportes dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, como mostra a Figura 3.16;

Trace pelos vértices A, B e C do triângulo $\triangle ABC$ da Figura 3.16, perpendiculares à reta suporte dos pontos L, M e N, que se interceptam respectivamente nos pontos E, D e F;

Agora considere os triângulos $\triangle BDN$ e $\triangle AEN$, daí segue que, $B\hat{D}N \cong A\hat{E}N$, pois ambos medem 90° e $B\hat{N}D \cong A\hat{N}E$, são ângulos opostos pelo vértice.

Portanto, pelo caso AA de semelhança de triângulos $\triangle BDN \cong \triangle AEN$, em particular,

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BD}} \text{ (i)}$$

De forma análoga, temos também que $\triangle FMC \cong \triangle AME$, em particular,

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{AE}} \text{ (ii)}$$

Considere os triângulos $\triangle LFC$ e $\triangle LDB$, daí segue que, $L\hat{F}C \cong L\hat{D}B$, pois ambos medem 90° e $F\hat{L}C \cong D\hat{L}B$, são ângulos comuns aos dois triângulos.

Portanto, pelo caso AA de semelhança de triângulos $\triangle LFC \cong \triangle LDB$, em particular,

$$\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{BD}} \text{ (iii)}$$

Enfim, multiplicando membro a membro os itens (i), (ii) e (iii), concluímos que:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

Vamos deixar como exercício a $\Leftarrow$ (volta) desta demonstração para o leitor. ■

Aplicação 9. Teorema de Ceva

Giovanni de Ceva foi um matemático italiano que publicou o Teorema de Menelaus em 1678 e em seguida, um segundo teorema de sua própria autoria, relacionado com o teorema de Menelaus, que é o Teorema de Ceva.

Uma ceviana de um triângulo é um segmento que liga um vértice a um ponto ao lado oposto. Logo, se M, N e P são pontos dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente de um triângulo $\triangle ABC$, os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ são cevianas.

Teorema 3.7. *Sejam M, N e P pontos, respectivamente, sobre os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo $\triangle ABC$. As cevianas $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ e $\overline{AP}$ intersectam-se em um ponto P, se e somente se,*

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

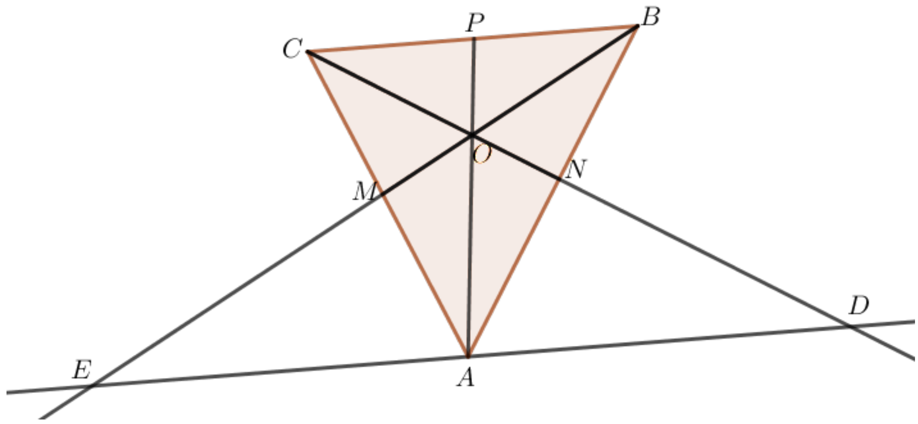

Figura 3.17: Teorema de Ceva

.

Demonstração:

Suponhamos que as cevianas $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ e $\overline{AP}$ do triângulo $\triangle ABC$, concorrem no ponto O. Trace pelo ponto A uma reta r paralela a reta suporte do lado $\overline{BC}$. Em seguida prolongaremos as cevianas $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ até interceptar a reta r nos pontos E e D, respectivamente conforme figura 3.17.

1. *Considere os triângulos $\triangle ADN$ e $\triangle BCN$, conforme figura 3.17, note que o ângulo $A\hat{D}N \cong B\hat{C}N$, pois são correspondentes e $B\hat{O}C \cong D\hat{O}E$, ângulos opostos pelo vértice, então pelo caso AA de semelhança de triângulos concluímos que, $\triangle ADN \sim \triangle BCN$, assim,*

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CB}}$$

2. *De forma análoga na figura 3.17 temos que, $\triangle BOC \sim \triangle DOE$ então,*

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$$

3. *Analogamente, na figura 3.17 têm-se também que, $\triangle AEM \sim \triangle CMB$, logo,*

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AE}}$$

4. *Multiplicando membro a membro as relações 1, 2 e 3 teremos,*

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

Deixaremos para o leitor a recíproca do teorema de Ceva, onde quando for dado um triângulo $\triangle ABC$ e os pontos M, N e P sobre os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, se ocorrer que,

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

Então as cevianas $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ e $\overline{AP}$ concorrem ao mesmo ponto G.

■

Lista de Exercícios

Nesta lista de exercícios vamos relevantes a semelhança de triângulos, sendo que desta lista iremos resolver algumas questões propostas e as outras aqui destacadas ficarão para o leitor solucionar.

1. Na figura 3.18, D é o ponto médio de $\overline{AB}$ e E é o ponto médio de $\overline{AC}$. Mostre que os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são semelhantes.

   Solução: 8. *Considere os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$, como D é o ponto médio de $\overline{AB}$ e E é o ponto médio de $\overline{AC}$ então, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ assim pelo Teorema de Tales temos,*

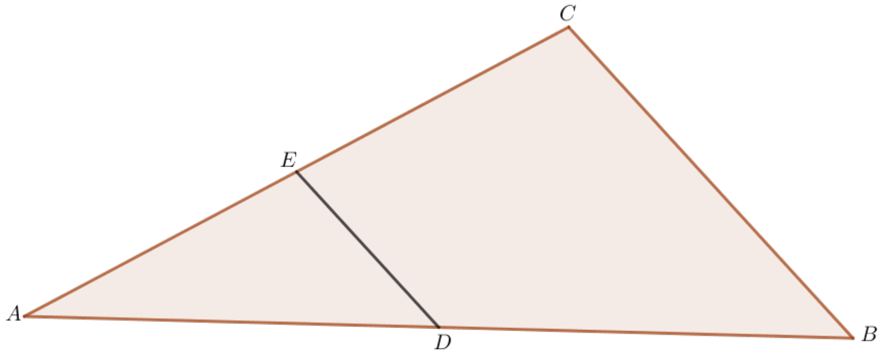

Figura 3.18:

.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Têm-se ainda que o ângulo $\hat{A}$ é comum aos dois triângulos. Portanto pelo caso LAL de semelhança de triângulos, concluímos que:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

2. Mostre que dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.

3. Mostre que são semelhantes dois triângulos isósceles que têm iguais os ângulos opostos à base.

4. Sejam um quadrado e um triângulo equilátero, respectivamente, cujos lados medem a. Determine a razão entre suas áreas.

5. Prove que alturas correspondentes em triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

6. Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30 e 60 graus, então seu menor cateto mede a metade do comprimento da hipotenusa. (Faça uso do resultado obtido no exercício 5)

7. Na figura 3.19, têm-se que $\triangle BDA$ e $\triangle ABC$ são triângulos semelhantes, sendo que a semelhança a que leva $A\hat{B}D$ em $B\hat{A}C$, $B\hat{D}A$ em $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$ em $A\hat{C}B$. Conclua que o triângulo $\triangle BDA$ é isósceles.

8. Prove que, se em um triângulo retângulo o menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa, então seus ângulos agudos são 30 e 60 graus.

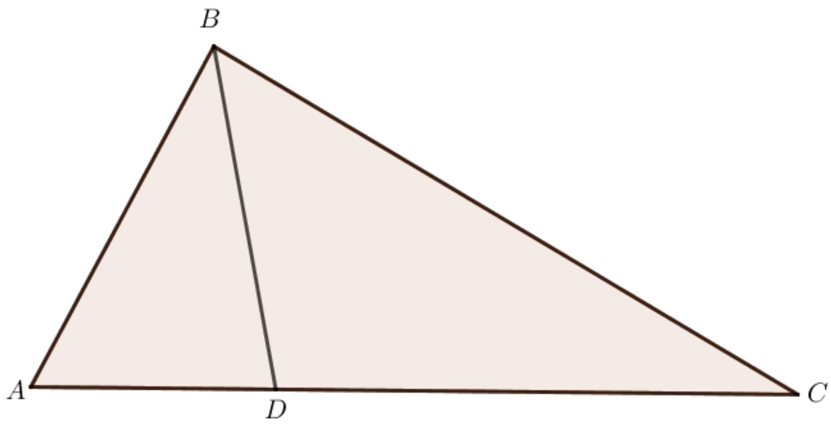

Figura 3.19:

.

9. Sejam o triângulo $\triangle ABC$ e os pontos P e M, respectivamente os pés das bissetriz interna e da mediana relativas ao lado $\overline{BC}$. Se P e M coincidem, prove que o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$.

10. Em um triângulo $\triangle ABC$, sejam o ponto P o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A. Marcamos, respectivamente, sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, pontos M e N tais que $\overline{BM} = \overline{BP}$ e $\overline{CN} = \overline{CP}$. Prove que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

11. Construa com régua e compasso o triângulo o triângulo $\triangle ABC$, conhecendo os comprimentos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ das medianas do $\triangle ABC$, respectivamente relativas aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

12. O triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A e o ponto $P \in \overline{BC}$ é o pé da bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$. Calcule a distância de P ao lado $\overline{AC}$ em função de $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$

13. Seja um triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A e tal que $\overline{AB} = 1$. A bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ intersecta o lado $\overline{BC}$ em D. Sabendo que a reta r, que passa por D e é perpendicular a $\overline{AD}$, intersecta o lado $\overline{AC}$ em seu ponto médio, calcule o comprimento do lado $\overline{AC}$.

14. Na figura 3.20, o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero, as três retas ligando os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são paralelas à $\overline{BC}$, dividem o lado $\overline{AB}$ em quatro segmentos congruentes. se $\overline{DG} + \overline{EH} + \overline{FI} = 18$. Determine o perímetro do triângulo $\triangle ABC$.

15. No triângulo $\triangle ABC$ da figura 3.21, D é o ponto médio de $\overline{AB}$ e E o ponto sobre o lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{EC}$. Sabendo que $A\hat{D}C = B\hat{A}E$, calcule o valor de $B\hat{A}C$.

    Solução: Por construção, de acordo com a figura 3.21 traçaremos as cevianas $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$ e seja P o ponto de interseção desses segmentos. Seja α um ângulo tal que $\alpha = A\hat{D}C = B\hat{A}E \Leftrightarrow \alpha = A\hat{D}P = D\hat{A}P$. Como $\alpha = A\hat{D}P = D\hat{A}P$, então o triângulo $\triangle ADP$ é isósceles de base $\overline{AD}$ e consequentemente $\overline{AP} \cong \overline{DP}$. Aplicando o Teorema

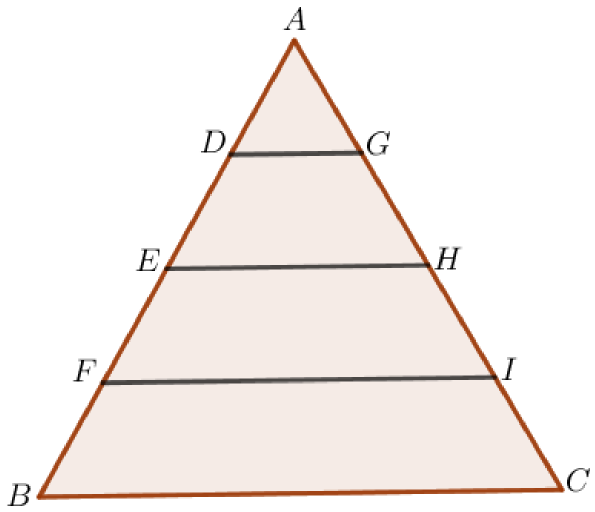

Figura 3.20:
.

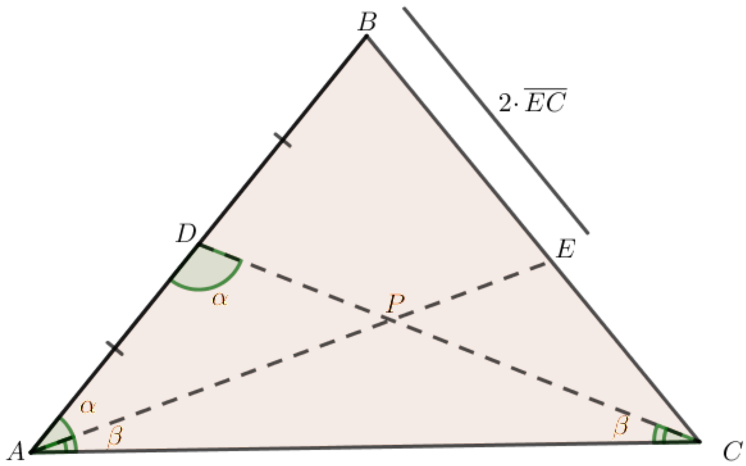

Figura 3.21: Menelaus
.

de Menelaus ao triângulo $\triangle BCD$, uma vez que os pontos A, P e E são colineares, vamos obter:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = 1 \Rightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \overline{PC} = \overline{PD},$$

assim $\overline{AP} = \overline{PC}$.

Agora seja $\alpha = D\hat{A}P = A\hat{D}P$ e $\beta = C\hat{A}P = A\hat{C}P$. Verifique que no triângulo $\triangle ACD$ a soma dos ângulos internos será:

$$(\alpha + \beta) + \beta + \alpha = 180° \Rightarrow 2 \cdot \beta + 2 \cdot \alpha = 180° \Rightarrow \beta + \alpha = 90°$$

Assim, como o ângulo $B\hat{A}C = \alpha + \beta$, concluímos que $B\hat{A}C = 90°$.

16. Na figura 3.22, tem-se $\overline{AB} = \overline{AC}$. Mostre que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ se, e somente se, $E\hat{C}B = C\hat{B}D$.

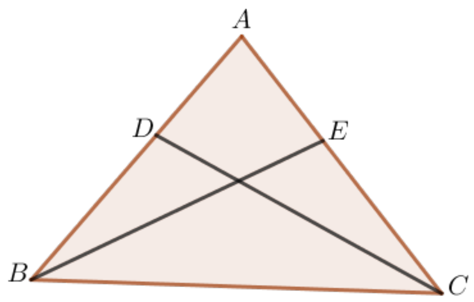

Figura 3.22:

.

17. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ triângulos semelhantes, com razão igual a k. Sejam m_a e m'_a, h_a e h'_a, β_a e β'_a respectivamente os comprimentos das medianas, alturas e bissetrizes internas relativas aos vértices A e A', também respectivamente. Prove que

$$\frac{m_a}{m'_a} = \frac{h_a}{h'_a} = \frac{\beta_a}{\beta'_a} = k.$$

18. Sejam $ABCD$ um paralelogramo de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e lados $\overline{AB} = 10cm$, $\overline{AD} = 24cm$. Sejam ainda, E e F respectivamente oe pés das perpendiculares baixadas desde A aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. Sabendo que $\overline{AF} = 20cm$, calcule o comprimento de $\overline{AE}$.

19. Em um triângulo $\triangle ABC$, seja M o ponto Médio do lado $\overline{AC}$ e N o pé da bissetriz interna relativa relativa ao vértice B. Prolongue a semirreta $\overrightarrow{CB}$ até o ponto D, tal que $\overline{DB} = \overline{AB}$. Se $\overline{BN}$ intersecta $\overline{DM}$ em P, prove que $B\hat{A}P = \hat{} ACB$.

20. Em um triângulo $\triangle ABC$ com um ângulo reto em B, são traçadas a bissetriz interior $\overline{BD}$ e as cevianas $\overline{AM}$ e $\overline{CL}$ concorrentes no ponto O. Sabendo que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$, $2 \cdot \overline{CM} = 5 \cdot \overline{BM}$ e $\overline{BL} = 2cm$, encontre o valor do segmento $\overline{BC}$.

21. Em um triângulo $\triangle ABC$ são traçadas uma bissetriz $\overline{BQ}$, uma mediana $\overline{AM}$ e uma ceviana $\overline{CP}$, concorrentes entre si. Se $\overline{AP} = 4cm$, $\overline{AQ} = 6cm$ e $\overline{QC} = 9cm$, calcule a medida do segmento $\overline{PQ}$.

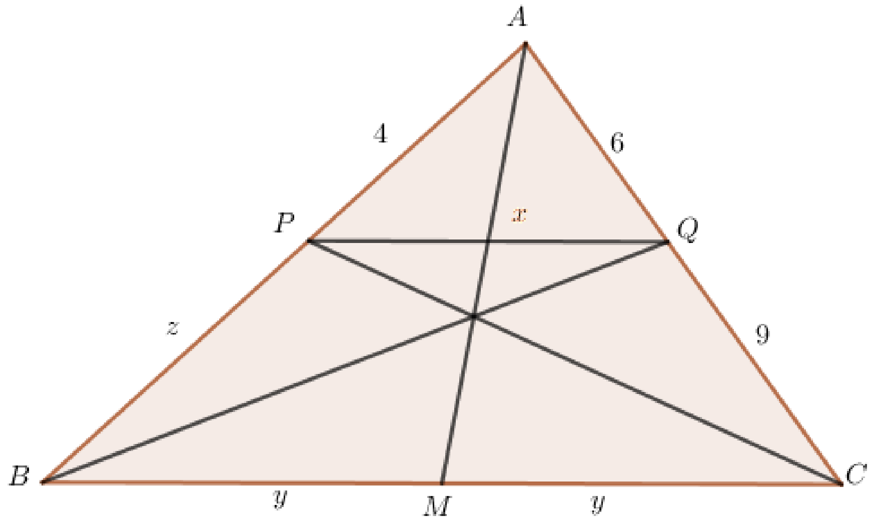

Figura 3.23: Ceva

.

Solução: 9. Seja $\overline{PQ} = x$, $\overline{MB} = \overline{MC} = y$ e $\overline{PB} = z$conforme figura 3.23. Como as três cevianas $\overline{BQ}$, $\overline{AM}$ e $\overline{CP}$ são concorrentes, podemos aplicar o Teorema de Ceva, então obtemos:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{z} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{9}{6} = 1 \Leftrightarrow 6z = 36 \Leftrightarrow z = 6.$$

Portanto, o segmento $\overline{PB} = 6cm$. Note que $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} =$. Então, pelo Teorema de Tales, $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$. Tem-se também que $\overline{BQ}$ é bissetriz interna, assim $P\hat{B}Q \cong Q\hat{B}C$ e $Q\hat{B}C \cong B\hat{P}Q$, pois são alternos internos. Logo, o triângulo $\triangle BPQ$ é isósceles de base $\overline{BQ}$. Portanto, $x = z = 6$, ou seja o segmento $\overline{PQ} = 6cm$.

22. Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, e M, N e P pontos respectivamente sobre os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, tais que $AMNP$ é um losango.

    (a) Calcule, em termos de a, b e c, o comprimento do lado do losango.

    (b) Mostre como construir com régua e compasso a posição do ponto M.

23. Em um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$, os lados não paralelos às bases são $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Pelo ponto de concurso P das diagonais de $ABCD$, tracemos o segmento $\overline{MN}$ paralelos às bases, com $M \in \overline{AD}$ e $N \in \overline{BC}$. Prove que P é o ponto médio de $\overline{MN}$ e que $\overline{MN}$ é igual à média harmônica de a e b, isto é, prove que

$$\overline{MN} = \frac{2ab}{a+b}$$

24. Em um trapézio $ABCD$, de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lados não paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, seja M o ponto médio da base $\overline{CD}$. O segmento $\overline{AM}$ intersecta a diagonal $\overline{AD}$ em F. Traçamos por F a reta r, paralela às bases. Se r intersecta os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ respectivamente em E, G e H, prove que $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$.

25. Seja $k \neq 1$ um real positivo. Prove que o círculo de Apolônio relativo a (B, C) e na razão k tem raio igual a $\dfrac{k}{k^2-1} \cdot \overline{BC}$.

26. Seja um triângulo $\triangle ABC$ cujos ângulos internos são menores que $120°$. Construa exteriormente ao $\triangle ABC$, triângulos equiláteros $\triangle BCD$, $\triangle ACE$ e $\triangle ABF$ (os quais são conhecidos como os Triângulos do $\triangle ABC$). Prove que:

    (a) Os círculos circunscritos aos triângulos $\triangle BCD$, $\triangle ACE$ e $\triangle ABF$ passam por um mesmo ponto P, denominado o Ponto de Fermat do $\triangle ABC$).

    (b) $A\hat{P}F = F\hat{P}B = B\hat{P}D = D\hat{P}C = C\hat{P}E = \hat{} EPA = 60°$.

    (c) $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$.

Capítulo 4

Questões do PROFMAT e IME

E pra finalizar este trabalho, vamos listar algumas questões resolvidas, relacionadas com o tema desta dissertação, das avaliações realizadas pelo Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e do Instituto Militar de Engenharia (IME).

1. $(PROFMAT - ENQ - 2015 - 2)$ A altura $\overline{CH}$ e a mediana $\overline{BK}$ são traçadas em um triângulo acutângulo $\triangle ABC$. Sabendo que $\overline{BK} \cong \overline{CH}$ e $K\hat{B}C = H\hat{C}B$, prove que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.

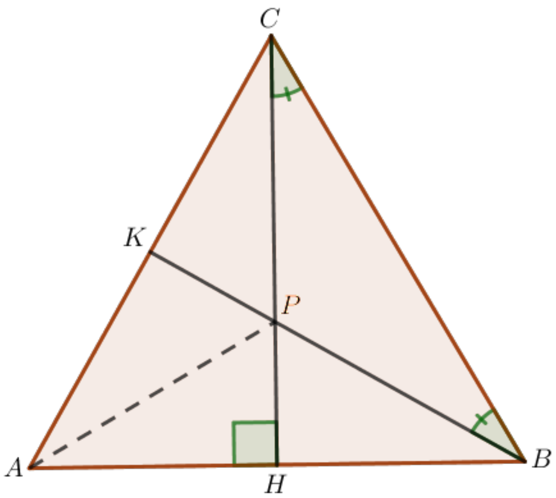

Figura 4.1:

.

Solução: 10. *Na figura 4.1, denotamos por P o ponto de interseção entre $\overline{BK}$ e $\overline{CH}$.*

Nos triângulos $\triangle KBC$ e $\triangle HCB$, temos $\overline{BK} \cong \overline{CH}$, $K\hat{B}C = H\hat{C}B$ e $\overline{CB} \cong \overline{BC}$, logo pelo caso LAL de congruência de triângulos, $\triangle KBC \cong \triangle HCB$ em particular, $C\hat{K}B = B\hat{H}C = 90°$, assim a mediana $\overline{BK}$ é também altura, mostrando que o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Da congruência entre os triângulos $\triangle KBC$ e $\triangle HCB$, concluímos que $\overline{BH} \cong \overline{CK}$.

Como o triângulo $\triangle BPC$ é isósceles, temos $\overline{CP} \cong \overline{BP}$ e, consequentemente, $\overline{PK} \cong \overline{PH}$. Com isso, $\overline{AH} \cong \overline{AK}$ e, como $\overline{BH} \cong \overline{CK}$, isto implica que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Como já concluímos que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, temos então $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$.

Portanto o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.

2. $(IME - 1997)$ Considere o cubo de bases $ABCD$ e $EFGH$, e arestas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$. Sejam as arestas iguais a $3m$ e os pontos M, N e P marcados de forma que $M \in \overline{AD}$, tal que $\overline{AM} = 2m$, $N \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AN} = 2m$ e $P \in \overline{BF}$, tal que $\overline{BP} = 0,5m$.

Solução: 11. *Seja o cubo de bases $ABCD$ e $EFGH$, arestas $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = 3m$, sejam também os pontos M, N e P marcados de forma que $M \in \overline{AD}$, tal que $\overline{AM} = 2m$, $N \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AN} = 2m$ e $P \in \overline{BF}$, tal que $\overline{BP} = 0,5m$.*

Trace os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{MP}$ e $\overline{MB}$.

considere o triângulo retângulo $\triangle MAN$, reto em $M\hat{A}N$, então pelo Teorema de Pitágoras, teremos:

$$\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 \Rightarrow \overline{MN}^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow \overline{MN} = 2\sqrt{2}.$$

considere o triângulo retângulo $\triangle PBN$, reto em $P\hat{B}N$, então pelo Teorema de Pitágoras, teremos:

$$\overline{NP}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{PB}^2 \Rightarrow \overline{NP}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

considere o triângulo retângulo $\triangle MAB$, reto em $M\hat{A}B$, então pelo Teorema de Pitágoras, teremos:

$$\overline{MB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow \overline{MB}^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow \overline{MB} = \sqrt{13}.$$

considere o triângulo retângulo $\triangle MBP$, reto em $M\hat{B}P$, então pelo Teorema de Pitágoras, teremos:

$$\overline{PM}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{PB}^2 \Rightarrow \overline{PM}^2 = (\sqrt{13})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{53}{4} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

considere o triângulo retângulo $\triangle MNP$, então:

$$2p = \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{MP} = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2} \Rightarrow 2p = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{53}}{2}$$

3. $(PROFMAT - ENQ - 2015 - 2)$ No paralelepípedo reto retângulo da figura 4.2, calcule a distância do vértice C ao segmento $\overline{AM}$, sendo M o ponto médio do lado $\overline{AM}$.

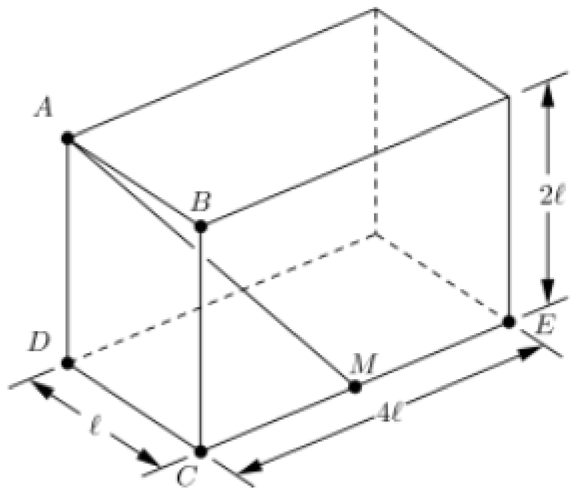

Figura 4.2:

.

Solução: 12. *Inicialmente, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle ABC$ na figura 4.3, calculamos o comprimento do segmento $\overline{AC}$:*

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = l^2 + (2l)^2 = (3l)^2 \Rightarrow \overline{AC} = l\sqrt{5}.$$

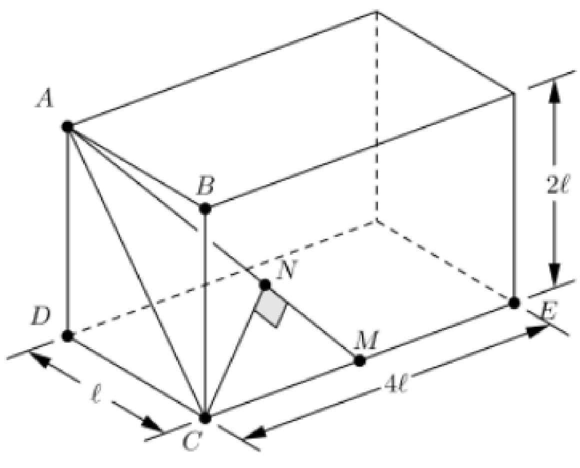

Figura 4.3:

.

Analisando agora o triângulo $\triangle ACM$ 4.3, concluímos que ele é retângulo em C pois o segmento $\overline{MC}$ é perpendicular à face $ABCD$ do paralelepípedo e, portanto, perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ contido nesta face.

Ainda observando o triângulo retângulo $\triangle ACM$, o segmento $\overline{CN}$ é perpendicular à hipotenusa $\overline{AM}$, pois $\overline{CN}$ representa a distância de C à reta $\overline{AM}$ e, por definição, a distância de um ponto à reta é sempre perpendicular a mesma.

Então, aplicando novamente o teorema de Pitágoras temos:

$$\overline{AM}^2 = (2l)^2 + \left(l\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow \overline{AM} = 3l.$$

Logo, utilizando a relação em que o produto da hipotenusa pela altura correspondente é igual ao produto dos catetos, assim, temos:

$$\overline{AM} \cdot \overline{CN} = \overline{AC} \cdot \overline{CM} \Rightarrow 3l \cdot \overline{CN} = l\sqrt{5} \cdot 2l$$

Logo,

$$\overline{CN} = \frac{2l\sqrt{5}}{3}.$$

4. $(PROFMAT - ENQ - 2015 - 1)$ As diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$ do pentágono regular $ABCDE$ de lados de medida a, intersectam no ponto P. Determine $\overline{AP}$ e $\overline{PD}$ em função de a, como mostra a figura 4.4.

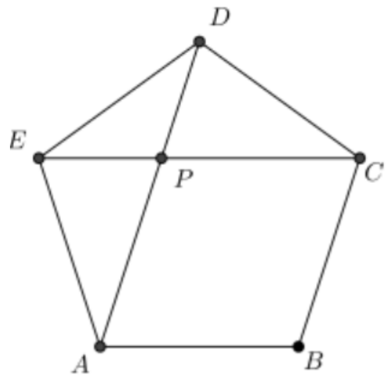

Figura 4.4:

.

Solução: 13. *Cada ângulo interno do pentágono regular tem medida*

$$\hat{a}_i = 180° - \frac{360°}{5} = 180° - 72° = 108°$$

Como $\overline{DC} \cong \overline{DE}$, o triângulo $\triangle CDE$ é isósceles de vértice D, e como $C\hat{D}E = 108°$, temo que

$$D\hat{C}E = D\hat{E}C = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$

Como os triângulos $\triangle CDE$ e $\triangle DEA$ cão congruentes pelo caso LAL, temos também $D\hat{A}E = A\hat{D}E = 36°$.

Como $E\hat{A}P = 36°$ e $P\hat{E}A = 108° - 36° = 72°$, temos que $E\hat{P}A = 180° - 36° - 72° = 72°$, logo o triângulo $\triangle EAP$ é isósceles de vértice A. Com isso, $\overline{AP} = \overline{EA} = a$.

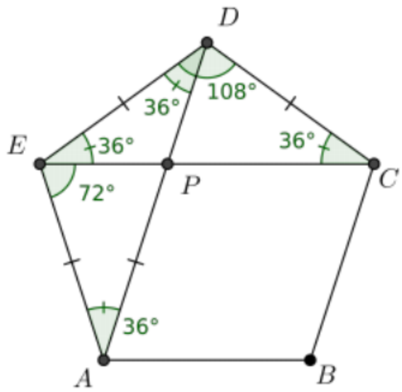

Figura 4.5:

.

Os triângulos $\triangle DPE$ e $\triangle DEA$ possuem, cada um, dois ângulos de medida $36°$, fazendo com que seus terceiros ângulos tenham também a mesma medida. Assim, esses triângulos são semelhantes, com

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

Como $\overline{EA} = \overline{DE} = a$ e $\overline{AD} = \overline{AP} + \overline{PD} = a + \overline{PD}$, temos

$$\frac{\overline{PD}}{a} = \frac{a}{a + \overline{PD}}$$

Logo,

$$\overline{PD} \cdot \left(a + \overline{PD}\right) = a^2 \Rightarrow \left(\overline{PD}\right)^2 + a\overline{AD} - a^2 = 0$$

Resolvendo a equação, teremos

$$\overline{PD} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, tomando a solução positiva, concluímos que

$$\overline{PD} = \frac{a \cdot \sqrt{5} - a}{2}$$

5. $(PROFMAT - ENQ - 2018 - 1)$ Dadas duas retas reversas r e s no espaço, definimos o ângulo entre r e s como sendo o menor ângulo entre r e s', onde s' é qualquer reta paralela a s e concorrente com r. Pode-se provar que este ângulo não depende da reta s' escolhida. Na figura 4.6, as retas reversas r e s são suporte, respectivamente, de uma diagonal do cubo e de uma diagonal de uma de suas faces.

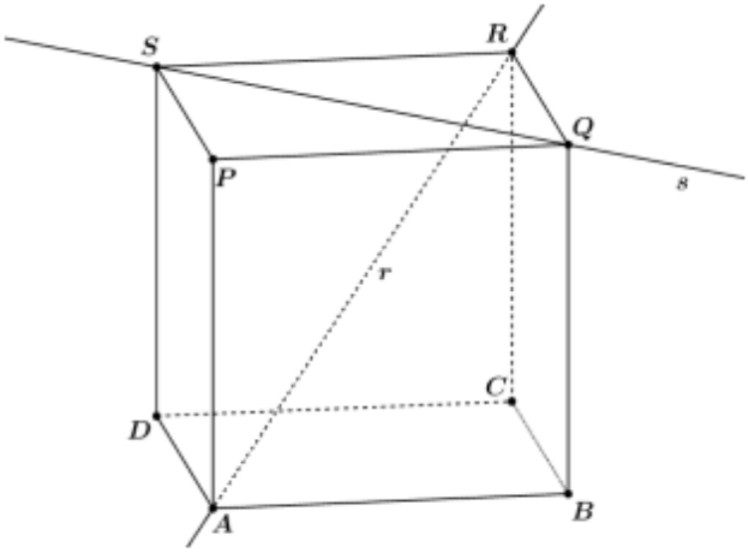

Figura 4.6:

.

Solução: 14. *Denotamos por a a aresta do cubo. Prolongando a aresta $\overline{CB}$ do cubo, obtemos o ponto E na interseção deste prolongamento com s'. Vamos calcular $\cos\theta$, onde θ é a medida do ângulo $R\hat{A}E$.*

Pelo caso LLL, os triângulos $\triangle SPQ$ e $\triangle DAB$ da figura 4.7 são congruentes. Além disso, como s' é paralela a $\overline{BD}$, e $\overline{AD}$ é paralelo a $\overline{EB}$, O quadrilátero $AEBD$ será um paralelogramo. Com isso, $\overline{BE} = \overline{AD} = a$ e $\overline{AE} = \overline{BD} = a\sqrt{2}$.

Temo ainda, Pelo Teorema de Pitágoras, que

$$\overline{RE}^2 = \overline{RC}^2 + \overline{CE}^2 = a^2 + (2a)^2 \Rightarrow \overline{RE} = a\sqrt{5}.$$

O triângulo $\triangle RAE$ tem, lados de medidas $\overline{AR} = a\sqrt{3}$, $\overline{AE} = a\sqrt{2}$ $\overline{RE} = a\sqrt{5}$.

Pela lei dos cossenos, obtemos

$$\overline{RE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AR}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AR} \cdot \cos\theta,$$

logo,

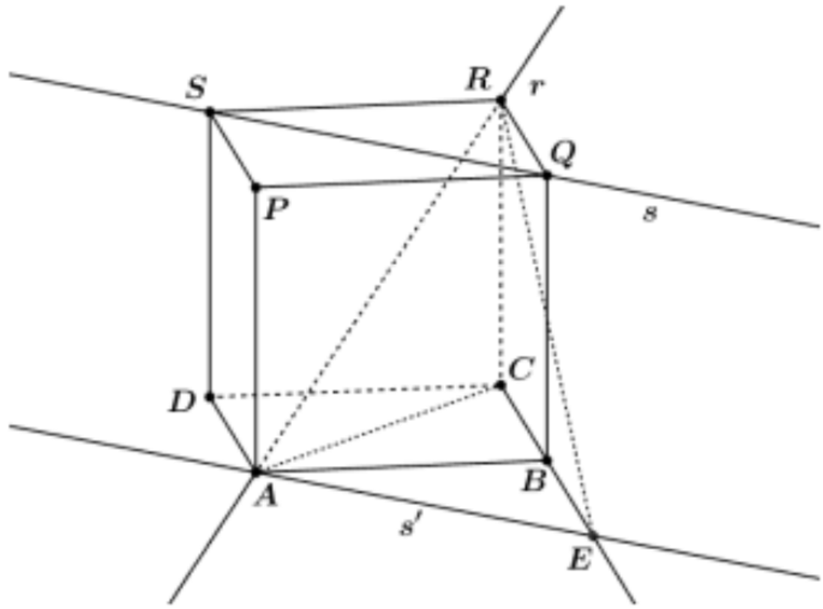

Figura 4.7:

.

$$\left(a\sqrt{5}\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}\cos\theta \Rightarrow$$
$$5a^2 = 2a^2 + 3a^2 - 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}\cos\theta,$$

e, então

$$0 = -2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AR} \cdot \cos\theta,$$

Com isso, $\cos\theta = 0$ *e, portanto, o ângulo entre* r *e* s' *mede* $90°$.

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho apresentamos vários conceitos, exemplos, teoremas e aplicações relacionados à Congruência e Semelhança de triângulos, dentre eles o teorema do triângulo isósceles no desenvolvimento da congruência, os teoremas das bissetrizes internas e externas, os teoremas de Menelaus e Ceva, círculo de Apolônio entre outros que foram aqui destacados e não podemos deixar de ressaltar a importância do auxílio de régua e compasso na resolução vários exemplos e aplicações. Vale ressaltar também o uso do GeoGebra na construção das figuras deste trabalho, pois através desse software matemático que facilita a compreensão do assunto estudado.

Enfim, esta dissertação teve como motivação apresentar à congruência e semelhança de triângulos, além de suas proporcionalidades, uma vez que a dificuldade de aprendizagem pelos alunos do ensino básico é notória, visto que é dada sem fundamentos, além disso, apresentar aos professores e colegas um material suplementar de qualidade com uma linguagem objetiva e abordagem didática que parte de exemplos simples para alguns que realmente merecem uma maior atenção para serem compreendidos. Pensamos assim, que estamos contribuindo para o ensino-aprendizagem deste componente curricular considerado difícil por alunos e professores.

Referências Bibliográficas

[1] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Geometria*. Coleção PROFMAT, SBM. 1.ed. Rio de Janeiro: DRQ Gráfica e Editora LTDA, 2013.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*: Coleção do Professor de Matemática, 11.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] DOLCE, Osvaldo.; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. Vol.9. 7.ed. São Paulo: ATUAL, 1993.

[4] ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012.

[5] LIMA, Anna thecya Oliveira. *Teorema de Menelaus e de Ceva: Apresentação, Demonstração e Aplicação*. Teresina: UFP- PI, 2016.

[6] OLIVEIRA, Mateus Rodrigues de. *Explorando Lugares Geométricos Através da Resolução de Problemas*. São Carlos: USP - SP, 2016.

[7] FREITAS, Vinícius Paulo de. *Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações*. Manaus: UFAM - AM, 2013.

[8] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro, SBM, 2007. Edição Especial.