Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

UMA ABORDAGEM VISUAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Rosa Cordelia Novellino de Novaes

Rio de Janeiro
2009

UMA ABORDAGEM VISUAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Rosa Cordelia Novellino de Novaes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Lílian Nasser

Rio de Janeiro

Novembro de 2009

UMA ABORDAGEM VISUAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Rosa Cordelia Novellino de Novaes

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Profª. Drª. Lílian Nasser
UFRJ / SENAI / CETIQT
Orientadora / Presidente da Banca Examinadora

____

Profª. Drª. Claudia Coelho de Segadas Vianna
Instituto de Matemática – UFRJ

____

Prof. Dr. Nei Rocha
Instituto de Matemática – UFRJ

____

Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho
IMPA

Dedico este trabalho à minha Mãe Maria Rosa Ferreira Novellino, por estar presente em todos os momentos da minha vida, pelo incentivo, apoio, preocupação constante, carinho e por tolerar meu mau humor. Sempre me ajudando a ir em frente, apesar de todos os meus receios. Hoje, realizada e feliz, dedico a ela a minha vitória, o meu título de Mestra, pois tudo isto é, no fundo, culpa dela.

Dedico este trabalho também à minha madrinha Maria Rosele Novellino da Silva Torres, seu amor, exemplo e apoio foram fundamentais na minha história de vida.

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Lílian Nasser, mais do que orientadora, uma amiga. Em circunstância alguma, sob sua orientação me senti só. Meu eterno agradecimento

Ao Professor Doutor, mas acima de tudo, MESTRE Victor Giraldo, pelo exemplo de profissionalismo, dedicação, caráter e humanismo

Aos Professores Doutores Claudia Coelho de Segadas Vianna, Nei Rocha e Paulo Cezar Pinto Carvalho pelas valiosas críticas e sugestões na banca de qualificação, contribuindo de forma decisiva para a melhoria da qualidade desse trabalho.

Aos Professores do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática, pela competência, dedicação e amizade inquestionáveis durante as aulas, nos seminário e nas palestras.

Aos colegas do mestrado que compartilharam o cotidiano dessa jornada, pela amizade e trabalho solidário.

À Malu, valente companheira de jornada pelas suas interferências sempre afetivas e pertinentes, o meu muito obrigada e a certeza de que tem, em mim, uma Amiga sincera.

À Universidade Federal do Rio de Janeiro.

À Fundação COPPETEC, pela bolsa de estudos, fruto da cidadania que permitiu uma dedicação mais conseqüente no programa de pós-graduação.

À direção, coordenação, professores e amigos do Centro Educacional "Alexis Novellino", pelo incentivo, confiança e apoio em todos os momentos.

Aos meus queridos alunos que participaram dessa pesquisa, pela dedicação, carinho, seriedade e motivação com que conduziram as atividades propostas.

Ao meu amigo Pedro, que sempre acreditou nas minhas idéias e, desde o início, me incentivou na realização desta conquista.

Às minhas Amigas inseparáveis Sãozinha e Simone que tão bem souberam compreender o meu distanciamento durante esse tempo de luta.

A todos da minha família, pelo interesse, apoio e carinho.

À minha irmã Ana Paula Novellino, que muito me ajudou com sua sensibilidade, força e equilíbrio. Compreendendo e respeitando os meus momentos de estudo.

Ao meu Tio, Amigo e Companheiro de trabalho Eduardo Novellino, pelo incentivo e por compartilhar comigo a criação de uma aplicação didática para o ensino da Matemática Financeira, culminando nesta dissertação.

Ao meu Tio Oldemar, in memorian, que sempre esteve presente nos momentos mais difíceis da minha caminhada estudantil, me ensinando a valorizar a competência, a paciência e a persistência.

À minha Amiga e Terapeuta Ana Monteiro, por me ajudar a sair do ninho e pelo apoio constante.

Ao meu Amigo e companheiro Clarencio Rodrigues, pela amor, paciência e apoio. Meu trabalho se tornou mais leve porque esse parceiro das horas difíceis me lembrou da melhor direção a ser tomada: seguir em frente!

Muito obrigada!

“De que valeria o empenho do saber se assegurasse apenas a aquisição de conhecimentos, e não, de certo modo, e na medida do possível, o descaminho daquele que conhece”.

Foucault

Resumo

Este trabalho é o relato de uma pesquisa baseada em uma experiência de ensino da matemática financeira, segundo uma abordagem visual. Elaboramos uma seqüência de aulas organizadas em 5 sessões, sobre os conceitos fundamentais da Matemática Financeira, através de um modelo que usa a Visualização como metodologia de ensino e a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Escolhemos este tema, pois consideramos que a Matemática Financeira não é bem explorada no Ensino Médio, além de acreditarmos que através deste tema podemos capacitar o aluno a entender melhor o mundo em que vive, tornando-o mais crítico ao assistir um noticiário, ao ingressar no mundo do trabalho, ao consumir, ao cobrar seus direitos e analisar seus deveres. Propomos uma abordagem visual para o ensino da Matemática Financeira, por acreditarmos que este método é fértil por essência, pois dá autonomia ao aluno, possibilitando a diversidade de resolução de um mesmo problema, auxiliando e estimulando o aluno na criação de sua própria técnica, permitindo que o pensamento aconteça livremente, eliminando fórmulas e regras sem sentido.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Engenharia Didática, Visualização.

Abstract

This work is the report of a research based on an experience of teaching financial mathematics through a visual approach. A sequence of lessons has been elaborated, organized in 5 sessions, on the fundamental concepts of Financial Mathematics, through a model that uses Visualization as teaching methodology and Didactic Engineering as research methodology. This theme has been chosen because we consider that Financial Mathematics is not well explored in high school. Besides, we believe that through this theme the student can be enabled to better understand the world, becoming more critical when watching the news, when entering the world of the market, when consuming, when demanding his/her rights or analyzing his/her duties. We propose a visual approach for the teaching of Financial Mathematics, for we believe that this method is fertile in essence, since it gives autonomy to the student, allowing the diversity of resolutions for the same problem, helping and stimulating the student in the creation of his/her own technique, allowing the thought to happen freely, eliminating formulas and non-sense rules.

Keywords: Financial Mathematics, Didatic Engineering, Visualization.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

O ensino-aprendizagem de Matemática Financeira foi escolhido como tema desta pesquisa por considerarmos que esta não é bem explorada no ensino médio. Além disso, acreditamos que é importante que o aluno desenvolva uma atitude crítica frente aos discursos que lhe são apresentados como verdades inquestionáveis. Para que isto ocorra, é necessário certo esforço. É necessário ir contra este mundo estabelecido: conformista e imediatista. É preciso formar um aluno crítico, que consiga repensar este mundo inventando outros modos de viver, agir, pensar, sentir. Como a matemática pode auxiliar nesta empreitada?

De todos os tópicos da Matemática, acreditamos que a Matemática Financeira pode ser uma via interessante para esta tarefa, pois pode auxiliar o aluno a entender o mundo em que vive, tornando-o mais crítico ao assistir a um noticiário, ao ingressar no mundo do trabalho, ao consumir, ao cobrar seus direitos e analisar seus deveres. Sob esta perspectiva consideramos que o estudo em questão contém uma dimensão sócio-político-pedagógica, pois pode contribuir na formação crítica do aluno. Por exemplo, ao instigar discussões e questionamentos acerca de algumas situações-problema é possível levá-lo a pensar não somente em como calcular o lucro com um investimento, mas principalmente, o que é um investimento e quais os objetivos que levaram à criação desta operação financeira.

Por intermédio da Matemática Financeira, existe ainda a possibilidade de provocar o surgimento de perguntas sobre o abuso do poder econômico na aplicação de juros de dívidas e de alíquotas de impostos, por exemplo, podendo desta forma contribuir para que o aluno tenha uma postura mais crítica na vida. É possível fazer da aula mais espaço para a experiência do que para verdades prontas.

Esse assunto interfere, portanto, no exercício da cidadania, e é relevante por vários motivos, tais como a contribuição no desenvolvimento de um olhar mais amplo e indagador, conduzindo ao raciocínio crítico em situações cotidianas. Na medida em que aumenta sua capacidade de analisar situações financeiras, o consumidor tem condições mais efetivas de exercer sua cidadania, tendo mais clareza dos seus direitos por dominar a matemática envolvida nessas situações.

Com o sucesso do Plano Real, trazendo estabilidade à moeda nacional, reduzindo os índices inflacionários, houve um grande aumento na oferta de crédito. Recentemente, com a aprovação do crédito consignado, trazendo uma diminuição do fator risco para os bancos, houve uma queda acentuada na taxa de juros para o tomador deste tipo de empréstimo. A explosão tecnológica também facilitou o acesso a uma grande variedade de transações financeiras. Como conseqüência, hoje os financiamentos, incontestavelmente, fazem parte da vida de grande parte da população no país.

Contudo, a maioria das pessoas tem conhecimento limitado no que se refere a operações financeiras. Estas pessoas tomam suas decisões com base em dados não muito claros, que podem estar "escondidos" e serem difíceis de identificar. O sistema educacional também não acompanhou esta mudança. O resultado é que a maioria das pessoas continua mal informada, tomando decisões de investimento e de crédito baseadas em informações questionáveis. Por exemplo, a loja que vende a prazo e não dá desconto para o pagamento a vista está mais interessada em ganhar com os juros do que com a venda em si. O costume é 'embuta os juros no preço à vista e depois financie dizendo que é sem juros'.

Se participar de operações financeiras é inevitável, como pessoas comuns podem adaptar-se à realidade atual, na qual a utilização das operações de crédito e de investimento torna-se cada vez mais corriqueiras? A falta de informação matemática tem sido um dos principais fatores desse problema. Faz-se necessário, portanto, a democratização do conhecimento. Quando o sujeito passa a ter um domínio sobre o saber, torna-se possível desencadear uma prática transformadora.

Consideramos que a abordagem visual, criada pelo professor Augusto César Morgado, é adequada para o ensino da matemática financeira, por potencializar a diversidade de raciocínio, pela sua simplicidade, facilitando a compreensão da teoria e privilegiando o raciocínio lógico em detrimento da fórmula decorada. O conhecimento é construído por intermédio da visualização das operações financeiras utilizando um recurso visual, por nós denominado eixo das setas.

Este método é fértil por essência, pois dá autonomia ao aluno, já que possibilita a diversidade de resolução de um mesmo problema, auxiliando e estimulando o aluno na criação de sua própria técnica, permitindo que o pensamento aconteça livremente, sem as amarras das fórmulas.

O objetivo desta pesquisa é verificar se um modelo que utiliza a visualização por meio do eixo das setas facilita a compreensão da matemática financeira por alunos do ensino médio. Acreditamos que esse modelo possibilita que pessoas comuns compreendam o funcionamento de operações financeiras do dia-a-dia, para que alcancem o conhecimento e a confiança necessários para tomar em suas mãos o poder de decisão e de avaliação, além da percepção de transações financeiras questionáveis.

Essa pesquisa pretende responder a duas perguntas:

1. Uma abordagem visual pode facilitar a aprendizagem da matemática financeira no ensino médio?
2. Diante da crescente popularidade das operações financeiras no dia-a-dia do indivíduo comum, como a matemática financeira poderia estar potencializando uma postura crítica no aluno, para que não aceite tais operações sem questionamento, tomando-as como naturais?

Consideramos que a abordagem mais adequada para o ensino da matemática financeira se dá por intermédio da visualização das operações financeiras utilizando como recurso o eixo das setas, por potencializar a diversidade de raciocínio, pela sua simplicidade e não utilização de fórmulas.

Por ser um conteúdo novo na grade curricular do ensino médio, abre possibilidades de não se estabelecer uma metodologia que favoreça a memorização (uso de fórmulas). Uma das vantagens do método que propomos é que ele não permite ao aluno o uso deste processo.

Para responder às perguntas desta pesquisa, o trabalho foi desenvolvido usando a metodologia da Engenharia Didática, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular. A visualização serviu como pano de fundo ao longo de toda a pesquisa.

Acreditamos que este trabalho possa contribuir para a pesquisa em Educação Matemática, pois utiliza como ferramenta de ensino uma estratégia ainda pouco explorada, a visualização. Este processo, pouco usual em sala de aula, possui inerentemente imensa potencialidade de exploração pedagógica, se levarmos em conta a estrutura da mente humana. Por permitir que o pensamento aconteça livremente, a visualização dá autonomia ao aluno, tornando significativas as idéias e conceitos da matemática, sendo desta forma um poderoso instrumento de ensino para alcançar a compreensão e inspirar novas descobertas.

CAPÍTULO 2. MATEMÁTICA FINANCEIRA E VISUALIZAÇÃO

Sentindo necessidade de buscar interlocução para pensar minha prática de educadora, participei de um curso de aperfeiçoamento para professores de matemática do ensino médio promovido pelo IMPA em 1996 e 1997. Nessa ocasião fui apresentada pela primeira vez tanto à disciplina matemática financeira como ao método visual, pelo Mestre Augusto César Morgado.

Esta experiência foi marcante no futuro da minha prática docente. Em 2000 fui convidada a lecionar matemática financeira no curso de administração de empresas em uma faculdade de Cabo Frio e aceitei. Pensei ser esta uma oportunidade para pôr em prática o estudo isolado que vinha empreendendo sobre este assunto, no qual procurava desenvolver seus conteúdos pela metodologia do professor Morgado (Morgado, Wagner e Zani, 2005). Os resultados foram recompensadores, ao perceber o prazer dos alunos no estudo de uma disciplina que costuma ser tão árida.

2.1 A Matemática Financeira: um pouco de história

Há muito tempo, com a fixação do homem à terra, estes passaram a permutar o produto excedente. Assim surgiu a primeira manifestação de comércio: o escambo, que consistia na troca direta de mercadorias como o gado, sal, grãos, pele de animais, cerâmicas, cacau, café, conchas, entre outras. Esse sistema de troca direta, que durou vários séculos, originou o surgimento de vocábulos como "salário", o pagamento feito através de certa quantidade de sal. Houve então a necessidade de criação de um sistema onde fosse possível determinar o valor dos objetos a serem trocados. Inicialmente foi feito o uso de mercadorias de alta procura como referência de valor. O gado e o sal eram exemplos de mercadorias de muito valor, enquanto conchas e pedras eram consideradas de pouco valor. Nesta época, o ouro e a prata não eram considerados mercadorias de muito valor.

Após algum tempo tornou-se mais difícil fazer o cálculo do valor dos bens a serem trocados. Percebeu-se então a necessidade de representar valores. Daí é que vem a origem do dinheiro. As primeiras moedas, geralmente em metal, tal como conhecemos hoje surgiram na Lídia (atual Turquia), no século VII A.C. A origem do dinheiro e a necessidade de sua produção em série deu origem à cunhagem a martelo, onde os signos monetários eram valorizados também pela nobreza dos metais usados, como o ouro e a prata. O dinheiro vivo originário dos mais remotos tempos vem desde lá valorizando as figuras representativas da história, da cultura, das riquezas e do poder das sociedades.

No auge da atividade comercial surgiu uma outra atividade: o comércio do dinheiro. Isto ocorreu porque cada país tinha sua moeda própria, e devido ao fato dos comerciantes e das pessoas viajarem frequentemente ao exterior, era necessário ter a moeda específica de cada país. Com o tempo, alguns comerciantes já conheciam bem as moedas, começando assim a acumulá-las em grande quantidade, e a partir daí dedicando-se exclusivamente ao escambo de dinheiro, isto é, o comércio de dinheiro, sendo chamados de cambistas. As palavras, “banqueiro” e “banco” surgiram porque os cambistas exerciam essa profissão sentados em um banco de madeira.

De acordo com a CASA DA MOEDA (2007):

> *“A necessidade de guardar as moedas em segurança deu surgimento aos bancos. Os negociantes de ouro e prata, por terem cofres e guardas a seu serviço, passaram a aceitar a responsabilidade de cuidar do dinheiro de seus clientes e a dar recibos escritos das quantias guardadas. Esses recibos (então conhecidos como ‘goldsmiths notes’) passaram, com o tempo, a servir como meio de pagamento por seus possuidores, por serem mais seguros de portar do que o dinheiro vivo. Assim surgiram as primeiras cédulas de "papel moeda", ou cédulas de banco, ao mesmo tempo que a guarda dos valores em espécie dava origem às instituições bancárias.”*

Já o crédito é a confiança que leva alguém a entregar a outra pessoa certa importância, em dinheiro ou em mercadorias, com valor monetariamente fixado, importância que deve ser paga após o decurso de determinado tempo. Quando a importância é emprestada em dinheiro, acrescentam-se tantos por cento sobre a soma a devolver, pelo seu uso.

O crédito deve ser sempre associado ao tempo, ao final do qual aquele que contraiu o empréstimo deve devolver ao credor a quantia emprestada. Deve, no entanto, também haver um pagamento pelo preço do empréstimo, o juro. Assim, o crédito é uma relação econômica associada ao tempo e ao juro. O juro é, portanto, a recompensa do empréstimo do capital por certo tempo.

Sobre o juro, ZOT, (2006, p.20) diz que:

> *"Assim como o dono de terras arrenda, aqueles que têm capital para negócios, não possuem a necessária habilidade para geri-lo ou querem evitar aborrecimento de fazê-lo, "arrendam" o capital. Eis aí o que se chama de juros e que é apenas a "renda do capital" como a outra é a da terra. Em diferentes línguas, aluguel e dinheiro são expressões de uso comum, e assim também ocorre em algumas regiões da Inglaterra. Ser dono de terras ou dono de capital é, portanto, a mesma coisa. Para o primeiro é não poder o arrendatário lhe levar a terra, o que o prestatário, no segundo caso, pode fazer com o capital. É por isso a terra deve produzir um lucro menor que o capital que se empresta com risco maior" (North, Sir Duddley, Discourses upon Trades, 1691 apud Marx, K., 1980. V.I.).*

Desta forma podemos dizer que juro é a remuneração do capital emprestado, podendo ser entendido, de forma simplificada, como o aluguel pago pelo uso do dinheiro durante certo período de tempo.

Antes da expansão comercial e do desenvolvimento do capitalismo, a cobrança de juros constituía um problema ético. Chamado de usura, era terminantemente proibido pela Igreja na Idade Média. Mas com o desenvolvimento do comércio, as novas exigências de capitais mais vultosos acabaram estimulando a sua cobrança. A Igreja teve então de fazer concessões e passou a proibir somente a cobrança de juros em empréstimos destinados ao consumo pessoal.

No século XVI, a reforma calvinista aceitou e justificou "teologicamente" a cobrança dos juros. Na Inglaterra em 1545 o Rei Henrique VIII reconheceu a sua legalidade. A Igreja Católica só o fez 300 anos depois, e, no Islamismo o assunto ainda é polêmico. Mas foi somente no século XVIII que os estudiosos começaram a buscar uma justificativa econômica para a cobrança de juros sobre os empréstimos monetários.

O investimento pode ser definido como a aplicação de recursos visando, direta ou indiretamente, a produção de bens e serviços, tornando possível aumentar o consumo ou a renda no futuro. O total da renda de um indivíduo pode se destinar ao consumo ou à poupança. O investimento somente pode ser feito se houver poupança. À medida que aumenta a renda individual e, portanto, são satisfeitas as necessidades básicas do consumidor, aumenta a sua capacidade de poupança e sua inclinação ao investimento. Surge então uma importante observação: nem sempre aquele que tem um bom projeto de investimento dispõe da poupança para viabilizá-lo. Neste caso, poderia "alugar" a poupança de outro que possui os recursos, mas não deseja empreender. Aí está, de forma bastante simplificada, a origem dos juros e do sistema financeiro.

De acordo com SERRA (2006):

> *"O sistema financeiro promove a troca de recursos de poupadores para empreendedores, seja direta ou indiretamente através de sucessivas intermediações. As necessidades financeiras do empreendedor não coincidem em volumes e prazos com as disponibilidades do emprestador. O sistema de intermediação financeira encarrega-se de promover, mediante determinada remuneração, o encontro de recursos de múltiplos poupadores com os de múltiplos empreendedores."*

Assim, os agentes de intermediação financeira (bancos, financeiras, etc.) tornam possível a compatibilização das necessidades de uns com as disponibilidades de outros, mediante remuneração pelo serviço, funcionando semelhantemente a um mercado de mercadorias: o mercado financeiro.

Segundo SERRA (2006):

> *"Fundos de renda fixa, certificados de depósitos bancários, cadernetas de poupança e uma diversidade de outros mecanismos financeiros nada mais são do que meios de transferir poupanças entre agentes superavitários e agentes deficitários."*

Considerando que o crédito está relacionado com o tempo e com o juro e que é fundamental estabelecer regras que quantifiquem os valores envolvidos nos contratos, surgiu a disciplina matemática financeira. No mercado financeiro existe pagamento de juros pelo empréstimo de capital. Os juros somados ao capital representam acréscimo de valor ao longo do tempo. Pode-se, então, dizer que a matemática financeira tem por objetivo estudar a evolução do dinheiro ao longo do tempo.

A seguir apresentaremos a seleção dos conteúdos desta disciplina que serão trabalhados com alunos do Ensino médio nesta pesquisa.

2.2 Uma seqüência didática para o ensino da Matemática Financeira

Com o objetivo de responder às questões de investigação da pesquisa e levando em consideração a Engenharia Didática que será explorada no capítulo 4, selecionamos os conteúdos que serão trabalhados com os alunos em cinco sessões. Na 1ª sessão trabalharemos porcentagem, na 2ª juros simples, na 3ª fator de aumento e fator de desconto, na 4ª juros compostos e na 5ª o valor do dinheiro no tempo.

Os pontos principais da seqüência didática adotada são:

- uso da junção de taxa com capital como fator, na notação decimal, de modo que, para encontrar um valor com acréscimo com uma taxa i de aumento, multiplica-se a quantia original por (1+i) e se for desconto de i, multiplica-se a quantia original por (1- i);
- representação da situação problema no eixo das setas e transposição dos valores para uma mesma data para que possam ser comparados e/ou somados;
- incentivo ao uso da calculadora;
- exploração de problemas práticos, do dia-a-dia dos cidadãos;
- integração com outros conteúdos como progressões e gráficos das funções afim e exponencial;
- análise de diversas estratégias para resolver um mesmo problema;
- ênfase no raciocínio evitando a memorização de fórmulas.

2.3 Matemática financeira e o eixo das setas

O objetivo da matemática financeira é estudar a evolução do dinheiro no tempo, pois a sua aplicação e sua própria existência só fazem sentido quando existir taxa que remunere o capital investido. Nesta abordagem utilizamos extensivamente o diagrama por nós denominado de **eixo das setas**. Esta forma gráfica ajuda na visualização de quaisquer operações financeiras.

A representação no eixo das setas consiste de um eixo horizontal, funcionando como uma escala de tempo, que evolui da esquerda para a direita, setas verticais, posicionadas sobre datas indicando valores, que podem ser recebimentos ou pagamentos. A unidade de tempo entre parcelas periódicas deve coincidir com o período de capitalização de juros.

A seguir apresentaremos algumas atividades com o objetivo de exemplificar este método.

Primeiramente apresentamos uma atividade referente a juros simples desenvolvida por um grupo do Projeto Fundão, que utiliza a mesma abordagem em seu material de matemática financeira.

A aplicação de um capital de R$100,00 por um período de 12 meses, com acréscimo constante de 10% ao mês, é representada no eixo das setas mostrado abaixo.

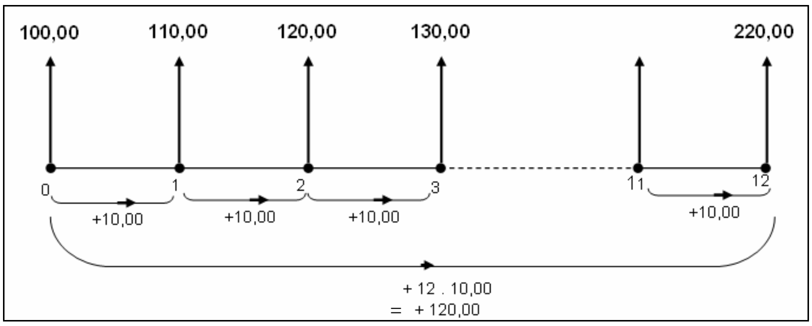


Figura 01 – Eixo das setas para um problema de juro simples

Esta atividade deixa claro que juro simples é um tópico integrador por sua estreita relação com progressão aritmética e com função afim. De fato, esta atividade poderia ter sido enunciada como exercício de P.A. da seguinte maneira: “Numa P.A., cujo 1º termo é 100 e a razão é 10, calcule o valor do 13º termo.”. Também poderia ser um exercício de função afim com o seguinte enunciado: “Uma reta passa pelo ponto (0, 100) e possui coeficiente angular igual a 10. Calcule o valor de y para x = 12.”.

Se considerássemos que o comprimento de cada seta é o mesmo do valor que representa, teríamos a seguinte figura:

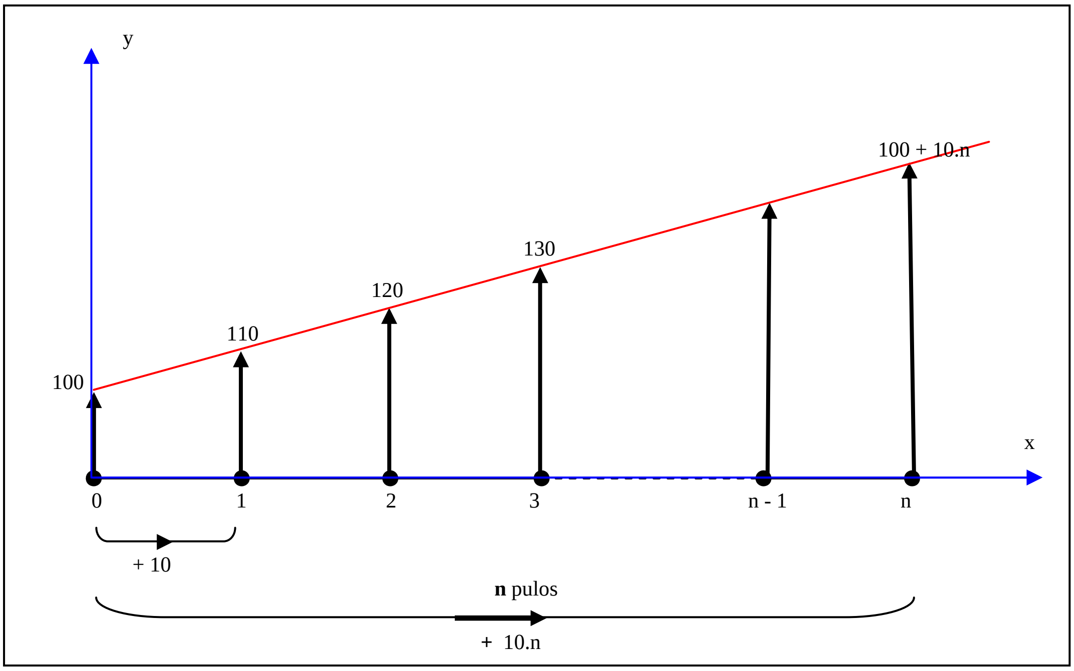


Figura 02 – Eixo das setas para um problema de juro simples considerando o comprimento das setas

Esta figura torna óbvia a relação entre progressão aritmética, função afim e juro simples. Note que o valor 100 é $\mathbf{V_0}$ (valor inicial) em juro simples ou **b** (coeficiente linear) na função afim ou $\mathbf{a_1}$ (primeiro termo) na progressão aritmética e que o valor 10 é **J** (juro) em juro simples ou **a** (coeficiente angular) na função afim ou **r** (razão) na progressão aritmética.

Nesta atividade, R$ 10,00 que é o valor do juro (J) foi calculado fazendo 10% de R$ 100,00. Num caso geral, poderíamos escrever que J = i.V_0. Estabelecida esta relação, um problema genérico de juro simples poderia ser representado pela seguinte figura:

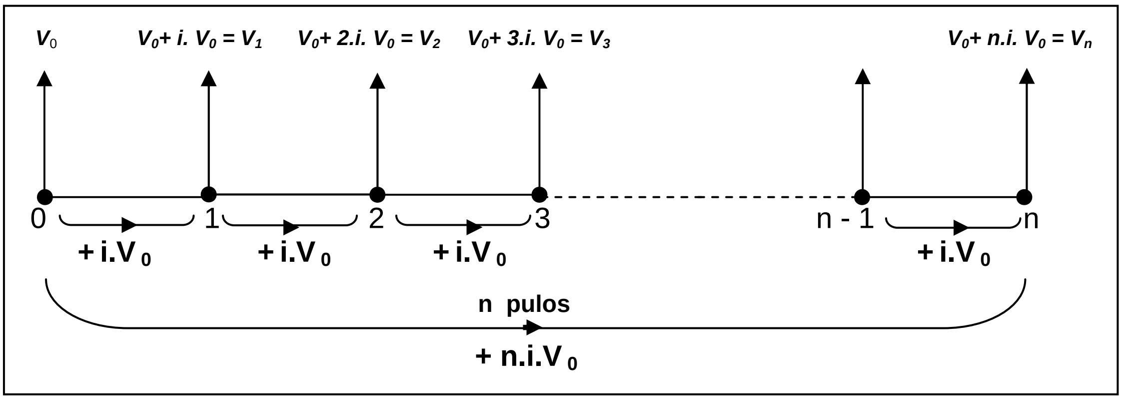


Figura 03 – Eixo das setas para um problema genérico de juro simples

Esta mesma atividade pode ser resolvida, para encontrar o montante após doze meses de aplicação, por uma metodologia que privilegie o uso de fórmulas.

Em geral, os livros enfatizam a fórmula para o cálculo dos juros: $J = V_0.i.n$ e para encontrar o montante é preciso somar os juros com o capital inicial, obtendo $V = V_0 + J = V_0 + V_0.i.n = V_0 (1 + i.n)$

$V_n = V_0 . (1 + i.n)$ (fórmula de juros simples)

$V_{12} = 100 . (1 + 0,1. 12)$

$V_{12} = 100 . (1 + 1,2)$

$V_{12} = 100 . (2,2)$

$V_{12} =$ R$ 220,00

Acreditamos que esta abordagem não estimula o raciocínio, e sim a memorização. Aqui o aluno não precisa compreender o significado das variáveis envolvidas, tornando difícil relacionar a matemática financeira com outros tópicos, limitando o aluno com as amarras da fórmula. Por mais absurdo que seja, existem livros que ao isolar cada variável, acrescentam mais três fórmulas a este tópico: $V_0 = \dfrac{V_0}{1+i.n}$, $i = \dfrac{V_n - V_0}{V_0.n}$ e $n = \dfrac{V_n - V_0}{V_0.i}$.

Na 3ª sessão da seqüência didática, abordamos o "tópico fator de aumento e de desconto", que são ferramentas essenciais na operacionalização da matemática financeira, em questões que necessitam utilizar a operação de produto do capital por um fator. Podemos encontrar este fator a partir de uma taxa ***i***.

Vamos considerar o seguinte exemplo: "O preço P de um produto sofreu um aumento de 14%. Qual o valor do produto após o aumento?".

Inicialmente observamos que 14% de P é o aumento. Para calcular o novo preço, podemos calcular o aumento e somar ao valor original, ou podemos simplesmente multiplicar o valor inicial por 100% + 14% = 114% = 1,14, obtendo diretamente o valor com aumento. Visualizando a operação no eixo das setas:

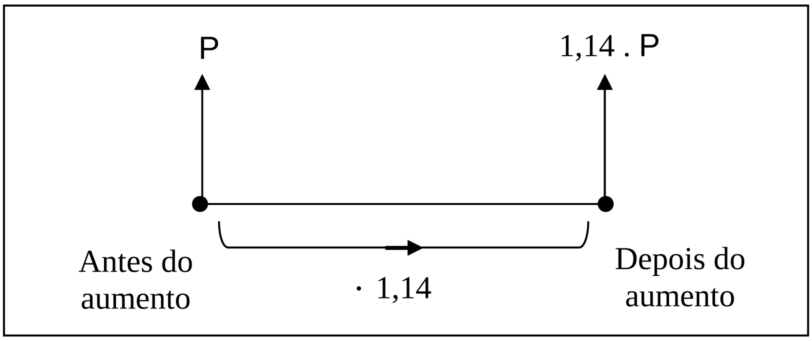


Figura 04 – Eixo das setas para um problema de aumento

De maneira análoga, concluímos que o fator de desconto é (1 – i).

Na quarta sessão da seqüência didática tratamos do tema "juros compostos", onde o valor do juro é calculado a cada intervalo de tempo, incorporando-se este valor ao saldo, passando a render juro. Este processo é chamado de capitalização de juros, também conhecido como juros sobre juros.

No processo de capitalização composta, com taxa de juro (i) constante, para avançar um termo, basta multiplicar pelo fator de aumento (1 + i). Após n períodos de tempo o valor inicial sofrerá n multiplicações por (1 + i), isto é, será multiplicado por $(1 + i)^n$. Desta forma, um problema de capitalização composta que envolva n períodos de tempo recairá em uma equação exponencial, e não poderá ser resolvido por regra de três. Observamos que os alunos inicialmente resistem ao uso do eixo das setas, mas ao tentar resolver problemas de juros compostos que envolvem equação exponencial, abrem mão desta oposição e passam a utilizá-lo. Por isso, é aconselhável acostumá-los com a resolução por meio do eixo das setas desde o início, nos problemas de porcentagem.

A aplicação de um capital de R$100,00 por um período de 12 meses, com taxa de juros compostos de 10% ao mês, é representada no eixo das setas abaixo.

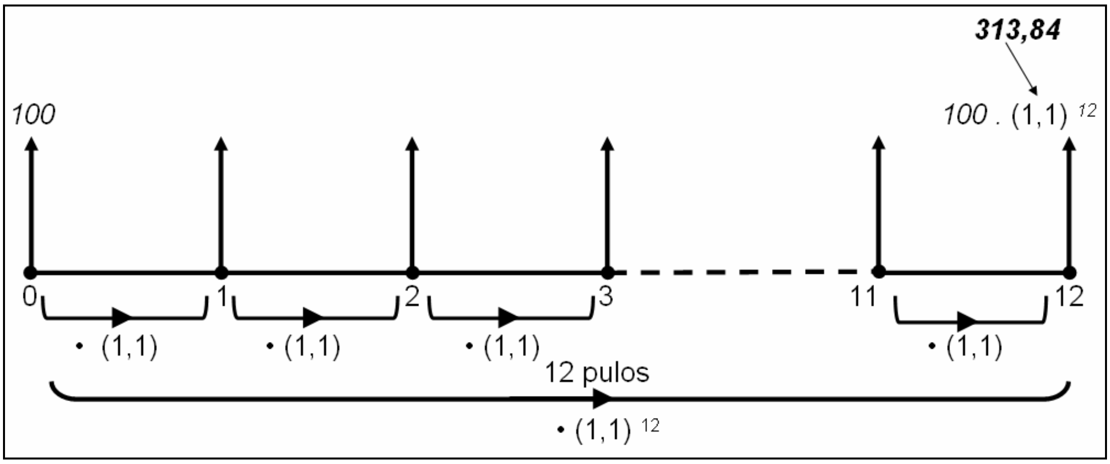


Figura 05 – Eixo das setas para um problema de juro composto

Esta atividade deixa claro que juro composto também é um tópico integrador por sua estreita relação com progressão geométrica e função exponencial. Esta atividade poderia ter sido enunciada como exercício de P.G. da seguinte maneira: “Numa P.G. cujo 1º termo é 100 e a razão é 1,1, calcule o valor do 13º termo.”. Também poderia ser um exercício de função exponencial com o seguinte enunciado: “Seja $f(x) = 100.\ (1,1)^x$, com $x \in$ IN. Calcule f(12).”.

Se considerássemos que o comprimento de cada seta é o mesmo do valor que representa, teríamos a seguinte figura:

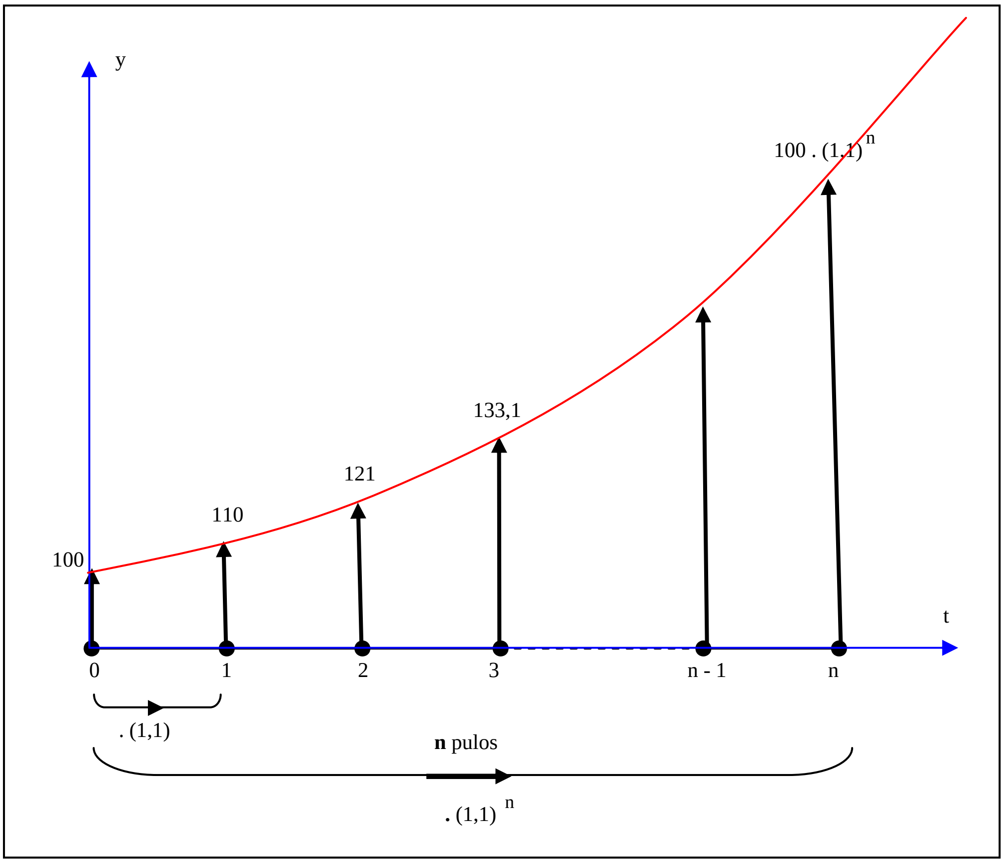


Figura 06 – Eixo das setas para um problema de juro composto considerando o comprimento das setas

Acreditamos que esta representação gráfica torna óbvia a relação entre progressão geométrica, função exponencial e juro composto. Se considerarmos que a função exponencial pode ser expressa por $f(x) = k.a^x$, teremos que o valor 100 é $\mathbf{V_0}$ (valor inicial) em juro composto ou **k** na função exponencial ou $\mathbf{a_1}$ (primeiro termo) na progressão geométrica e que o valor 1,1 é o fator de aumento em juro composto ou **a** (base da função exponencial) ou **q** (razão) na progressão geométrica.

Um problema genérico de juro composto poderia ser representado pela seguinte figura:

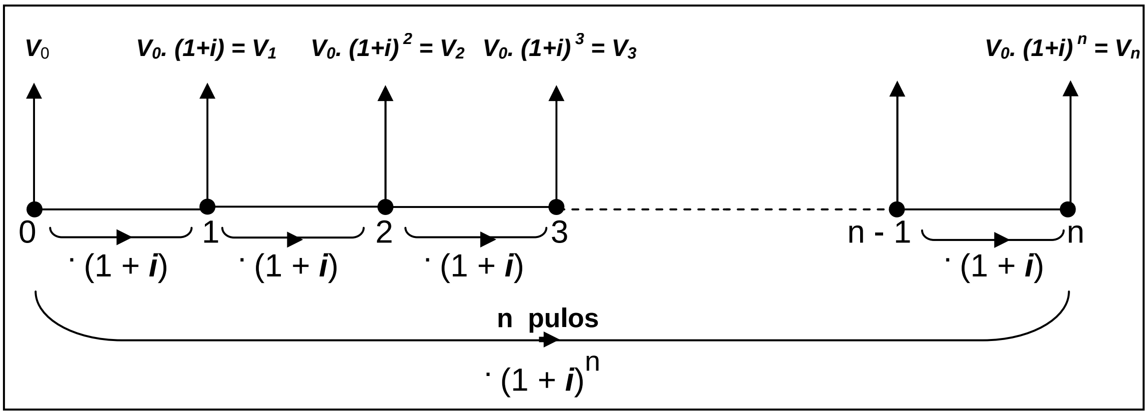


Figura 07 – Eixo das setas para um problema genérico de juro composto

Esta mesma atividade seria resolvida, para encontrar o montante após doze meses de aplicação, por uma metodologia que privilegie o uso de fórmulas da seguinte maneira:

$V_n = V_0 . (1 + i)^n$ (fórmula de juros compostos)

$V_{12} = 100 . (1 + 0,1)^{12}$

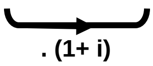
$V_{12} = 100 . (1,1)^{12}$

$V_{12} = 100 . 3,1384$

$V_{12} =$ R\$ 313,84

O objetivo da quinta sessão da seqüência didática é trabalhar com os alunos a tomada de decisões em matemática financeira, o que implica em saber deslocar valores ao longo do tempo.

Para obter o valor futuro basta multiplicar o valor atual por $(1 + i)^n$.

No eixo das setas,  leva do presente para o futuro.

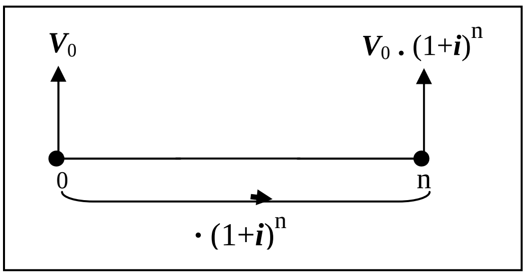


Figura 08 – Representação do valor futuro no eixo das setas

Para obter o valor atual basta efetuar a operação inversa, ou seja, dividir o valor futuro por (1 + ***i***)^n. No eixo das setas, $\underleftarrow{\qquad}_{\mathbf{:(1+\,i)}}$ traz do futuro para o presente.

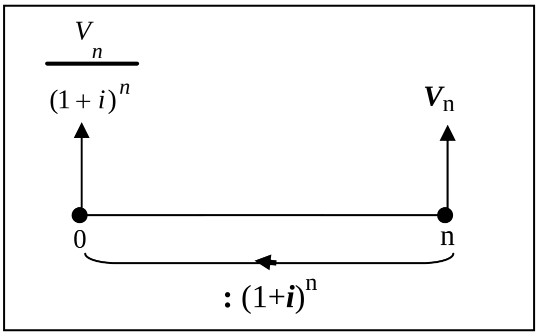


Figura 09 – Representação do valor atual no eixo das setas

É preciso ter cuidado ao comparar valores em análise financeira, senão podem acontecer erros crassos. Como exemplo vejamos a compra de um aparelho de TV, que é vendido por R$ 1.000,00 à vista ou em 2 prestações iguais e mensais de R$ 500,00.

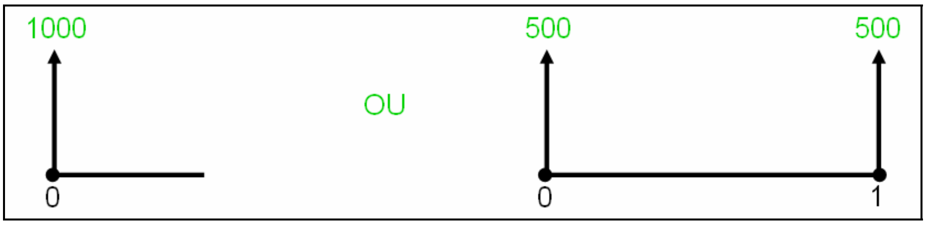


Figura 10 – 1.000 reais à vista ou 2 prestações iguais e mensais de 500 reais

Primeiro erro: considerar que parcelas iguais em datas distintas tenham o mesmo valor como, por exemplo, considerar as 2 prestações como sendo de igual valor. O certo é entender que a 1ª parcela de R$ 500,00 vale mais que a 2ª e assim sucessivamente, pois a 1ª parcela colocada em uma caderneta de poupança a uma taxa de 0,6% a.m. valeria 500 . 1,006 = R$ 503,00, na data de pagamento da 2ª parcela

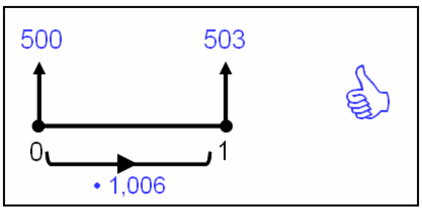


Figura 11 – Levando 500 reais da data zero para a data 1

Segundo erro: somar valores em datas diferentes como, por exemplo, somar as 2 prestações e dizer que comprou a TV por R$ 1.000,00. O correto é entender que só utilizando o instrumental da matemática financeira para obter as prestações numa mesma data, é possível realizar a soma das parcelas.

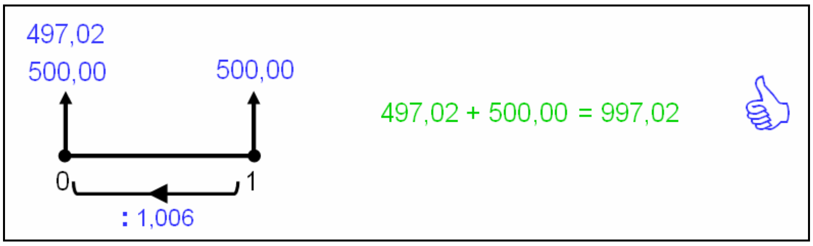


Figura 12 – Somando parcelas na mesma data

Terceiro erro: considerar que o valor não se altera ao longo do tempo como, por exemplo, achar que o preço à vista de R$ 1.000,00 é igual a 2 pagamentos de R$ 500,00 em datas diferentes. É preciso entender que a taxa de juro altera quaisquer valores ao longo do tempo.

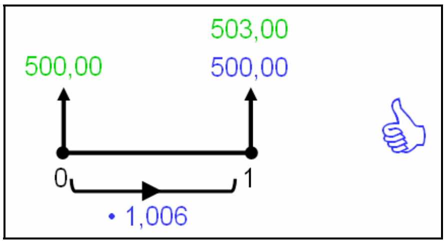


Figura 13 – Comparando valores na mesma data

Apresentaremos três resoluções diferentes para um problema representativo desta sessão. O problema possui o seguinte enunciado: “Bia aplicou R$ 300,00 a juros mensais de 0,61% na Caderneta de Poupança. Dois meses depois, Bia retirou R$ 150,00 e, um mês após encerrou a aplicação. Qual o valor dessa última retirada, supondo que houve rendimento em todos os meses, inclusive no mês da primeira retirada?”.

A primeira resolução está representada na figura a seguir:

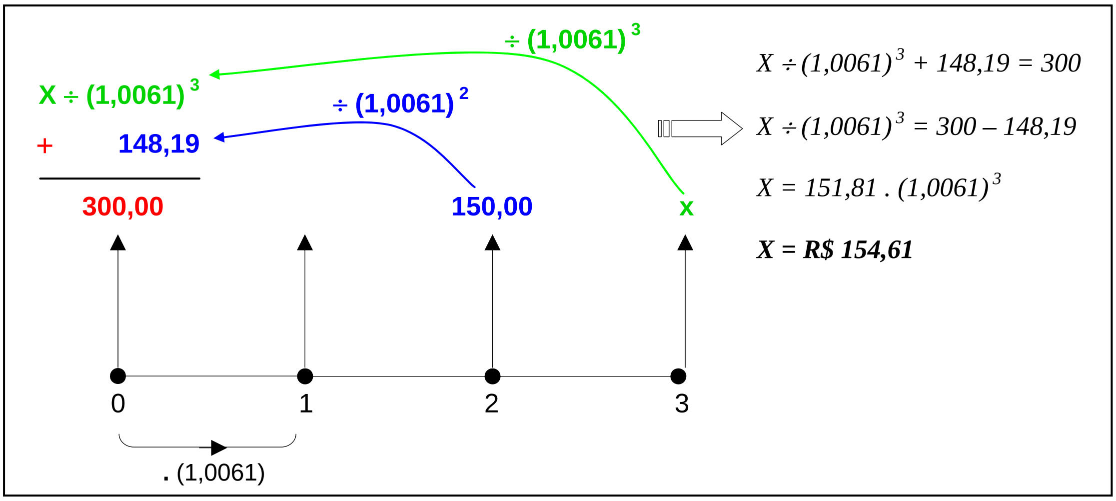


Figura 14 – Primeira solução do problema da Bia

A segunda resolução é a seguinte:

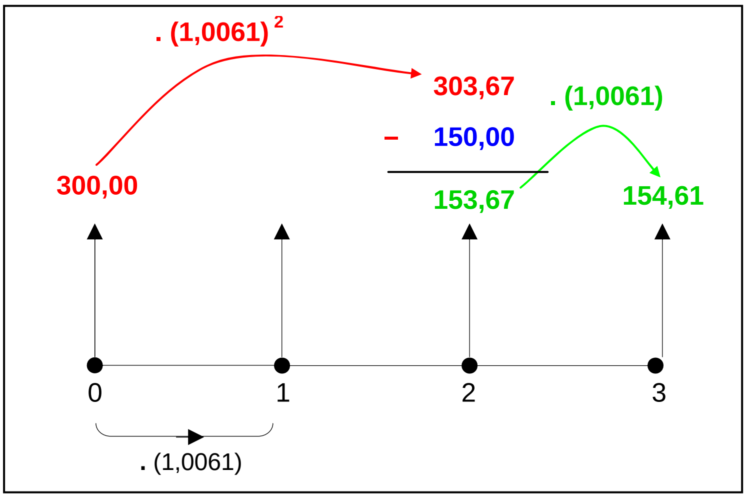


Figura 15 – Segunda solução do problema da Bia

A terceira resolução está representada na figura abaixo.

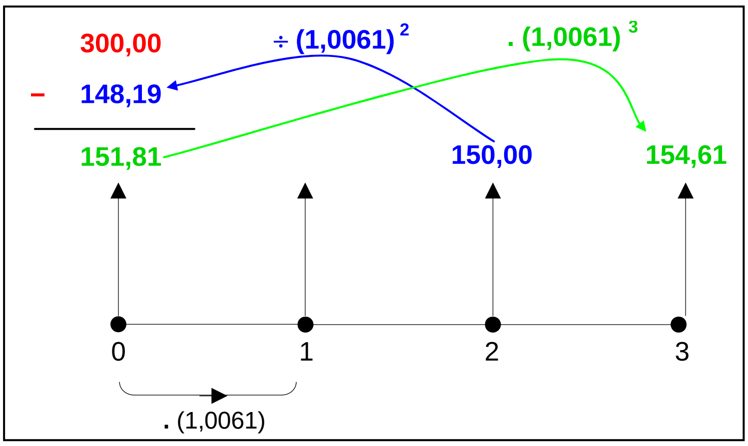


Figura 16 – Terceira solução do problema da Bia

O objetivo de apresentar três diferentes resoluções para esta questão é ilustrar como este método potencializa a diversidade de raciocínio ao fornecer subsídios para que o aluno crie sua própria abordagem ao solucionar um problema. Vale ressaltar que estas soluções foram criadas por alunos do 2º ano do ensino médio apresentados ao problema.

É importante ressaltar que o método de fazer o eixo do tempo e colocar as setas era usado pelo Professor Morgado para resolver problemas de fluxo de caixa, onde se tem uma série de pagamentos distribuídos no tempo e procura-se encontrar o valor total em alguma data. O método utilizado nesta pesquisa, diferentemente do Professor Morgado, usa o mesmo diagrama para representar duas situações diferentes. Consideremos a situação onde uma quantia aplicada na data zero, evolui ao longo do tempo, por três meses. Uma outra situação diferente, não explorada pelo Professor Morgado, é a de uma quantia aplicada na data zero, com uma retirada na data dois e outra retirada na data três. Usamos o mesmo diagrama para ambas as situações, quatro setas voltadas para cima.

2.4 Opinião de alguns professores sobre o método visual:

A abordagem visual através do eixo das setas já foi aplicada por diferentes professores, para diferentes públicos, sempre com resultados positivos. Quando lecionei por três anos (seis períodos) esta disciplina no curso de graduação em administração, muitos alunos que já conheciam o assunto relataram que nunca conseguiram assimilar completamente o conteúdo através da abordagem tradicional, que privilegia a aplicação de fórmulas. Estes alunos tinham a sensação de que ficava faltando alguma coisa e, ao término do curso, relatavam que conseguiram preencher essas lacunas, obtendo assim uma visão mais ampla dos conceitos desta disciplina. É importante destacar que o índice de reprovação nesta disciplina, quando não era zero, era muito pequeno, e que as questões das avaliações não eram de simples resolução, sendo muitas delas de concursos públicos.

Esta abordagem com o eixo das setas foi apresentado pela professora Lílian Nasser no curso de Especialização em Ensino de Matemática da UFRJ (2006). Os depoimentos desses professores confirmam o êxito desta abordagem:

> *"Gostei da abordagem das questões de matemática financeira através do eixo das setas. O problema fica esquematizado de tal forma que o aluno tem uma visão geral, percebendo exatamente o que está procurando."*

> *"A abordagem usada para o estudo da Matemática Financeira é muito interessante, pois trabalha com a parte "geométrica" do problema (parte visual). Uma vez que o aluno aprende a esquematizar seu pensamento, através da montagem do eixo das setas ele aprende a organizar seu raciocínio e traçar caminhos para alcançar o objetivo proposto."*

Este método também vem sendo aplicado em sala de aula e em encontros de Educação Matemática pelo grupo de pesquisa do Projeto Fundão (NASSER, 2006). Os participantes deste grupo relatam que os professores ao assistirem às suas oficinas demonstram interesse e entusiasmo ao conhecer esta abordagem e seus alunos conseguem resolver as atividades propostas com significado.

Para a plena utilização desta abordagem, a taxa será sempre usada na notação decimal, como um fator que incide sobre o capital em questão. Desta forma, o uso da calculadora é facilitado e consideramos que este método só pode trazer benefícios ao ensino da Matemática Financeira. Não pretendemos afirmar que todos devam utilizá-lo e sim que é eficiente para quem quiser aplicá-lo.

2.5 Visualização

Com o advento da tecnologia da computação, acompanhado de vasta possibilidade de exposições visuais, a visualização vem se destacando como área de interesse de muitos pesquisadores em educação matemática, que ressaltam sua importância na aprendizagem da matemática. Neste tópico abordaremos os diversos tipos de visualização matemática além de examinar sua influência no desenvolvimento da matemática e do seu ensino, observando em particular, sua posição atual.

A visualização é um recurso que pode abrir um modo diferente de trabalhar o pensamento matemático, além do lingüístico e axiomático das demonstrações tradicionais e da manipulação simbólica da álgebra. Não estamos querendo dizer com isto que ela deva excluir estes outros modos, mas sim que junto com estes abre novas possibilidades para o ensino de matemática, potencializando o mesmo.

As idéias, conceitos e procedimentos da matemática possuem uma extensa gama de relações visuais. A matemática explora as estruturas da realidade mediante um tipo especial de manipulação, chamada de matematização. Primeiramente percebemos algumas semelhanças nos objetos que nos levam à abstração do que é comum e submetemos esta percepção a uma elaboração racional e simbólica que nos permita manipular suas estruturas. Segundo Guzmán (2002, p. 2):

> *"Nossa percepção humana é fortemente visual e assim não é de se estranhar que o apoio contínuo ao aspecto visual esteja tão presente nas tarefas relacionadas à matematização, não só naquelas que, como a geometria, lidam mais diretamente com aspectos do espaço, mas também em algumas outras, como a análise matemática, que surgiu para explorar os diferentes tipos de mudanças que acontecem nos objetos materiais. Os matemáticos freqüentemente usam processos simbólicos, diagramas, e muitas outras formas de processos mentais que envolvem a imaginação em seu trabalho. Eles os ajudam a adquirir o que poderíamos chamar de uma intuição do abstrato, um conjunto de reflexos mentais, algo como uma visão unitária das relações entre diferentes objetos. Deste modo eles parecem saber com antecedência como estes diferentes objetos vão reagir quando introduzirem algumas mudanças convenientes em alguma parte da estrutura."*

A visualização não é uma visão imediata das relações, mas uma interpretação do que nos é apresentado e que só será realizada com êxito se soubermos ler corretamente o tipo de linguagem que a sustenta. Vejamos um exemplo.

A figura a seguir é um exemplo de demonstração visual do teorema de Pitágoras. O aluno que olhar este desenho atentamente, talvez consiga perceber que se trata de dois quadrados iguais que foram divididos de dois modos diferentes. Talvez consiga entender, pelas indicações escritas abaixo da figura, que o quadrado da direita possui uma área igual à soma das áreas dos outros dois quadrados da esquerda. Mas para deduzir o teorema de Pitágoras será necessário provar que os triângulos (indicados por T) possuem mesma área, e que esta mesma situação aparece em qualquer triângulo retângulo, isto é, o aluno precisa perceber que esta é uma situação genérica.

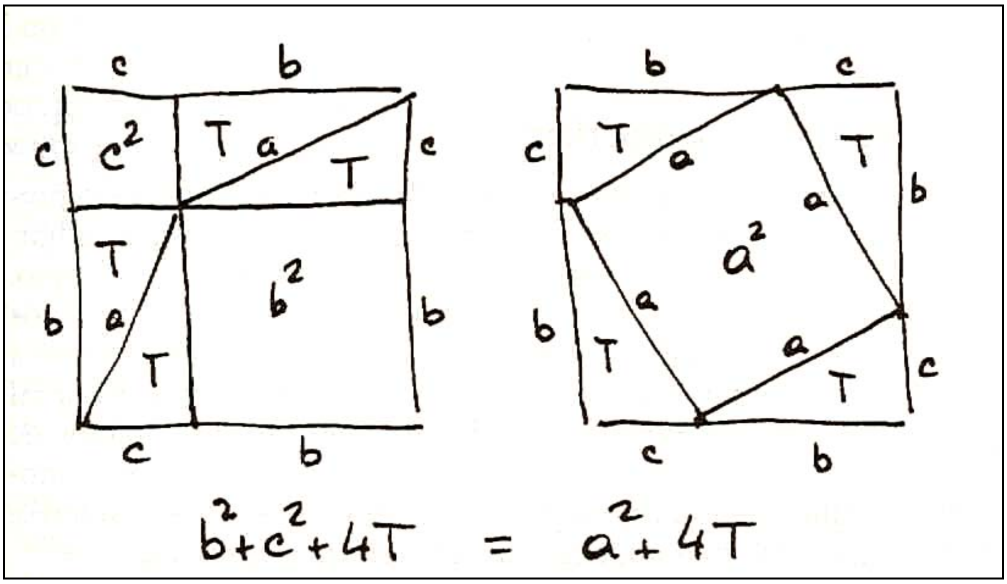


Figura 17 – Guzmán (2002, p.3)

O pretendido imediatismo desta figura para provar o teorema de Pitágoras é de certa forma enganoso, posto que necessita de um trabalho de decodificação que é óbvio ao professor, mas que é preciso mostrar ao aluno.

A visualização tem um papel muito importante na matemática e devolve à palavra "teorema" o seu significado original, posto que a raiz grega da palavra teorema significa "o que se contempla" e não, como a entendemos hoje em dia, o que se demonstra. Porém, como já dissemos, a visualização por si só não sustenta uma demonstração, não pode ser considerada uma prova matemática. Por limitações na nossa visão, as figuras podem ser enganadoras, como mostrado no exemplo a seguir.

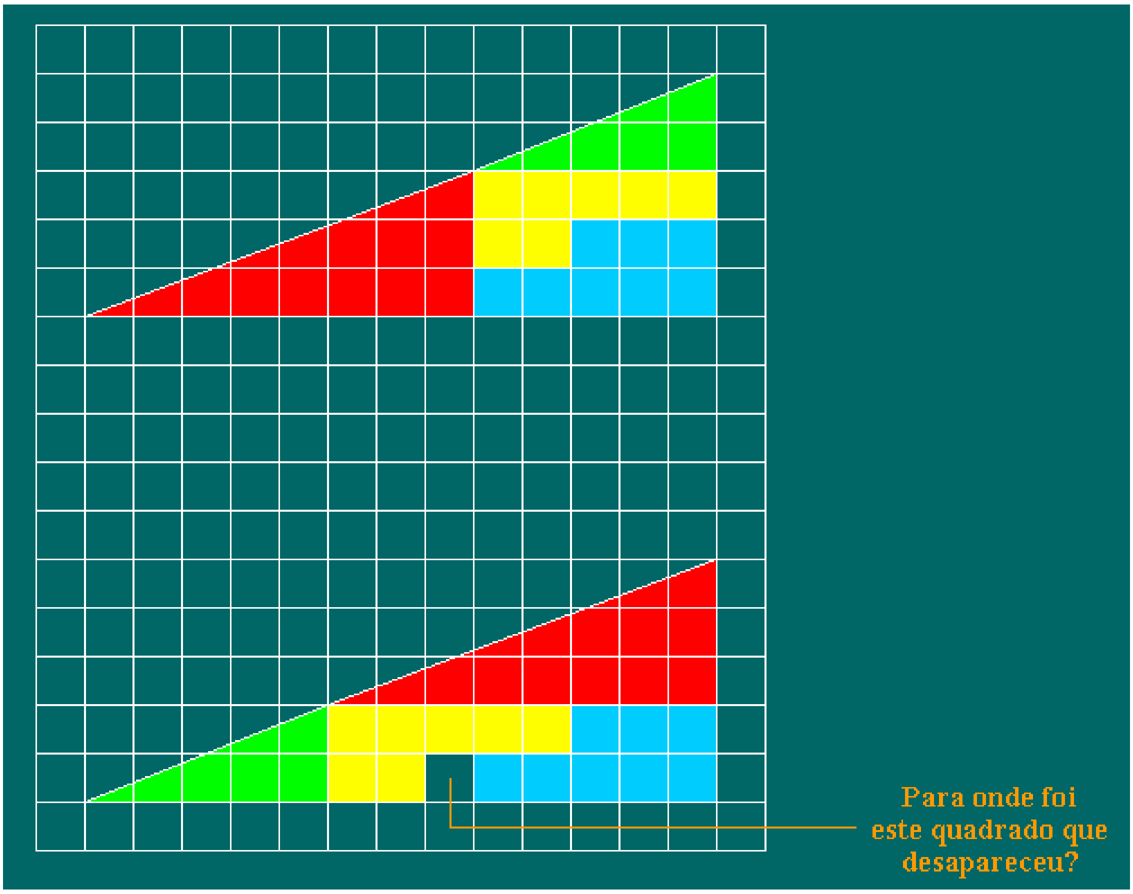


Figura 18 – Prova enganadora

http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/paradoxo_geometrico2.html

Esta limitação é uma das principais causas de rejeição da visualização entre os matemáticos. Concordamos que ela não deva ser utilizada como ferramenta única em demonstrações, mas não que deva ser eliminada; pelo contrário, acreditamos que seja uma ferramenta extremamente importante, que deve ser usada sempre que possível, uma vez que permite estimular o raciocínio matemático. Em nossa pesquisa utilizamos uma ferramenta visual (o eixo das setas) para alcançar a generalização de problemas, por exemplo, de juros compostos levando o aluno a deduzir sua fórmula em um exercício.

Segundo Guzmán existem vários tipos de visualização: isomórfica, homomórfica, analógica e diagramática. Iniciaremos e daremos ênfase especial à isomórfica, pois é a que será utilizada em nossa pesquisa.

A visualização **isomórfica** parte do princípio que é mais fácil manipular objetos percebidos por nossa visão que conceitos abstratos. São criadas figuras, de tal forma que se possa estabelecer uma correspondência entre os elementos visuais de tais figuras e o significado matemático que representam. Assim, as manipulações visuais dos elementos podem ser transformadas em relações matemáticas abstratas. A modelagem de um problema pode ser considerada, em muitos casos, uma visualização isomórfica.

No nosso caso, por exemplo, associamos à idéia abstrata de que $C_n = C_0 + i.C_0.n$ do juro simples à seguinte figura:

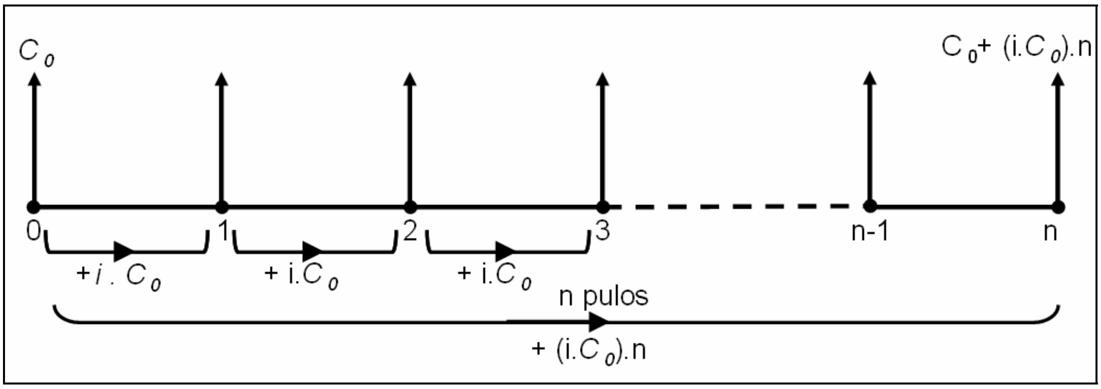


Figura 19 – Resolução no power point da atividade 12 da sessão 2

Outro exemplo de visualização isomórfica é o seguinte:

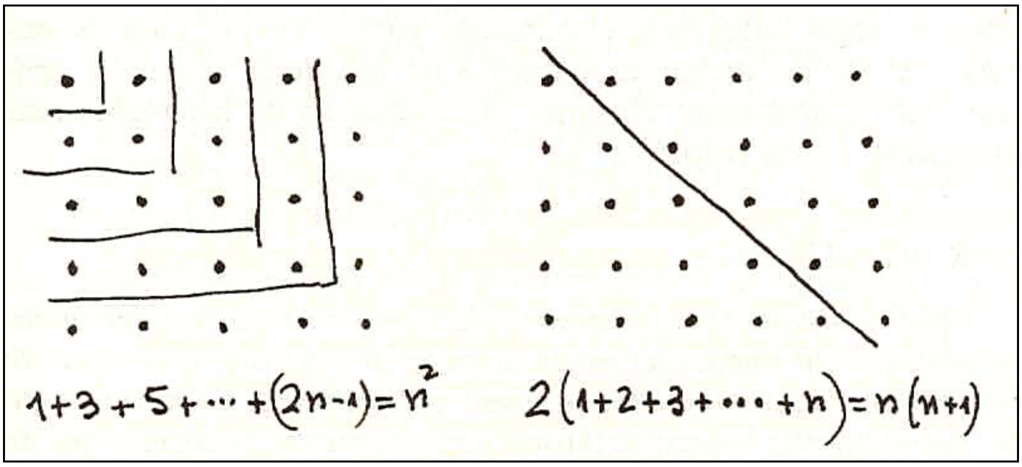


Figura 20 – Exemplo de demonstração visual

http://www.mat.ucm.es/~angelin/labred/visrincon/03tiempo.htm

A visualização dos números reais como pontos de uma reta ou dos números complexos como pontos de um plano, também são de natureza isomórfica.

Devemos estar atentos ao fato que a correspondência entre a figura e o seu significado matemático, geralmente não é óbvia. Segundo Guzmán (2002, pp. 4 e 5)

> *"Contudo, temos que estar atentos que nossas visualizações contêm muitos aspectos relacionados a convenções, tradições, consensos que as fazem dependentes, para sua utilização, de todo um código de compreensão que deve ser transmitido e ensaiado suficientemente até que se adquira certa familiaridade com ele. É verdade que "uma imagem vale mais que mil palavras", mas isto pressupõe uma condição importante, que a imagem chegue a ser entendida adequadamente. Caso contrário uma imagem vale nada."*

Na nossa pesquisa, para que a imagem pudesse ser entendida corretamente, usamos animação no power-point como recurso. Se o meio de transmissão de uma imagem é, por exemplo, um livro, transmite-se apenas o produto final, a última imagem com todos os elementos acumulados nela, tornando-a mais difícil de interpretar. Na apresentação de uma imagem com o power-point, seus diferentes elementos vão aparecendo pouco a pouco, completando uma imagem que pode começar bastante simples e terminar extremamente complicada.

O teorema de Young é outro exemplo de visualização isomórfica. Este teorema afirma: Seja y = f(x) uma função real definida de $[0, \propto)$, tal que f(0) = 0, f(x) > 0 para cada x > 0, f é contínua e estritamente crescente de $[0, \propto)$ e f(x) tende a infinito quando x tende a infinito. Seja y = g(x) a função inversa de f, i.e. para cada x de $[0, \propto)$, temos g(f(x)) = x. Então, para cada par de valores positivos a e b, se verifica: $ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx$

A demonstração deste teorema pode ser realizada com mais facilidade através da tradução das relações que podem ser vistas na figura a seguir.

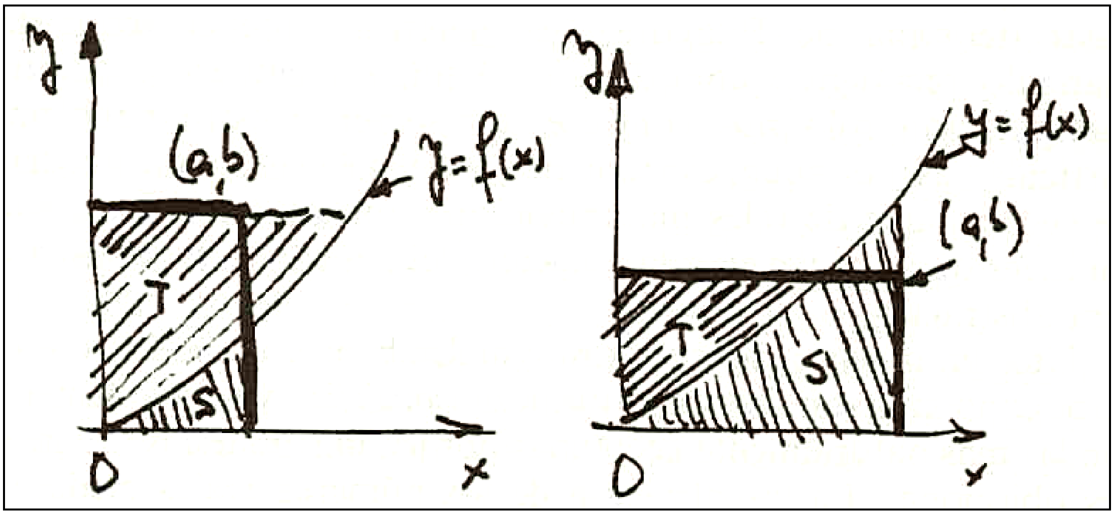


Figura 21 – Guzmán (2002, p.5)

O que o teorema de Young afirma é que a área do retângulo com vértices opostos (0, 0) e (a, b) é menor ou igual à soma das áreas sombreadas S e T da figura. A igualdade ocorre quando b = f(a), isto é, quando o ponto (a, b) (sempre no primeiro quadrante) é um ponto do gráfico de y = f(x).

Na visualização **homomórfica** alguns dos elementos importantes têm certas relações mútuas que imitam suficientemente bem as relações entre os objetos que representam. É o caso das figuras na geometria, por exemplo.

Na visualização **analógica**, substituímos mentalmente os objetos que estamos trabalhando por outros que se relacionam entre si de modo análogo e cujo comportamento é mais conhecido ou talvez mais fácil de controlar, por já ter sido explorado. Este tipo de visualização ou modelagem analógica era o método de descoberta habitual usado por Arquimedes, como o cálculo do volume da esfera, que primeiro foi obtido através de analogias e experimentos de pensamento de natureza mecânica.

Na visualização **diagramática** os objetos e suas relações são meramente simbolizados de maneira que os diagramas assim obtidos nos ajudem em nossos processos mentais. Os diagramas de árvore que usamos em combinatória ou probabilidade, assim como muitos outros que cada matemático desenvolve para uso próprio, de natureza muito pessoal são deste tipo. Tais simbolizações e diagramas se tornam em alguns casos de uso generalizado, mas em muitos casos eles são de um uso muito pessoal, individual, e não podem ser compartilhados facilmente com outros.

Para finalizar a exposição dos diferentes tipos de visualização, citamos Guzmán (2002, p. 7):

> *“É claro que a classificação dos possíveis tipos de visualização que vimos aqui não é exaustiva nem é tampouco tão nítida. Haverá obviamente muitos casos que não podem ser incluídos em nenhum dos tipos que descrevemos aqui.”*

2.6 Revisão de literatura

O tópico de matemática financeira tem sido alvo de algumas pesquisas na área de Educação Matemática, embora ainda haja poucos trabalhos enfocando estratégias de ensino e aprendizagem.

Algumas dissertações de mestrado e teses de doutorado tratam do tema, como a de Nascimento (2004), que investigou o que sabem os alunos e o que pensam os professores do ensino médio a respeito da matemática financeira nesta etapa da escolaridade. Sandra Vidotto (2002), em sua dissertação de mestrado em engenharia de produção, realizou um estudo para verificar se a utilização de um programa educacional (elaborado pelo Professor Doutor Mardem Almeida Machado e utilizado na Universidade Estadual de Londrina) pode favorecer o desenvolvimento da criatividade e da iniciativa de alunos de segundo e terceiro graus tornando os conteúdos de matemática financeira mais significativos.

Já Valéria de Carvalho (1999), desenvolveu uma pesquisa qualitativa onde foi elaborada uma proposta de intervenção na formação de dois professores de matemática, considerando a questão da educação para o consumo, através da matemática financeira e o uso do vídeo em sala de aula.

Visando proporcionar a investidores amadores o conhecimento necessário para estabelecer metas de investimento e compreender o balanço entre risco e retorno, Rodrigo Becke Cabral (2002) apresenta um modelo de ensino de estratégias de investimento.

A pesquisa desenvolvida por Adriano Brandão Feijó (2007) teve por objetivo investigar se a utilização da planilha promove as condições necessárias para que alunos universitários melhorem a compreensão de conceitos da matemática financeira em comparação com o ensino tradicional realizado com calculadoras financeiras e tabelas de coeficientes.

Algumas dissertações são voltadas para a escola básica, como a de Mercedes Villar Fiel (2005), que apresenta uma proposta para o ensino da matemática financeira na sexta e sétima séries (sétimo e oitavo anos) como elo à cidadania fundamentada na perspectiva da etnomatemática. Por sua vez, Adriana Almeida (2004) investigou a abordagem de alguns conteúdos de matemática financeira no primeiro ano do ensino médio de uma escola pública estadual de Campinas, com a intenção de analisar como os alunos sistematizam e apreendem estes conteúdos. Os alunos da EJA de uma escola estadual no Rio Grande do Sul foram o foco do relato de experiência de cunho qualitativo de uma proposta de ensino de matemática financeira, desenvolvido por Karla Silveira (2007).

O uso da tecnologia foi o foco de alguns trabalhos: Nelson Leme (2007) investigou o impacto da abordagem construcionista e das potencialidades das planilhas eletrônicas no ensino-aprendizagem de conteúdos da matemática financeira e Eugênio Stieler (2007) realizou uma pesquisa em uma turma do curso de matemática da UNIFRA, na qual foi aplicada a metodologia da engenharia didática, com a finalidade de introduzir o conceito de capitalização simples e composta e desconto simples com o auxílio da planilha eletrônica do excel. Em sua tese de doutorado, Mardem Machado (1997) elaborou um aplicativo de matemática financeira utilizado por uma turma do 1º ano do curso de ciências econômicas da Universidade Estadual de Londrina para testar se a metodologia focada em recursos da tecnologia hipermídia pode ser mais motivadora.

Além dos textos citados acima, fazem parte desta revisão bibliográfica artigos de algumas revistas da área, como a Revista do Professor de Matemática (RPM) que também se preocupa com o ensino-aprendizagem da matemática financeira, como o artigo de Luis Márcio Imenes (RPM-08, 1986) ao desenvolver dois exemplos de aplicação da matemática financeira relacionados a problemas de desconto, um sobre descontos sucessivos e outro sobre desconto em caso de parcelamento. Manoel Henrique Campos Botelho (RPM-20, 1992) fornece um exemplo de inflação acumulada ao comparar o valor de redução de capacidade de compra ao aumento real da inflação.

Lourdes Almeida e Reginaldo Fideles (2004) expõem, no VII Encontro Paulista de Educação Matemática, um trabalho que utiliza a modelagem matemática como alternativa pedagógica para o ensino de matemática financeira, desenvolvida com um grupo de alunos de um curso de administração de empresas.

Hideo Kumayama (RPM-22, 1992) apresenta a resolução de um problema de pagamento parcelado explicando como utilizar o método de aproximações sucessivas para calcular taxa de juro e Eduardo Colli (RPM-54, 2004) explica o funcionamento de uma modalidade de tributação dos salários, adotada no Brasil, que é o Imposto de Renda com tabela progressiva.

Alguns artigos relacionam a matemática financeira a outros conteúdos da matemática, como o de Renato Fraenkel (RPM-04, 1984) que relaciona logaritmo com juro composto através de um problema onde o tempo é a incógnita. Maria Ignez de Souza Vieira Diniz (RPM-18, 1991) em um artigo sobre resolução de problemas discute uma questão de porcentagem relacionando este conhecimento com funções racionais. João Calixto Garcia (RPM-20, 1992) exemplifica como a soma finita de P.G. pode ser aplicada na matemática financeira através de um problema que compara o valor à vista com desconto de um produto ao seu valor a prazo sem juros.

Ernesto Rosa Neto (RPM-27, 1995) apresenta um problema real de penhora onde a Caixa Econômica comete um erro contra si mesma por não notar que o valor a pagar era uma função linear enquanto que a inflação era função exponencial e Samuel Hazzan (RPM-33, 1997) aborda um problema sobre plano de aposentadoria relacionando P.G. com a matemática financeira. Guillermo Zamalloa Torres (2008) na RPM-66, trabalha um problema para calcular o valor da prestação de um empréstimo, utilizando soma de P.G. em sua resolução.

Outros artigos demonstram uma preocupação histórica ou social no enfoque do tema. Na RPM-43, Wagner da Cunha Fragoso (2000) comenta que Bhaskara já resolvia problemas de ordem comercial e financeira, apresentando um deles em linguagem atual, ou o de Roberto Perides Moisés na Revista Carta na Escola na edição de maio de 2007, ao propor exercícios para os alunos do ensino médio refletirem sobre as armadilhas do crédito fácil, demonstrando preocupação com a tendência atual dos jovens se tornarem presas fáceis de modismos e apelos publicitários.

Concluímos esta revisão citando os livros que fizeram parte de nossa pesquisa bibliográfica. Iniciamos pelo livro de Morgado, Wagner e Zani (2005) que foi fonte de inspiração desta pesquisa, sendo um dos poucos livros encontrados nesta revisão, que realiza uma abordagem visual para o ensino da matemática financeira.

O enfoque do Telecurso 2000 (FIESP/Fundação Roberto Marinho, 2000) em particular da aula 37, utiliza também a representação da situação do problema em diagramas.

O livro Matemática Financeira de Wili Dal Zot (2006), é destinado a estudantes universitários, com informações sobre a história de alguns tópicos desta matéria. Ilydio Pereira de Sá (2005), no livro Matemática Comercial e Financeira (na educação básica) para Educadores Matemáticos, explora situações do cotidiano dos alunos para inserir a matemática financeira na educação básica, demonstrando preocupação didática com o ensino da disciplina.

Outros livros têm como meta abrir os olhos dos leigos para as principais ofertas veiculadas na mídia, guias para fugir das enrascadas do mercado financeiro, como: *A regra do jogo* e *Como comprar mais gastando menos* (Editora Saraiva) de Rafael Paschoarelli Veiga (2007) ou o livro *Dinheiro: os segredos de quem tem* de Gustavo Cerbasi (2005, Editora Gente), que alerta o leitor sobre as armadilhas financeiras do dia-a-dia, fornecendo sugestões para gerir suas finanças, ao abordar temas como formas de investimento e planejamento da aposentadoria.

2.7 – Uma análise preliminar sobre o ensino atual da Matemática Financeira

2.7.1 A matemática financeira e as propostas curriculares

Em documento recente publicado pelo MEC, Orientações Curriculares para o Ensino Médio, volume 2 (2006), os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. Em relação a esta divisão por blocos afirma-se:

> *"No trabalho com Números e operações deve-se proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do quotidiano, tais como: operar com números inteiros e decimais finitos; operar com frações, em especial com porcentagens; fazer cálculo mental e saber estimar ordem de grandezas de números; usar calculadora e números em notação científica; resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa; interpretar gráficos, tabelas e dados numéricos veiculados nas diferentes mídias; ler faturas de contas de consumo de água, luz e telefone; interpretar informação dada em artefatos tecnológicos (termômetro, relógio, velocímetro). Por exemplo, o trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários". (pp.70 e 71)* (grifo nosso)

2.7.2 Abordagem nos livros didáticos

Vários fatores como a falta de tempo, por exemplo, fazem que os livros didáticos tenham forte influência no trabalho dos professores em sala de aula. Acreditamos que eles acabam determinando as escolhas dos conteúdos de maneira mais incisiva que os documentos oficiais.

Tratando-se particularmente de Matemática Financeira, e analisando alguns livros didáticos do Ensino Médio, observamos a abordagem do tema em alguns livros publicados recentemente. A inclusão da Matemática Financeira nesses livros didáticos se dá provavelmente em resposta às orientações contidas nos PCNs (BRASIL, 1999) e à inclusão desse tema nas grades curriculares. Os conteúdos de Matemática Financeira abordados nestes livros didáticos são principalmente juros simples e compostos. Infelizmente a maior parte do material didático existente aborda este tema de forma tradicional, por meio da aplicação de fórmulas sem significado para o aluno. É raro encontrar alguma obra, como A Matemática do Ensino Médio, vol. 2, Coleção do Professor de Matemática (2000), que relacione a Matemática Financeira com situações do dia-a-dia do aluno ou com outros assuntos da matemática, como Progressões e Funções. Mas este não é um livro-texto e sim um livro de apoio para o professor.

Apresentamos a análise de alguns livros didáticos, sob o ponto de vista matemático e didático, verificando quais os conteúdos de matemática financeira contemplados e qual a abordagem utilizada. Selecionamos três livros dentre os que foram aprovados no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), buscando também escolher livros de diferentes editoras. São eles:

Livro 1. DANTE, L. R. Matemática, vol. 1, 1ª ed. São Paulo: Ática, 2004.
Livro 2. PAIVA, M. Matemática, vol. único, 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.
Livro 3. SMOLE, K.S.; DINIZ, M.D.. Matemática – ensino médio, vol. 3, 5ª ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

A análise dos livros sob o ponto de vista didático foi realizada, levando em consideração as seguintes questões:

Questão 1. Como é realizada a abordagem dos conceitos básicos da matemática financeira?

Técnica 1.1. Através de fórmulas, apresentando suas demonstrações.

Técnica 1.2. Através de fórmulas, mas sem apresentar suas demonstrações.

Técnica 1.3. Através da visualização, com generalização.

Técnica 1.4. Através da visualização, sem generalização.

Técnica 1.5. Baseado na visualização mas depois usando fórmulas na resolução dos problemas.

Questão 2. Como é introduzido o conceito?

Técnica 2.1. Começa com um problema motivador para alcançar a construção do conceito.

Técnica 2.2. Começa com um exemplo simples para depois introduzir o conceito.

Técnica 2.3. Começa diretamente com o conceito para depois colocar exemplos, exercícios ou problemas.

Questão 3. Contempla questões do cotidiano do aluno?

Buscamos verificar se o livro didático aborda os conceitos da matemática financeira relacionando-os com questões do cotidiano.

Questão 4. Relaciona os conteúdos da matemática financeira com progressões?

Investigamos aqui se o livro buscou fazer uma integração de juro simples com progressão aritmética e de juro composto com progressão geométrica.

Questão 5. Relaciona os conteúdos da matemática financeira com funções?

Procuramos verificar se o livro buscou fazer uma integração de juro simples com função afim e de juro composto com função exponencial.

Questão 6. Traz contribuições na formação da cidadania?
Procuramos observar se o livro proporciona uma análise crítica da informação, usando exemplos do cotidiano para estimular o aluno a fazer questionamentos, formulações e validação de dados, explorando questões sociais, éticas, de consumo ou políticas.

Se considerarmos que a matemática financeira é um conteúdo novo na grade curricular e que o livro didático é uma das principais fontes de consulta do professor, seria desejável que lhe oferecesse informações na intenção de auxiliá-lo, tanto no preparo de suas aulas quanto na sua prática docente.

A análise minuciosa dos livros selecionados será mostrada de forma sucinta através de uma tabela. Vale a pena ressaltar que não pretendemos, aqui, fazer nenhum juízo de valor quanto à qualidade dos livros, mas discuti-los sob um olhar investigativo.

Questão	**Técnica**	**Liv1**	**Liv2**	**Liv3**
1	1.1	✕	✕	✕
	1.2			
	1.3			
	1.4			
	1.5			
	1.6			
2	2.1	✕	✕	✕
	2.2			
	2.3			
3	__	SIM	SIM	SIM
4	__	SIM	SIM	SIM
5	__	SIM	SIM	SIM
6	__	NÃO	NÃO	SIM

Tabela 01 – Resultado da análise de livros didáticos

Na seqüência, apresentamos através de esquemas a abordagem dos conteúdos sob o ponto de vista matemático. A seqüência adotada pelos autores do Livro 1, no capítulo 9 intitulado Matemática financeira, é apresentada na figura a seguir .

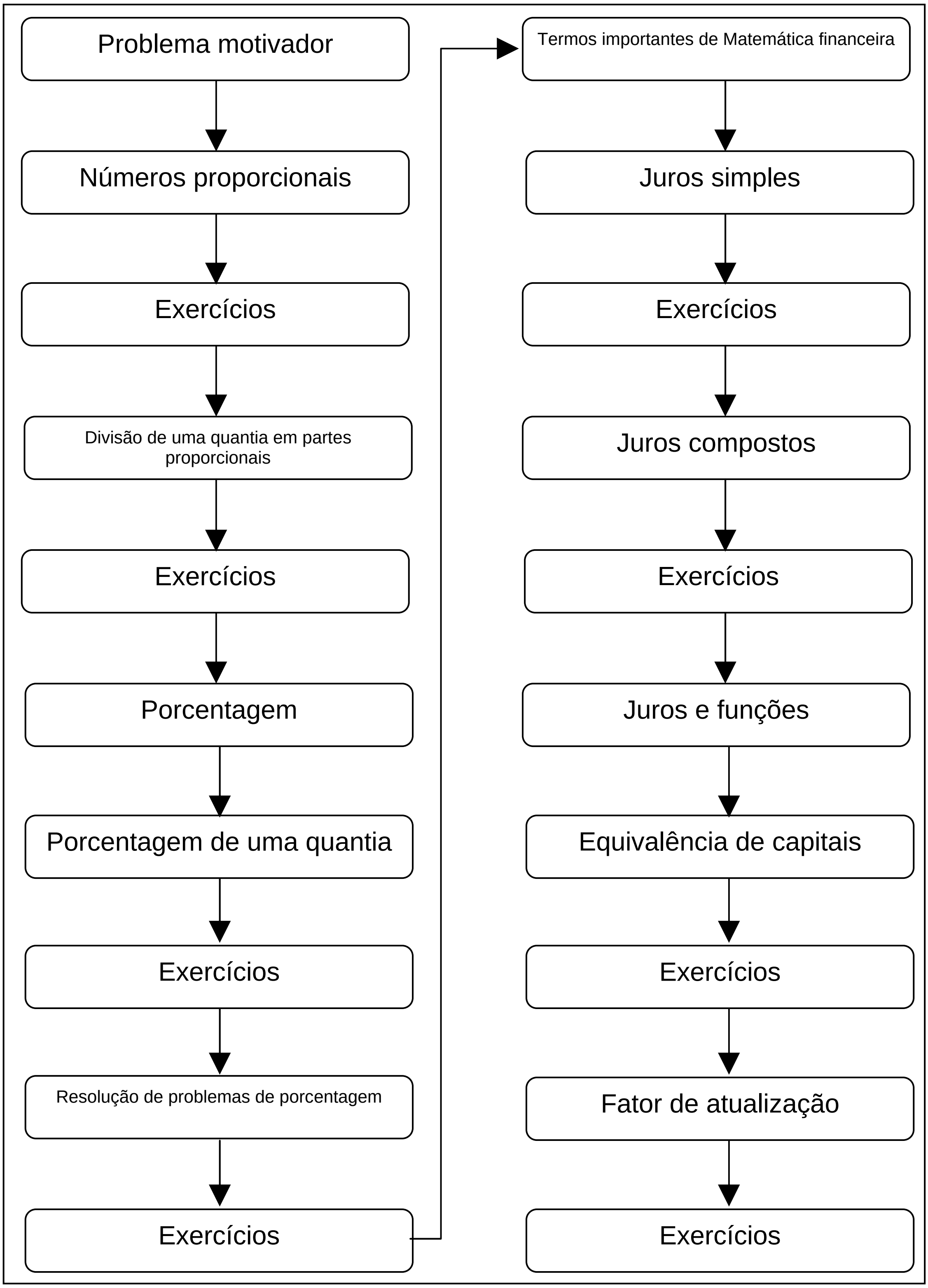


Figura 22 – Seqüência de conteúdos apresentada no Livro 1

A seqüência adotada pelos autores do Livro 2, no capítulo 2 intitulado temas básicos de álgebra e de matemática financeira, é apresentada na figura a seguir.

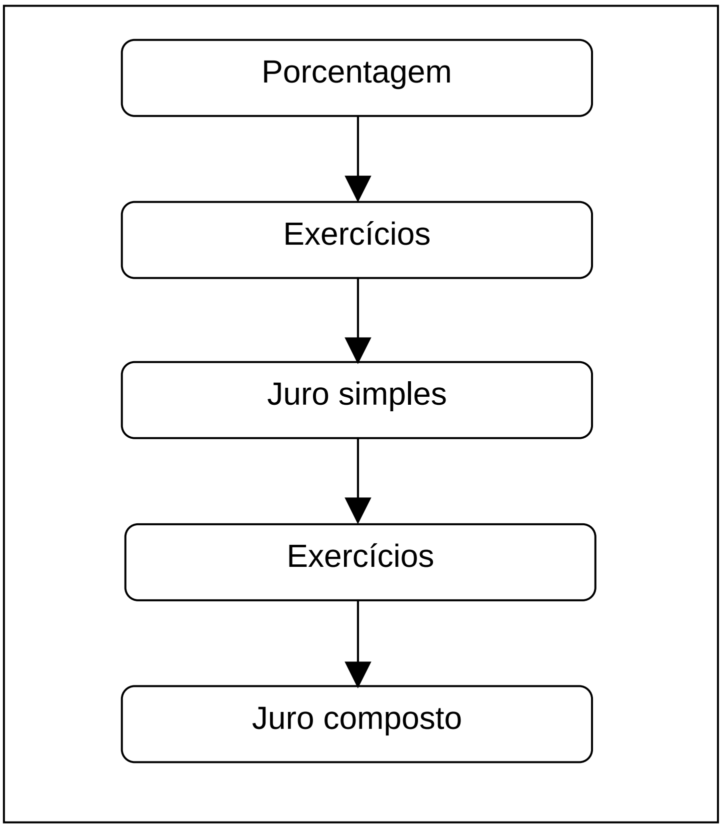


Figura 23 – Seqüência de conteúdos apresentada no Livro 2

No capítulo 10, intitulado função exponencial, o livro 2 apresenta um texto cujo título é "A função exponencial e a capitalização composta", onde relaciona função exponencial com juros compostos. Em seguida apresenta um exercício de juros composto nos exercícios complementares do capítulo.

No capítulo 12, que trata de seqüências, este livro relaciona através de um exemplo, P.A. com juro simples e com outro exemplo relaciona P.G. com juro composto.

A seqüência adotada pelos autores do Livro 3, na unidade 1 intitulado noções de matemática financeira, é apresentada na figura a seguir.

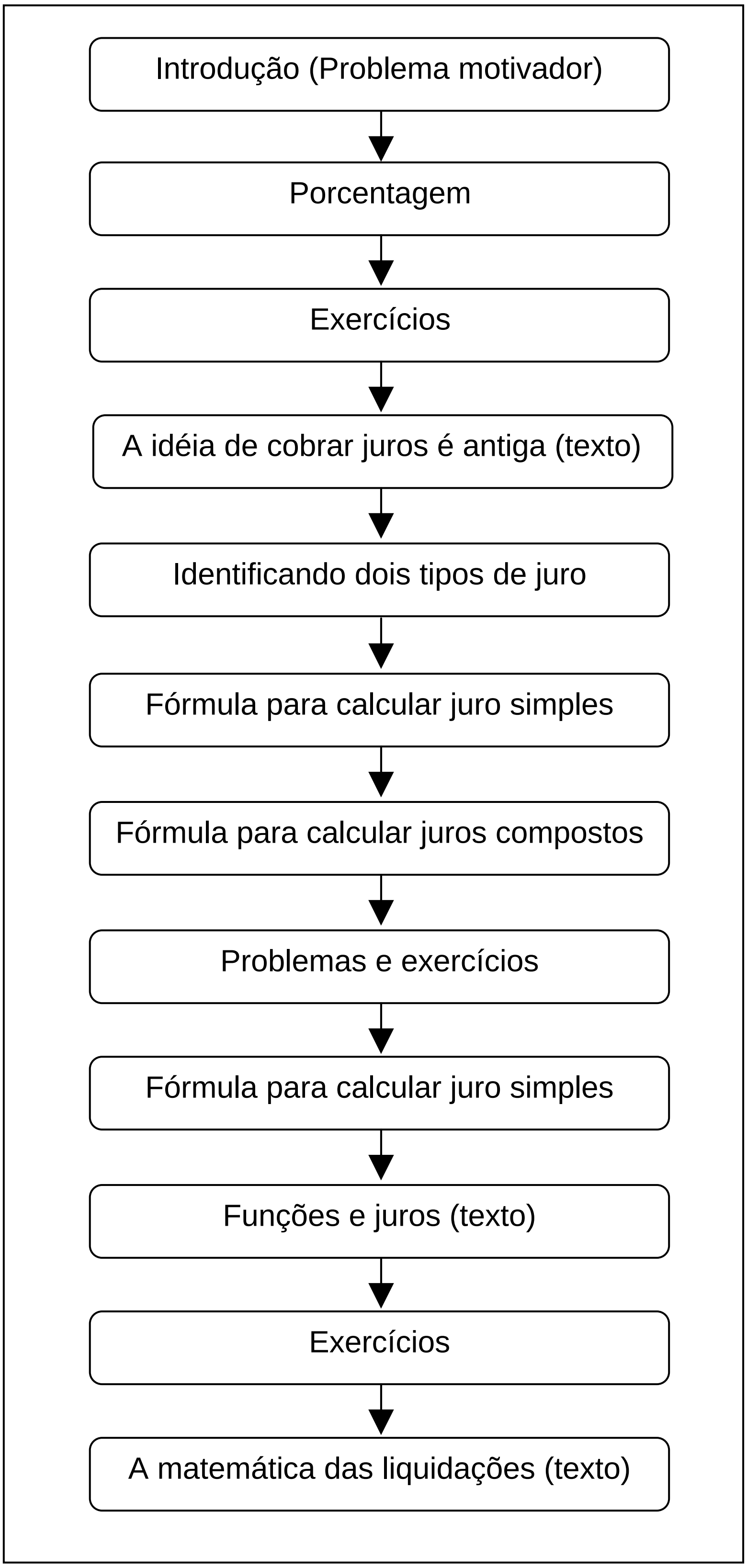


Figura 24 – Seqüência de conteúdos apresentada no Livro 3

2.7.3 Matemática Financeira nas avaliações de larga escala

A dificuldade dos alunos com porcentagem é comprovada pelo baixo índice de acerto em testes de avaliação de larga escala (SAEB, Prova Brasil, Programa Nova Escola, etc.). Apresentamos a seguir alguns exemplos que comprovam isto.

Exemplo 1: PDE – SAEB – Ensino Médio/2008

Este item tem por objetivo avaliar a habilidade de o aluno usar os conceitos de porcentagens para solucionar problemas.

Uma pesquisa sobre o perfil dos que bebem café mostrou que, num grupo de 1 000 pessoas, 70% bebem café e, dentre os que bebem café, 44% são mulheres. Qual a quantidade de homens que bebem café no grupo de 1 000 pessoas?

(A) 700 (B) 660 **(C) 392** (D) 308 (E) 260

Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	E
13%	23%	26%	11%	26%

Tabela 02 – Percentual de respostas às alternativas do exemplo 1

Verificamos que apenas 26% dos alunos, pouco mais que um quarto, responderam acertadamente a esse item.

Para solucionar o problema, um dos caminhos possíveis é o aluno primeiro identificar que no grupo existem 70% de pessoas que bebem café, portanto: Bebem café = 1 000 x 0,7 = 700 pessoas. Como é dado que, entre os que bebem café, 44% deles são mulheres, o total de mulheres que bebem café é: 700 x 0,44 = 308 mulheres. Assim, para achar o número de homens que bebem café, basta fazer a diferença: 700 - 308 = 392. Esse valor é o que está indicado na alternativa “C”. Observando-se a proporção de respostas por alternativa, vemos que a alternativa B (23%) também atraiu os alunos, indicando que eles, provavelmente, subtraíram 100% de 44% encontrando indevidamente 66%, calculando em seguida 66% de 1000: 1 000 x 0,66 = 660. A alternativa E (26%) atraiu os alunos tanto quanto a alternativa correta. Esses alunos devem ter subtraído 70% de 44% encontrando 26%, calculando em seguida 26% de 1000: 1 000 x 0,26 = 260.

Exemplo 2: SEE-RJ - Programa Nova Escola – 3ª série EM

Este item tem por objetivo avaliar a habilidade de o aluno resolver problemas que envolvam porcentagem. Neste caso, trata-se de um problema inverso (calcular a quantia cujos 5% representam a quantia dada) e não direto (calcular os 5% de uma quantia).

Um vendedor recebe como salário 5% do valor das vendas efetuadas no mês. Se em março, esse vendedor recebeu como salário R$ 1.250,00, o valor total das vendas por ele, nesse mês foi:

(A) R$ 2.500,00 (B) R$ 7.250,00 (C) R$ 12.500,00 **(D) R$ 25.000,00** (E) R$ 125.000,00

ITEM	BL	OB	GAB	ÍNDICES					PROPORÇÕES DE RESPOSTAS							COEFICIENTES BISSERIAIS						
				DIF	DISCR	ABAI	ACIM	BISSE	A	B	C	D	E	**	*.*	A	B	C	D	E	**	*.*
				DIURNO																		
2	1	2	D	0.33	0.55	0.11	0.66	0.60	0.22	0.18	0.15	0.33	0.12	0.00	0.00	-0.28	-0.23	-0.18	0.60	-0.15	-0.12	-0.75
				NOTURNO																		
				0.29	0.45	0.11	0.56	0.55	0.23	0.19	0.15	0.29	0.12	0.01	0.00	-0.24	-0.19	-0.14	0.55	-0.07	-0.30	-0.63

Tabela 03 – Estatísticas gerais do exemplo 2

Como podemos observar na estatística, este item foi difícil para os alunos, notadamente os do grupo noturno (apenas 29% de acertos), apesar do assunto ser bastante acessível. Houve uma pequena preferência pela alternativa A, que pode sugerir um acerto parcial, pois a resposta difere da correta por apenas um zero a menos.

Analisando os índices de respostas apresentados, podemos identificar que muitos alunos do 3º ano do ensino médio de melhor rendimento no teste erraram as questões de porcentagem. É preciso alertar os professores para o fato dos alunos não estarem construindo o conhecimento acerca desse conceito como seria desejável. É surpreendente como porcentagem, sendo um assunto do dia a dia, tem um índice tão alto de erros. Este fato comprova a necessidade de darmos uma atenção especial ao ensino deste conceito.

2.7.4 Conclusão sobre a análise preliminar

Podemos observar pela análise dos livros didáticos que a abordagem dos conteúdos da Matemática Financeira não é feita de forma que produza sentido para o aluno. Além disso, a análise dos itens de avaliação de larga escala ilustra a dificuldade dos alunos com porcentagem, conceito fundamental para o ensino da Matemática Financeira. Acreditamos que a nossa seqüência didática, que utiliza a abordagem visual para ensinar os conceitos fundamentais da Matemática Financeira, possibilitará a diversidade de resolução de um mesmo problema, auxiliando e estimulando o aluno na criação de sua própria técnica, eliminando fórmulas e regras sem sentido.

CAPÍTULO 3. METODOLOGIA DE PESQUISA: ENGENHARIA DIDÁTICA

Nesta seção apresentaremos os pontos mais relevantes do referencial teórico que subsidiará a nossa metodologia de pesquisa, com base no texto de MACHADO, S.D.A (2002). Esta metodologia é chamada de Engenharia Didática e se insere no quadro teórico da Didática da Matemática.

3.1 O que é Engenharia Didática?

Pelo termo engenharia didática, conceito que nasceu em meados da década de 1980, entende-se tanto uma **metodologia de pesquisa** (Artigue, 1988) quanto uma **produção para o ensino** (Douady,1993). O termo engenharia didática visto como metodologia de pesquisa é empregado em pesquisas da didática da matemática que incluem uma parte experimental baseada em realizações didáticas, i.e., concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino, com a finalidade de obter informações para desvelar o fenômeno investigado. A Engenharia Didática como produção para o ensino é uma seqüência de aulas (ou atividades) organizadas e articuladas no tempo, de forma coerente, para a realização de um projeto de aprendizagem, que vai passando por evoluções decorrentes das trocas entre professor e aluno. Pode-se dizer que a engenharia didática serve para sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática, e se caracteriza também pelos registros dos estudos feitos sobre o caso em questão e pela sua validação.

Metodologia de pesquisa

A engenharia didática é uma metodologia particularmente adaptada para a realização de observações de fenômenos em sala de aula. Ao se desenvolver uma pesquisa no campo da educação matemática tendo como principio metodológico a engenharia didática, articula-se a construção do saber matemático a uma prática reflexiva investigativa diante de uma seqüência didática experimental. No trabalho com a engenharia didática o professor faz da sua ação pedagógica um objeto de investigação através do qual estabelece uma dependência entre saber teórico e saber prático na busca da construção de conhecimento. Esta metodologia favorece uma ligação entre a pesquisa (estudo minucioso do conteúdo que se quer melhorar em sala de aula) e a ação pedagógica

Trata-se de uma sistematização da pesquisa de maneira que ciência e técnica são mantidas articuladas. Nesse caso, o saber acadêmico é constituído pelos resultados da pesquisa, enquanto suas constatações práticas estão relacionadas com o saber a ser ensinado. A estrutura proposta pela engenharia didática mantém um elo entre esses dois saberes, aproximando a academia das práticas escolares. O laboratório da pesquisa é tanto o escritório de trabalho, a sala de aula, a escola ou a sociedade, quanto a história. É o lugar onde juntamos os dados e onde colocamos a prova as hipóteses.

A engenharia didática é uma forma de organizar a pesquisa em didática da matemática, a partir da criação de uma seqüência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações para desvelar o fenômeno investigado. A aplicação se inicia por uma fase de análises preliminares, valorizando experiências anteriores do pesquisador. Ela se caracteriza, também, pelo estudo de casos onde a validação é essencialmente interna, prescindindo, assim, de análises comparativas utilizadas em outras metodologias, utilizando, como fundamento básico, uma confrontação entre uma análise a priori e a posteriori. A engenharia didática consiste em questionar, através de realizações efetivas em classe, as relações supostas pela teoria entre o ensino e a aprendizagem.

Produção para o ensino

Para DOUADY (1993), apud MACHADO, (2002, p.198) pelo termo Engenharia Didática entende-se:

> *"uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor"*

As praticas educativas desenvolvidas a partir de princípios da engenharia didática devem ser compreendidas como práticas de investigação. À medida que o professor vai trabalhando os saberes escolares, estes devem ser colocados em dúvida e discutidos para que os alunos tenham consciência da complexidade dos objetos estudados. É partindo dessa abordagem que a aprendizagem se consolida, pois nela o que importa é a compreensão a respeito do conhecimento trabalhado.

O educador que desenvolve suas atividades com os suportes da engenharia didática consegue dar significado ao que ensina à medida em que trabalha a partir dos obstáculos epistemológicos apresentados pelos alunos os quais, ao serem tratados corretamente, produzem a formação da chamada autonomia intelectual.

O trabalho do professor, ao elaborar ou escolher uma seqüência didática, deve levar em conta de forma integrada: o domínio do conhecimento, o conhecimento prévio do aluno, o papel do professor e dos seus alunos. Para tanto, em cada seqüência é necessária uma definição do significado da aprendizagem. A criação de uma seqüência didática se dá num processo interativo**,** no qual o objetivo é a elaboração de um grupo de decisões para que os processos tenham significados e as estratégias sejam mais efetivas. Leva-se em consideração as respostas dos alunos e as condições às quais estão submetidas. Desta forma o processo envolve: uma análise da situação proposta, das condições da organização, da escolha de estratégias baseadas nas análises da instrução dada, da determinação de critérios de avaliação, da elaboração de questões que estejam de acordo com os critérios determinados e uma revisão de todo processo em função desta avaliação.

Teoria x prática

ARTIGUE, apud MACHADO, (2002, p.198) apresenta o trabalho da Engenharia Didática comparando-o com o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Artigue (1988) diz que:

> *"Esse termo foi cunhado para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta". (p. 283)*

A origem desta abordagem metodológica está na preocupação com uma certa "ideologia de inovação" presente no campo educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, deslocada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do processo de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da realização didática na sala de aula como prática de investigação.

Por outro lado, para o professor, uma das principais fontes das seqüências didáticas continua sendo os livros didáticos e para-didáticos. Parte das revistas científicas, da área de Educação, aborda assuntos voltados para questionamentos teóricos, com uma linguagem acessível a um pequeno público (a comunidade acadêmica). Por outro lado, as revistas destinadas aos professores de ensino fundamental e médio abordam as experiências vivenciadas em sala de aula de modo superficial e resumida. Surge, portanto, o clássico problema da integração entre a pesquisa didática e a sala de aula.

Através da Engenharia Didática o professor tem a oportunidade de refletir e avaliar a sua ação educativa e é diante desse processo de reflexão que redireciona e re-significa o trabalho que desenvolve. Não existe ninguém melhor que o próprio professor para entender a complexidade dos fatos ocorridos em sala de aula, ninguém melhor para entender as dúvidas e dificuldades que os alunos apresentam. Por isso, é ele quem deve buscar entender os motivos que impedem o aprendizado dos alunos investigando e refletindo as próprias ações educativas efetuadas em sala de aula. Portanto, a Engenharia Didática constitui-se um referencial metodológico importante e viável para o processo de ensino e aprendizagem já que permite a compreensão dos efeitos causados pelas práticas docentes desenvolvidas em sala de aula.

Não dá mais para continuar estudando sem compreender o que está sendo apresentado; os alunos precisam ter acesso aos conhecimentos compreendendo a essência dos mesmos, daí a necessidade de se buscar novas metodologias de ensino que proporcionem um verdadeiro aprendizado. Nesse sentido a Engenharia Didática se apresenta como abordagem formadora da pratica educativa do professor, à medida que permite investigar a sua própria ação na sala de aula. Esse processo de investigação da própria prática é de fundamental importância para a formação do professor por lhe possibilitar uma ampliação dos saberes que ensina**,** já que necessita agir criticamente sobre este, buscando a sua verdadeira compreensão.

Portanto, é diante da necessidade de se redimensionar a forma como o ensino de matemática vem sendo desenvolvido que a Engenharia Didática se apresenta como um referencial metodológico que proporciona a construção do saber matemático via processo de reflexão sobre as praticas educativas implementadas.

3.2 Fases da Engenharia Didática

Na engenharia didática há quatro fases: 1ª fase**:** análises preliminares, 2ª fase**:** concepção e análise *a priori*, 3ª fase**:** experimentação e, por fim, a 4ª fase**:** análise *a posteriori* e validação. A seguir abordaremos detalhadamente cada uma dessas fases.

Primeira fase: Análises preliminares

A análise preliminar é feita para que possamos compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada. É uma fase de levantamento de hipóteses.

Para organizar essa análise é recomendável uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado. Segundo MACHADO (2002) esta fase objetiva realizar considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos existentes sobre o assunto escolhido, bem como a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino; a análise de como vem sendo desenvolvido o ensino atual do referido assunto e seus efeitos, a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que apresentam diante do saber apresentado e a análise dos entraves didáticos pedagógicos que dificultam o processo de ensino e aprendizagem. Tudo isso levando em consideração os objetivos específicos da pesquisa, pois são estes que norteiam o grau de aprofundamento dessas análises. Por exemplo, sabe-se que em geral os alunos têm dificuldades em trabalhar com frações equivalentes. Isso deve ser levado em conta no ensino de porcentagem.

As análises preliminares são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia e dar subsídios ao desenvolvimento da análise *a priori*, porém elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho. É diante da realização de uma análise preliminar seguida de uma análise a priori que o professor pode pensar na elaboração de uma seqüência didática a qual será objeto de investigação.

Segunda fase: Concepção e análise *a priori*

A segunda fase da engenharia didática consiste numa análise *a priori* que se faz sobre o saber em estudo. Nela estão presentes duas etapas que são a de descrição do objeto e outra de previsão de melhorias para o processo de ensino e aprendizagem onde são apontadas problemáticas referentes ao objeto de estudo e são construídas hipóteses que serão verificadas na prática investigativa da seqüência didática a ser elaborada. Na análise *a priori* deve-se:

- elaborar uma seqüência didática (atividades a serem propostas para o aluno);
- descrever cada escolha local feita e as características da situação a-didática decorrentes de cada escolha;

- prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

BROUSSEAU (1986), apud FREITAS (2002, p.69) sobre o termo situação a-didática diz:

> *"Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer indicação intencional. Uma tal situação é chamada de situação a-didática."*

A elaboração das hipóteses constitui elemento importante no trabalho com a engenharia didática, pois são elas que serão comparadas com os resultados finais da seqüência didática para verificar a validação ou não da mesma. ARTIGUE, apud MACHADO, (2002, p.205) descreve que:

> *"A análise a priori deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da engenharia didática teve desde sua origem a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações.*
> *(...) o objetivo da análise a priori é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar o comportamento dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará em jogo, na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori a ser operada na quarta fase". (p. 293)*

Por exemplo, no nosso trabalho escolhemos trabalhar a taxa de porcentagem na notação decimal e a representação no eixo das setas, prevendo que assim é possível facilitar a resolução dos problemas e, mais adiante, a compreensão do conteúdo de juros.

É fundamental ter o controle das situações que se põem em jogo na etapa experimental. Na análise *a priori* efetiva-se esse controle definindo-se certo número de variáveis didáticas chamadas de variáveis de comando (ou potenciais) que podem interferir no sistema de ensino. É sobre elas que se deve ter controle a fim de relacionar o conteúdo com a seqüência proposta para desenvolver a apreensão dos conceitos, no nosso caso, os conceitos básicos da matemática financeira. São elas: as *variáveis macro-didáticas ou globais* e as *variáveis micro-didáticas ou locais*. As variáveis locais são aquelas que dizem respeito ao planejamento específico de uma sessão da seqüência didática ou de uma fase. As variáveis globais referem-se ao planejamento geral da engenharia.

ALMOULOUD (2008, p.67) descreve:

> *"Esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos)".*

As variáveis de ordem global precedem a descrição de cada fase da engenharia, quando influem as variáveis locais. Como já foi mencionado, a validação, na engenharia didática, é essencialmente interna e esse fato constitui uma das originalidades desse método. É importante notar que esse processo de validação se instaura desde a fase de concepção e da análise *a priori*. As análises preliminares devem permitir ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem: a análise a priori e construção da seqüência de ensino. Na nossa pesquisa, devemos definir as variáveis potenciais para verificar até que ponto o uso do método visual favorece a superação dos obstáculos ou proporciona outros.

Segundo ROBERT (1992), apud ALMOULOUD (2008, p.65) :

> *"Se as variáveis didáticas potenciais não são cuidadosamente identificadas, nada garante a generalidade das explicações dos fatos observados e dos efeitos do artefato utilizado que acontecem independentemente do controle do experimentador".*

Para garantir a eficácia da pesquisa e da interpretação de seus resultados, devemos definir claramente as variáveis envolvidas. O objetivo da análise a priori é determinar no que as escolhas feitas (no caso as variáveis) permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Dessa forma, segundo ALMOULOUD (2008, p.67), devemos:

- *"Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação a-didática desenvolvida.*
- *Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;*
- *Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem".*

No nosso caso, por exemplo, a decisão de fazer a integração dos conteúdos da matemática financeira com funções e progressões é uma das variáveis globais da dimensão epistemológica.

Terceira fase: Experimentação

Esta fase da realização da engenharia conta com uma certa população de alunos. Ela começa quando o pesquisador entra em contato com essa população de alunos, e é nessa fase que ocorre também a "Formalização" ou "Institucionalização" dos conceitos trabalhados na atividade aplicada.

A fase da experimentação consiste no desenvolvimento das ações em sala de aula visando responder às questões da análise *a priori*. É o momento de aplicação da seqüência didática e começa quando o pesquisador entra em contato com os alunos-objeto da investigação.

Segundo MACHADO (2002, p.206), na fase experimental da seqüência didática é necessário deixar claro os seguintes pontos:

- *a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;*
- *o estabelecimento do contrato didático;*
- *a aplicação dos instrumentos de pesquisa;*
- *o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).*

Estas aulas de aplicação da seqüência didática não podem ser consideradas aulas comuns, pois é necessário que o pesquisador esteja atento ao transcorrer da aula, levando em consideração todas as informações que estão relacionadas à pesquisa. Este cuidado do pesquisador é importante para que o relatório seja fiel ao transcorrido nas aulas. O registro dessas informações deve ser feito com muito cuidado, para isso existem várias opções como: filmagens, gravações, registros escritos, etc.

Na nossa pesquisa, essa fase consiste na aplicação das seqüências didáticas preparadas, explorando sempre a representação visual no eixo das setas.

Quarta fase: Análise *a posteriori* e validação

É nesse estágio que se dá o tratamento dos dados levantados na aplicação da seqüência didática. Essa fase se baseia na compreensão e na interpretação dos resultados da experimentação, nas observações realizadas durante cada sessão de ensino e nas produções dos alunos feitas em classe ou fora dela. Segundo MACHADO (2002, p.207):

> *"Muitas vezes, para uma melhor compreensão do ocorrido, tornam-se necessários dados complementares como: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas tanto durante a experimentação, quanto no final dela. Isto é, as fases 3 e 4 não são excludentes, mas complementares".*

Nessa fase, do ponto de vista metodológico, garante-se a essência do caráter científico, onde a validação ou refutação dos resultados é obtida pela confrontação entre os dados na análise *a priori* e *a posteriori*, verificando-se as hipóteses realizadas no início da pesquisa. Na engenharia didática a fase de validação é feita durante todo o processo de desenvolvimento da proposta em meio a uma constante confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e na análise *a posteriori*, onde é verificado se as hipóteses feitas no inicio da pesquisa foram confirmadas.

Nesta fase, pretendemos verificar se as hipóteses sobre a adoção da abordagem visual no ensino de Matemática Financeira são validadas.

Este capítulo tem por objetivo aplicar a Engenharia Didática em um caso de atividade pedagógica real.

4.1 Introdução

Com a finalidade de pesquisar como se dá a assimilação e produção de sentido com relação ao ensino-aprendizagem de matemática financeira, preparamos uma seqüência de atividades seguindo os princípios da engenharia didática. Segundo Artigue (1988), na Engenharia Didática considera-se um conteúdo do sistema de ensino, cujo funcionamento parece, por algum motivo, pouco satisfatório e faz-se uma análise deste com a intenção de propor mudanças, para um possível funcionamento mais satisfatório.

Buscamos investigar como se desenvolve o raciocínio do aluno no decorrer da resolução de problemas propostos sobre os conceitos fundamentais da matemática financeira e após um estudo dos obstáculos, das dificuldades e das variáveis didáticas envolvidas, elaboramos uma seqüência de aulas organizada em cinco sessões: porcentagem, juros simples, fator de aumento e de desconto, juros compostos e o valor do dinheiro no tempo. Como projeto piloto aplicamos, em 2007, as atividades referentes às duas primeiras sessões. Procuramos desenvolver um trabalho diferente do modelo tradicional, visando incentivar o aluno à reflexão e à descoberta. Este projeto serviu como parâmetro para avaliarmos os pontos positivos e negativos da seqüência, visando detectar possíveis falhas nas atividades a tempo de fazermos as alterações necessárias.

4.2 O campo de Pesquisa

A experimentação da metodologia proposta neste trabalho ocorreu no horário de aula em uma turma do período diurno, no 2º trimestre de 2008. Esta turma é composta de vinte e três alunos do 2º ano do Ensino Médio do Centro Educacional “Alexis Novellino”, escola localizada na cidade de Cabo Frio.

Elaboramos um bloco de atividades, para cada uma das cinco sessões. Os alunos foram divididos em dez duplas e um trio, que foram mantidos em todas as aulas. Nestas atividades os alunos foram orientados a contar com o auxílio de calculadoras científicas.

Durante a experimentação, contamos com o apoio de dois observadores, estagiários de uma faculdade de licenciatura em matemática de Cabo Frio. Cada observador recebeu um roteiro para cada sessão (anexo), para acompanhar o desenvolvimento das atividades de duas duplas (A e B). As duplas observadas foram fixadas aleatoriamente, sendo posteriormente nomeadas de A e B. Os diálogos dessas duplas, enquanto resolviam as atividades, foram gravados em áudio. Os roteiros para os observadores foram recolhidos após a conclusão das atividades de cada sessão. Os observadores foram orientados a não interferir na resolução das atividades.

As atividades elaboradas visando à formação da seqüência didática foram organizadas em cinco sessões, com duração de 4 horas-aula cada, 2 horas-aula para a realização e correção das atividades em sala de aula e 2 horas-aula para a correção das atividades realizadas em casa. Visando otimizar o tempo e dar movimento ao eixo das setas, a correção das atividades foi feita em telas preparadas no power-point projetadas em um quadro branco, por um computador acoplado ao data-show. Também realizamos ao término da primeira sessão um debate em grupo visando fazer uma avaliação crítica do método, analisando com os alunos seus pontos positivos e negativos, vantagens e desvantagens além das dificuldades encontradas pelos mesmos na realização das atividades. Pretendemos com esta discussão construir mais um instrumento de avaliação para a análise *a posteriori*.

4.3 Material

Para a realização da pesquisa usamos o seguinte material:

- blocos relativos às atividades de cada sessão da seqüência didática;
- calculadora científica para cada aluno;
- gravador com a finalidade de obter as informações adicionais sobre a estratégia de resolução dos problemas por alguma dupla em caso de necessidade;

- microcomputador e data-show para a correção das atividades propostas em cada sessão.
- materiais didáticos: cópias das 5 sessões didáticas, cada uma seguida de uma atividade para casa, que visava complementar e fixar o conteúdo (Anexos 1 a 10)

4.4 Análises preliminares

O primeiro momento da Engenharia, referente às análises prévias foi organizado com o objetivo de analisar as concepções dos alunos, identificar suas dificuldades e obstáculos com relação aos conteúdos que servem de pré-requisitos para a introdução da matemática financeira.

Nesta fase, investigamos os conteúdos da matemática financeira que pretendíamos desenvolver junto aos alunos, e a maneira como estes vêm sendo trabalhados. Esta análise foi feita no capítulo 2.7 visando dar subsídios ao desenvolvimento da próxima fase, a análise a priori.

4.5 Variáveis macro-didáticas

Epistemológicas (associadas à matemática financeira, sua origem, seu lugar na diversidade dos problemas):

- Ensino da matemática financeira enfatizando a representação das variáveis de um problema para o eixo das setas;
- utilização da junção da taxa com o capital como fator, na notação decimal, de modo que, para encontrar um valor com acréscimo com uma taxa i de aumento, multiplica-se a quantia original por (1+i) e se for desconto de i, multiplica-se a quantia original por (1- i);
- integração dos conteúdos da matemática financeira com funções e progressões;
- exploração de problemas práticos, do dia-a-dia dos cidadãos;

Cognitivas (associadas às dimensões cognitivas dos alunos do 2º ano do ensino médio; capacidades e habilidades dos alunos;):

- capacidade de representação espaço-temporal.

Didáticas (associadas ao sistema de ensino vigente; instrumentalização):

- incentivo ao uso da calculadora;
- valorização da validação pelos alunos;
- valorização e provocação de conjecturas pelos alunos;
- exploração do trabalho em grupo;
- análise de diversas estratégias para resolver um mesmo problema;
- ênfase ao raciocínio evitando a memorização de fórmulas.

4.6 Primeira sessão: porcentagem

A primeira sessão tem por objetivo proporcionar uma retomada do estudo de porcentagem, conceito fundamental para a aquisição dos conteúdos que serão trabalhados nas próximas sessões. Quanto à aprendizagem de conhecimentos matemáticos, enfatizamos a necessidade da representação de porcentagens sob a forma de número decimal por facilitar a resolução de alguns problemas futuros. Destacamos ainda, que para conseguir compreender e resolver as atividades os alunos precisam saber trabalhar com frações equivalentes. Criamos uma abordagem visual para o ensino de porcentagem por acreditarmos que facilita a aprendizagem e para começar a trabalhar com os alunos a transcrição das variáveis de um problema para o eixo das setas.

4.6.1 Concepção e análise *a priori* da sessão 1

Para o desenvolvimento desta sessão foram elaboradas oito questões. Vale a pena destacar que os alunos já haviam sido apresentados ao eixo das setas no ensino de progressões. Pedimos aos alunos que resolvessem as questões usando o eixo das setas, a fim de familiarizá-los com o método visual além de facilitar a análise de suas resoluções. Estas atividades servirão como fonte de dados para uma análise a posteriori. A validação ou refutação da hipótese da pesquisa se dará pela confrontação entre a análise a priori com a análise a posteriori.

Variáveis micro-didáticas:

- Utilização do eixo das setas como ferramenta para o ensino de porcentagem;

- integração de porcentagem com frações equivalentes;
- incentivo à representação de porcentagens sob a forma de número decimal.

A seguir apresentaremos uma previsão dos possíveis comportamentos dos alunos frente aos problemas que teriam que resolver e observar os objetivos de aprendizagem a serem alcançados em cada questão. O bloco de atividades das sessões, assim como as atividades para serem realizadas em casa, encontra-se em anexo.

As resolver as questões propostas nesta sessão é possível que surjam as seguintes situações:

- o aluno não consiga entender o que se pede na atividade por questão de interpretação de texto;
- o aluno apresente dificuldade de resolver as questões por não conseguir relacionar porcentagem com fração, ou por não ter bem formado o conceito de frações equivalentes;
- o aluno não consiga fazer a transcrição das variáveis do problema para o eixo das setas;
- o aluno não consiga criar uma solução para o problema, mesmo tendo feito corretamente a representação no eixo das setas.

4.6.2 Experimentação da sessão 1

A aplicação da primeira sessão ocorreu no dia 22 de agosto de 2008 das 8h50 às 10h50 com 20 minutos de intervalo para o recreio. Na aula anterior os alunos escolheram seus pares, após combinarmos que durante todas as sessões as duplas não poderiam se alterar, sendo formadas pelos mesmos alunos até o fim da pesquisa, visando facilitar as anotações e posterior organização e computação dos dados, além do que, julgamos, facilitará a troca de experiências e discussão entre os componentes. Como são 23 alunos na turma, decidimos formar 10 duplas e um trio. A fim de preservar suas identidades, os grupos serão nomeados de A a L, sendo seus componentes identificados por A1 e A2, B1 e B2, etc.

Durante a aplicação das atividades não houve interferência na resolução dos alunos, a única instrução dada foi que buscassem um caminho para resolver as questões evitando deixá-las em branco.

Neste dia houve uma falta, a do aluno L3.

4.6.3 Análise *a posteriori* e validação da sessão 1

A análise *a posteriori* desta sessão assentou-se sobre:

- as respostas dadas pelos alunos às questões propostas na atividade;
- os relatórios preenchidos pelos observadores, auxiliados por gravação em áudio;
- debate realizado ao fim da sessão.

Inicialmente, para proporcionar uma visão geral, apresentamos um gráfico relacionando cada questão com sua porcentagem de acertos (universo de 11 duplas). Em seguida, apresentamos um gráfico relacionando cada dupla com sua porcentagem de acertos em todas as questões da 1ª sessão.

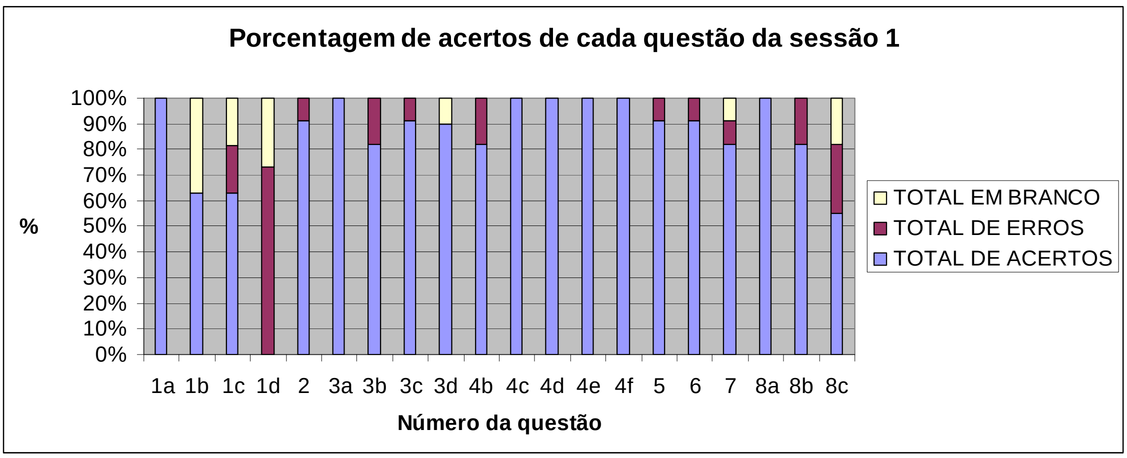


Figura 25 – Porcentagem de acertos de cada questão da sessão 1

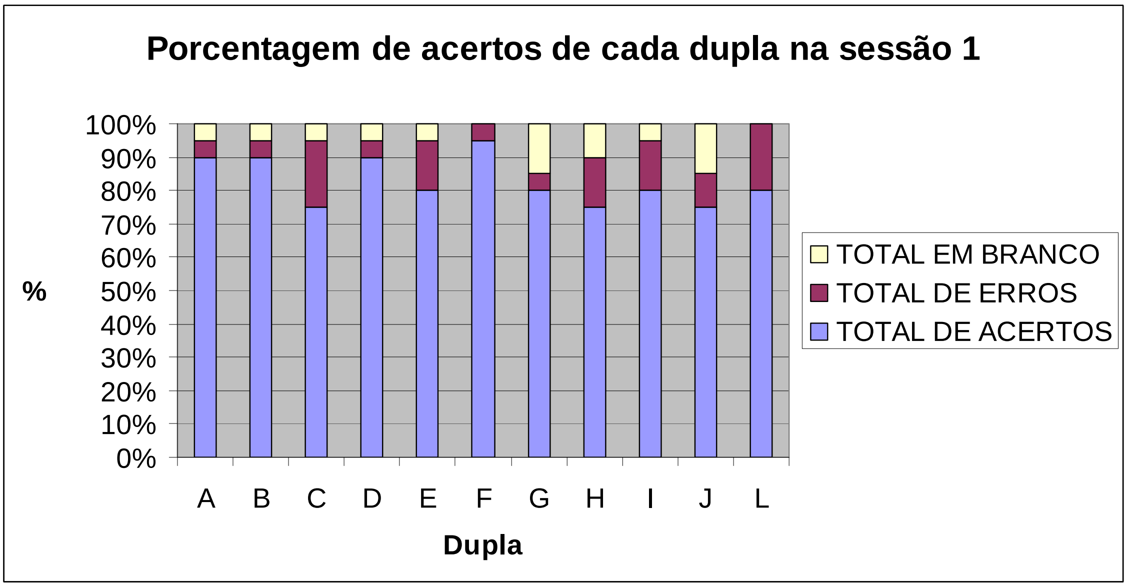


Figura 26 – Porcentagem de acertos de cada dupla na sessão 1

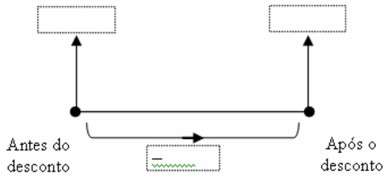
Para facilitar a leitura e evitar o acesso constante aos anexos deste trabalho, apresentaremos um recorte de cada questão seguida por sua discussão.

QUESTÃO 1

QUESTÃO 1

Na venda de uma mercadoria de R$ 100,00, o dono da loja concedeu um desconto de R$ 5,00.

a) Complete o eixo das setas:



b) Dizemos que foi dado um desconto de R$ 5,00 **sobre** o valor de R$ 100,00. Reescreva esta frase com símbolos usados na matemática.

____

Podemos dizer que o desconto é de R$ 5,00 sobre R$ 100,00 ou ainda: o desconto é de 5 por cento. Escrevemos assim: o desconto é de 5%.

c) Que fração do total representa o valor de venda?

d) O valor inicial da mercadoria corresponde à fração: ______ + ______ ou a __5__% + ______% = ______%

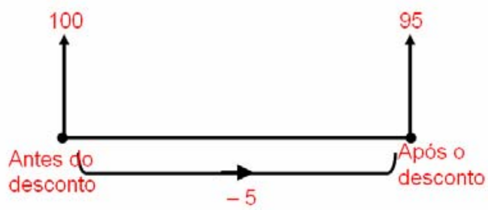
desconto   valor da venda

Concepção e análise *a priori* da questão 1

Como o assunto porcentagem é ensinado no ensino fundamental, pedimos às duplas que discutissem e tentassem resolver a primeira questão sem nenhuma explicação prévia, já que os itens foram elaborados de forma a conduzi-los gradualmente às conclusões almejadas. Sendo assim, coube às duplas, por meio da interpretação, observação, reflexão e discussão resolver de forma autônoma esta questão. Esperávamos que conseguissem realizar esta tarefa sem problemas. Apresentamos a seguir um modelo esperado das respostas:

1. Na venda de uma mercadoria de R$ 100,00, o dono da loja concedeu um desconto de R$ 5,00.

a) Complete o eixo das setas:



b) Dizemos que foi dado um desconto de R$ 5,00 **sobre** o valor de R$ 100,00. Reescreva esta frase com símbolos usados na matemática. $\frac{5}{100}$

Podemos dizer que o desconto é de R$ 5,00 sobre R$ 100,00 ou ainda: o desconto é de 5 por cento. Escrevemos assim: o desconto é de 5%.

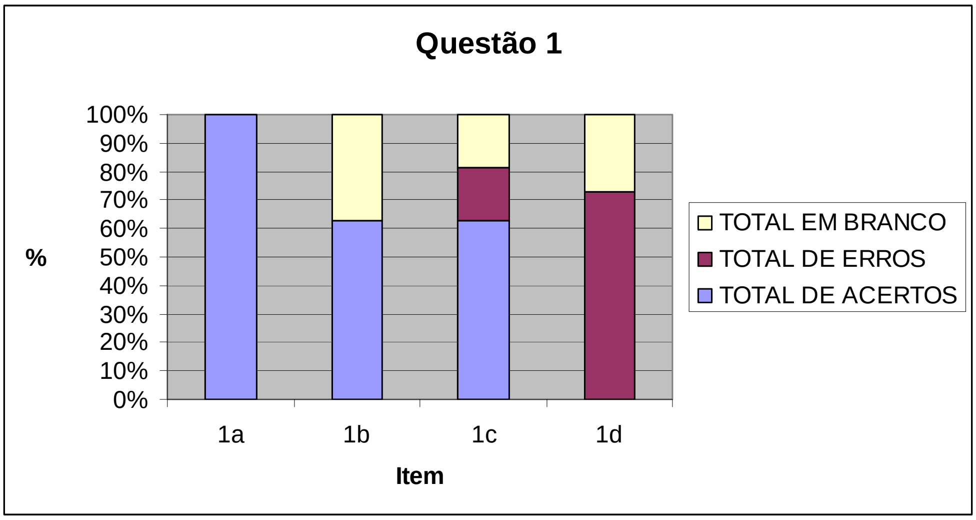
c) Que fração do total representa o valor de venda? $\frac{95}{100}$

d) O valor inicial da mercadoria corresponde à fração: $\frac{5}{100} + \frac{95}{100}$ ou a 5 % + 95 % = 100 %

Experimentação da questão 1

Enquanto o data-show era instalado na sala de aula, cada dupla foi lendo e tentando resolver a primeira questão. A seguir a professora fez a correção da questão explicando o significado dos componentes do eixo das setas utilizando data-show para projetar uma tela feita no power point. Vale a pena ressaltar que a apresentação contém animação dos elementos dos problemas, que acreditamos facilitar a aprendizagem, mas que não são possíveis de serem apresentados neste documento, por ser um meio estático.

Análise *a posteriori* e validação da questão 1



No item 1a todas as duplas acertaram, demonstrando que compreenderam como se faz a transposição de valores para o eixo das setas. No item 1b, 7 duplas acertaram e 4 duplas não fizeram, pois não perceberam que este item pedia uma resposta. De fato, falta um espaço na redação do texto. Já no item 1c, sete duplas acertaram, duas não fizeram e duas erraram, respondendo $\frac{5}{100}$ pois acharam que estava sendo pedida a fração referente ao desconto. O item 1d não teve acertos. 8 duplas erraram e 3 deixaram em branco. Consideramos que isto se deve ao o fato de os alunos não terem compreendido o que era para ser feito, como mostra a figura a seguir.

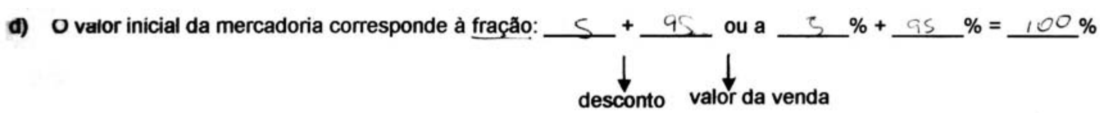
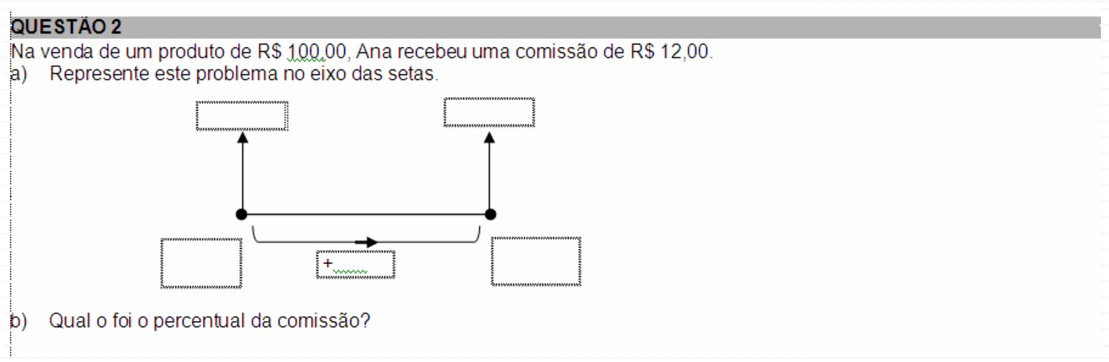

d) O valor inicial da mercadoria corresponde à fração: 5 + 95 ou a 5 % + 95 % = 100 %
desconto
valor da venda

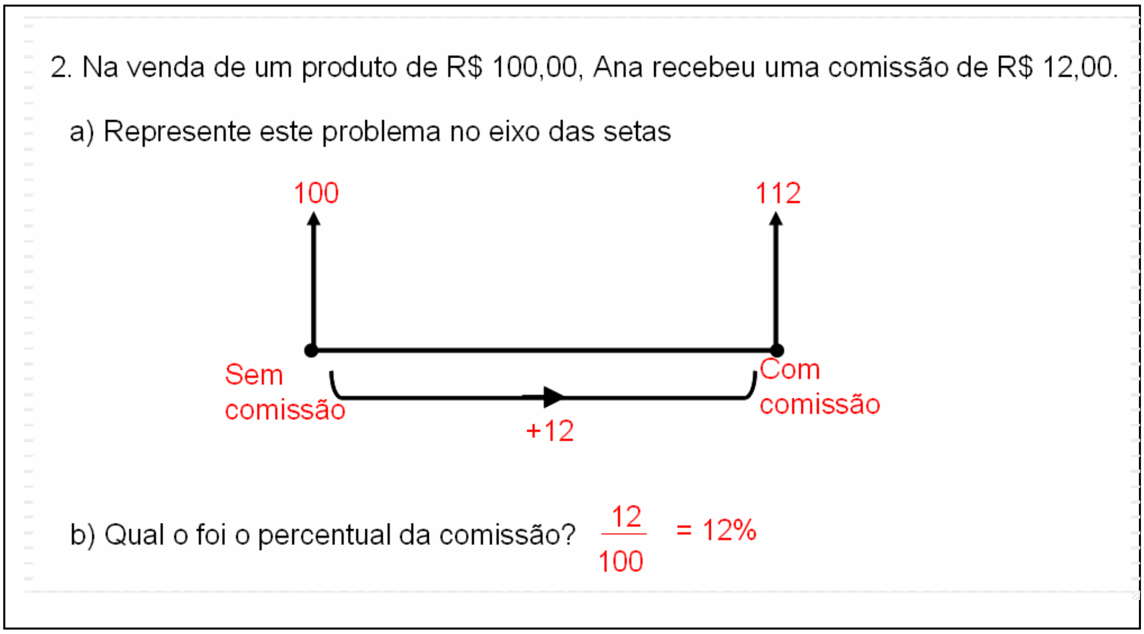
Figura 27 – Resolução incorreta da dupla A

QUESTÃO 2

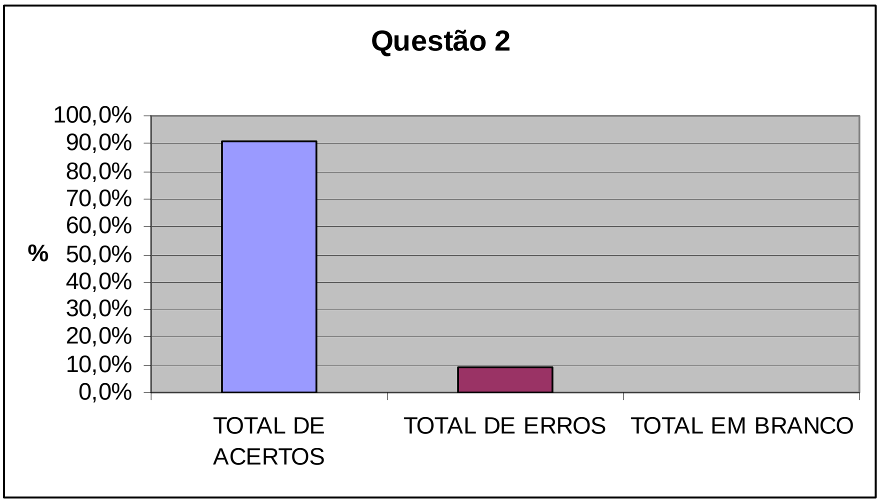


Concepção e análise *a priori* da questão 2

Na questão 2 procuramos verificar se os alunos conseguiam fazer a transcrição das variáveis do problema para o eixo das setas e a partir daí obter a porcentagem correta. Neste caso, esperávamos o seguinte resultado:



Análise *a posteriori* e validação da questão 2



A dupla L, por falta de atenção, interpretou que era um problema de desconto. Foi a única dupla que errou, as outras dez acertaram a questão. A figura abaixo mostra a resolução da dupla L.

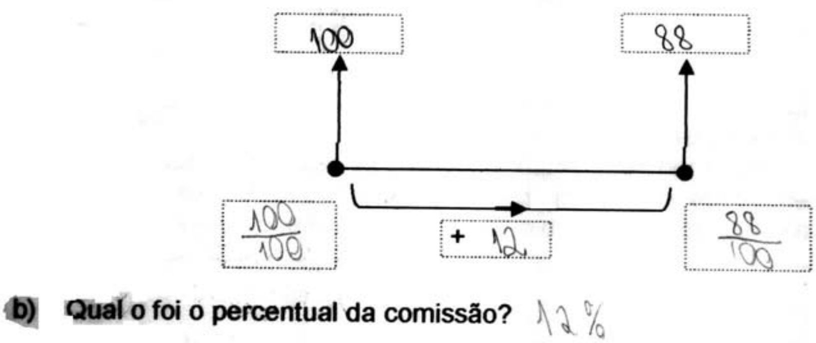
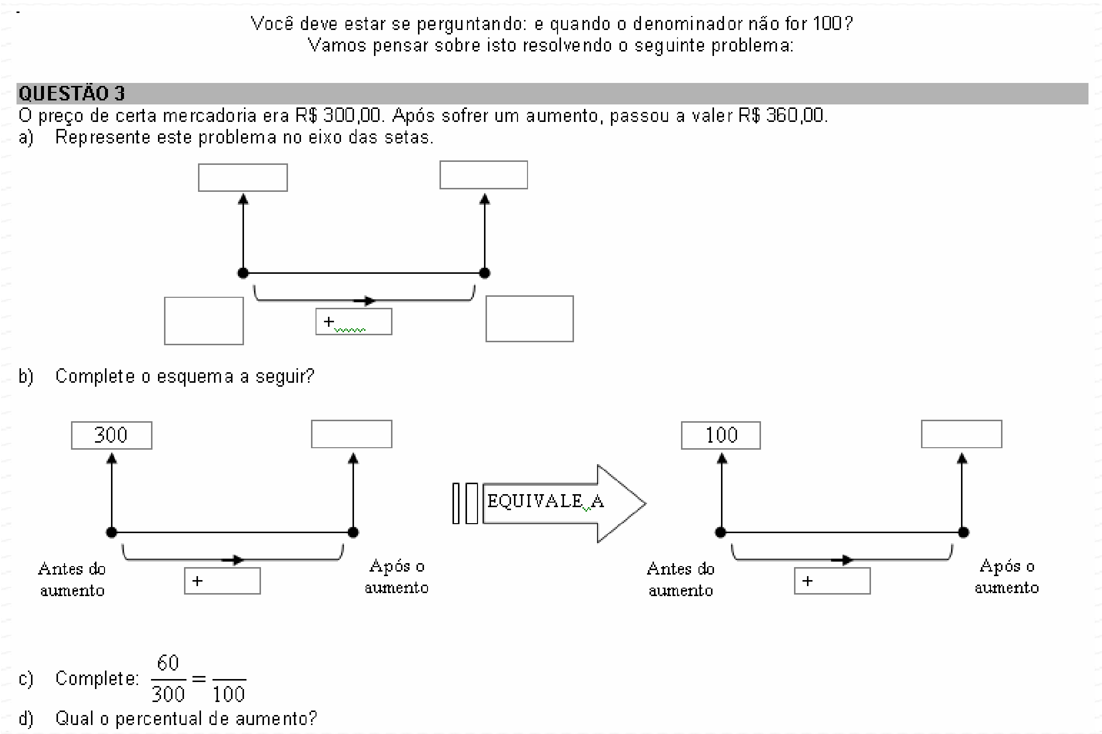


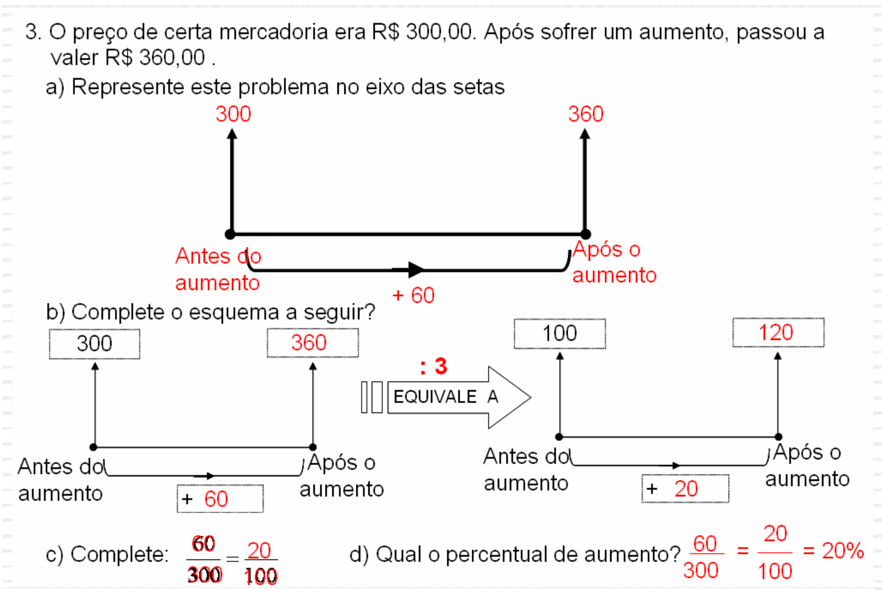
Figura 28 – Resolução incorreta da dupla L

QUESTÃO 3

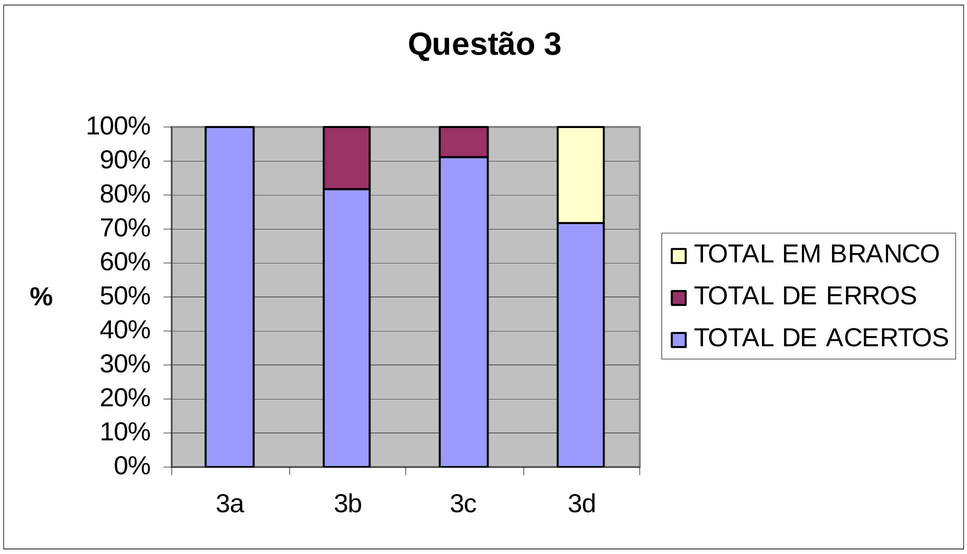


Concepção e análise *a priori* da questão 3

Nosso objetivo nesta questão era trabalhar um problema de porcentagem onde o valor inicial não era 100. Procuramos fazer a transição para este tipo de problema de forma gradual, utilizando o eixo das setas como ferramenta visual. Esperávamos que desta forma chegassem às conclusões desejadas, com as seguintes respostas:

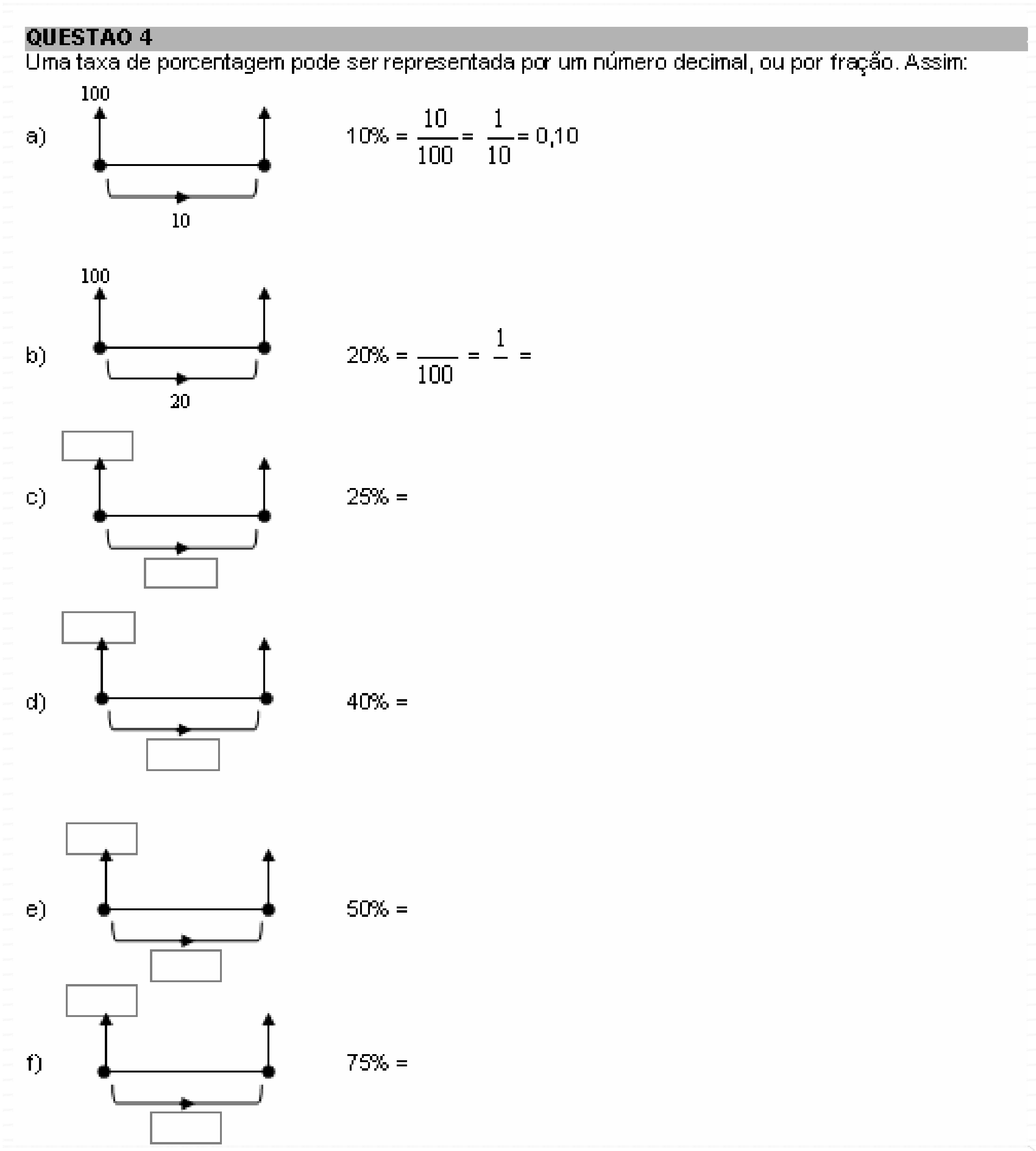


Análise *a posteriori* e validação da questão 3



No item 3a todas as duplas acertaram, demonstrando que compreenderam como se faz a transposição de valores para o eixo das setas. No item 3b, 9 duplas acertaram e 2 duplas erraram: a dupla C por não compreender que se tratava de um problema de equivalência ou por não ter bem formado o conceito de equivalência, sendo também a única dupla a errar o item 3c e a dupla G por falta de atenção, já que acertou o item 3c. No item 3d, 8 duplas acertaram e 3 deixaram em branco.

QUESTÃO 4



QUESTAO 4

Uma taxa de porcentagem pode ser representada por um número decimal, ou por fração. Assim:

a) 100, 10 — $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}10$

b) 100, 20 — $20\% = \frac{\quad}{100} = \frac{1}{\quad} =$

c) $25\% =$

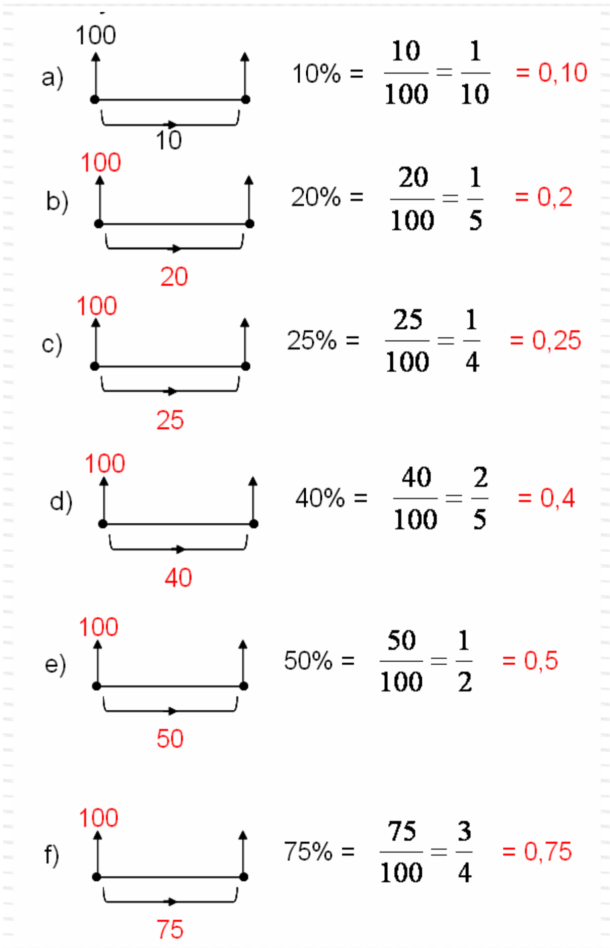
d) $40\% =$

e) $50\% =$

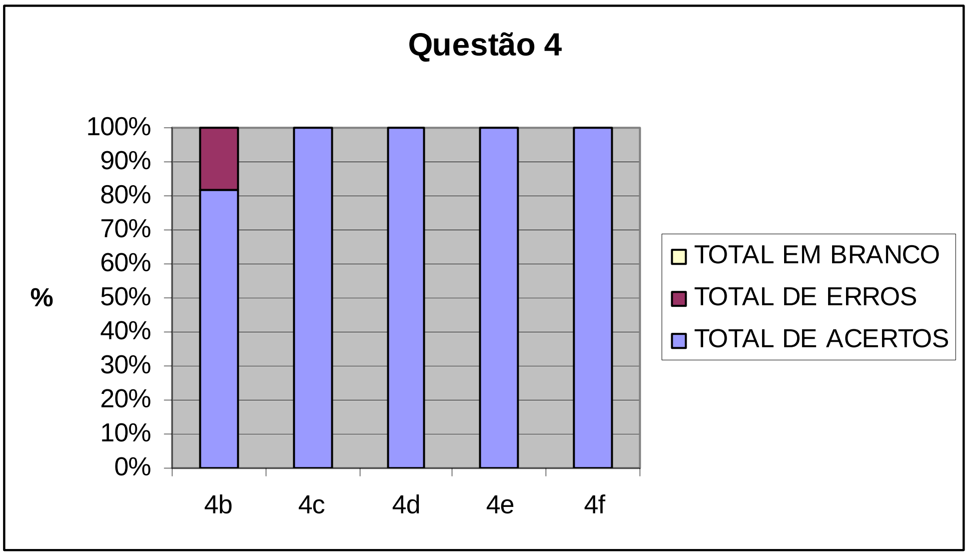
f) $75\% =$

Concepção e análise *a priori* da questão 4

Nosso objetivo nesta questão era trabalhar as diferentes formas de representação de porcentagem, inclusive a representação visual. Esperávamos as seguintes respostas:



Análise *a posteriori* e validação da questão 4



Apenas 2 duplas erraram o primeiro item (4b), nos itens restantes houve 100% de acerto. O erro de ambas as duplas foi em equivalência de frações.

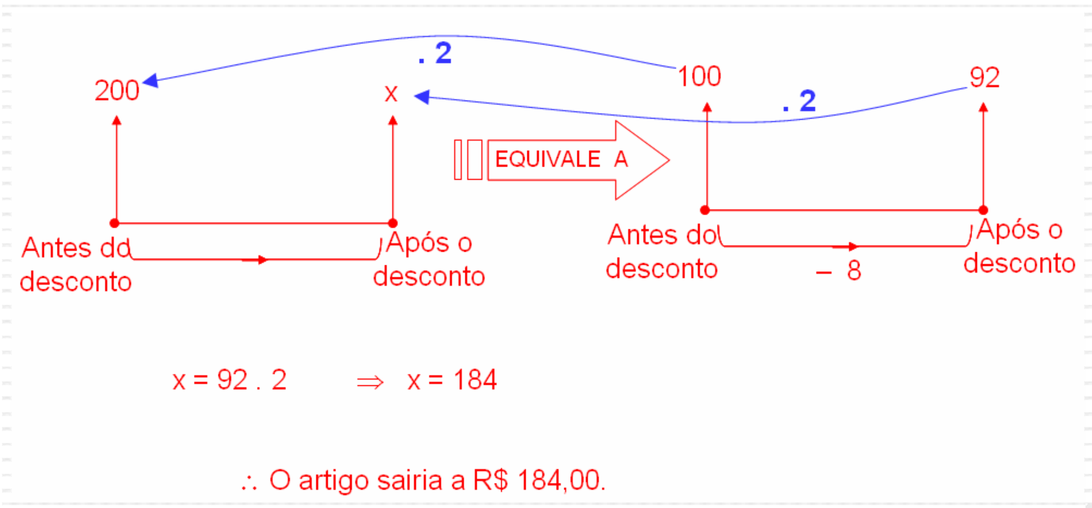
QUESTÃO 5

QUESTÃO 5

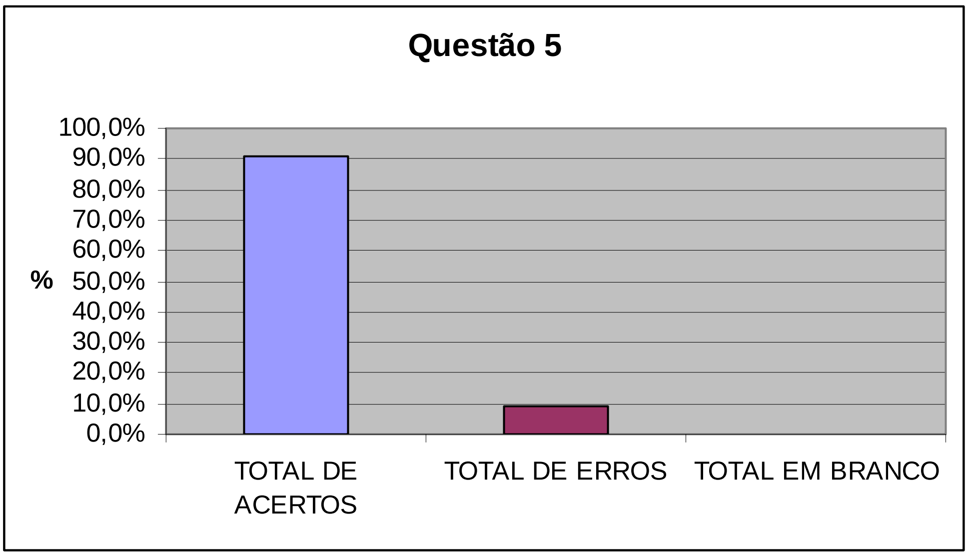
Oferecendo um desconto de 8% para pagamento à vista, a quanto sairia um artigo cujo preço é R$ 200,00?

Concepção e análise *a priori* da questão 5

Esperávamos nesta questão, onde a incógnita é o valor final, que os alunos fizessem a transcrição das variáveis do problema para o eixo das setas e que partindo de sua visualização criassem uma estratégia para resolver o problema. Esperávamos o seguinte resultado:



Análise *a posteriori* e validação da questão 5



Na questão 5 todos utilizaram o eixo das setas para resolver o problema. Alguns utilizaram dois eixos, enquanto outros utilizaram apenas um, como ilustram as figuras a seguir:

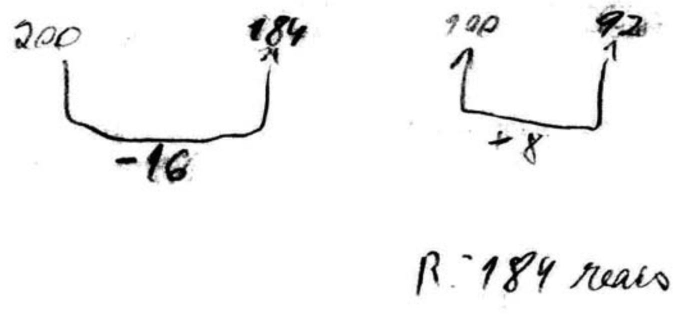


Figura 29 – Resolução da dupla B

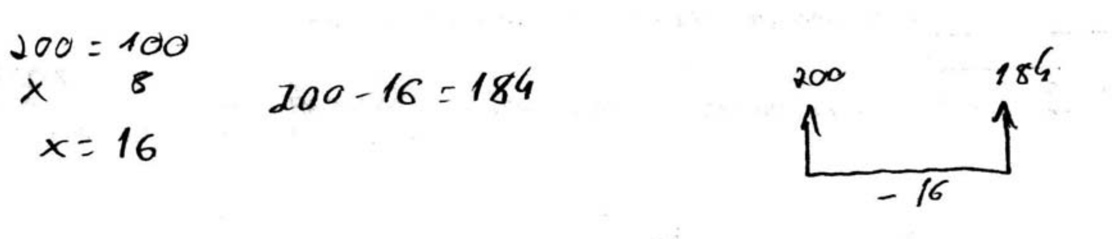


Figura 30 – Resolução da dupla D

Por interpretar que era um problema de acréscimo, a dupla E errou a questão. Mas a sua resolução demonstra que os alunos apreenderam o conceito, como comprova a figura abaixo:

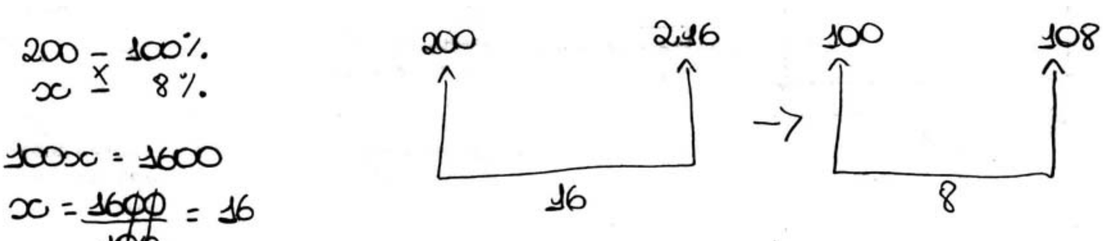
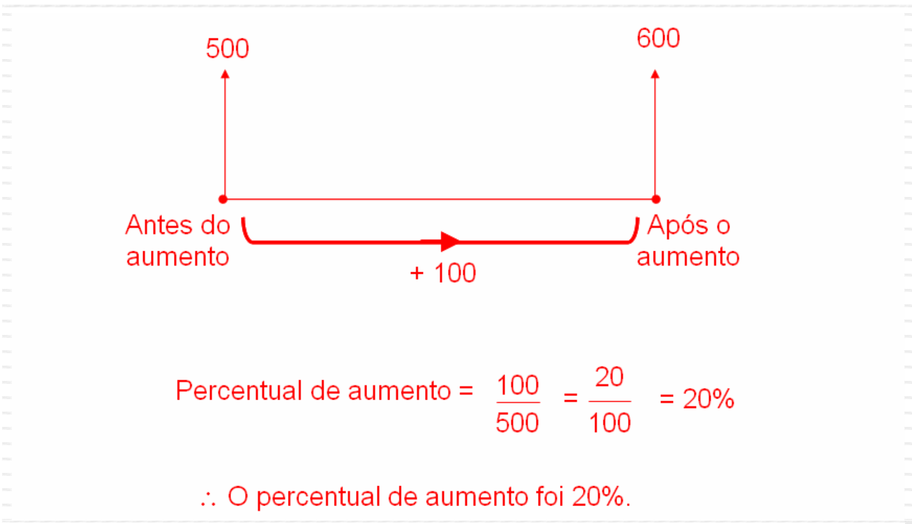


Figura 31 – Resolução incorreta da dupla E

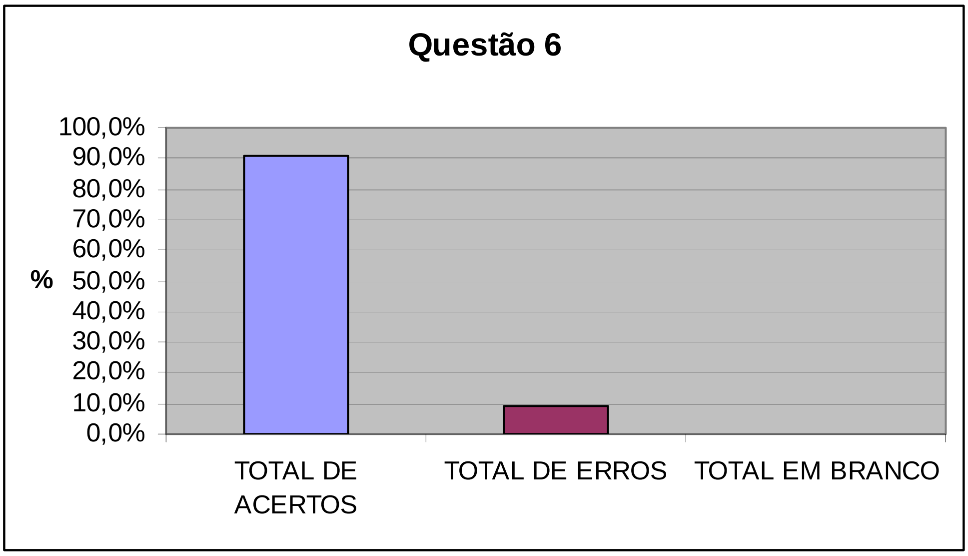
QUESTÃO 6

QUESTAO 6
O salário de uma pessoa passou de R$ 500,00 para R$ 600,00. Qual o foi o percentual do aumento?

Nesta questão, onde a incógnita é a taxa de juros, esperávamos o seguinte resultado:



Análise *a posteriori* e validação da questão 6



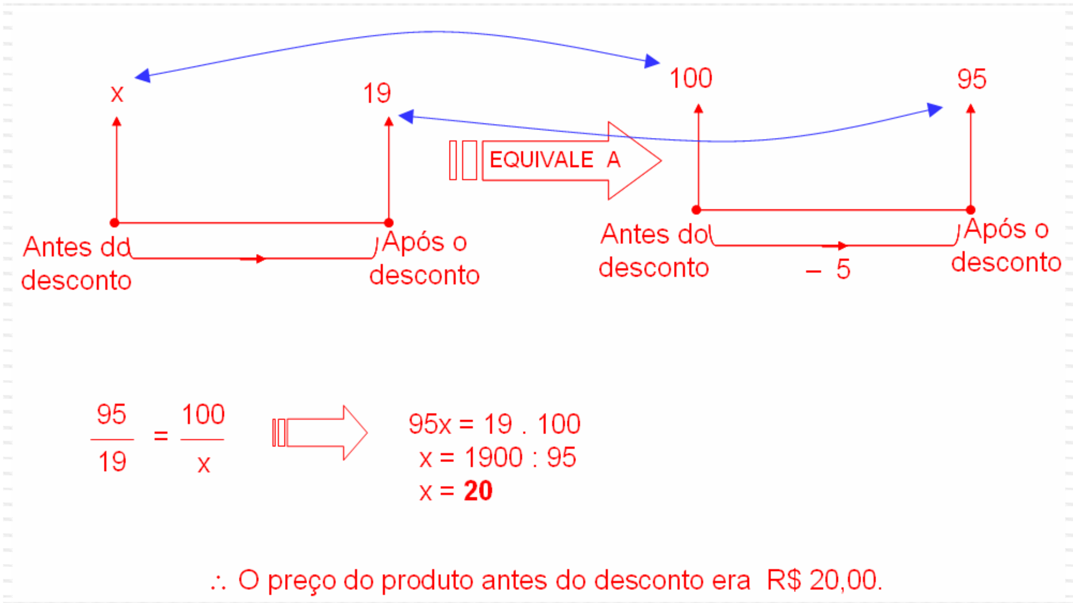
Apenas a dupla H errou esta questão, sendo também a única dupla que não fez o eixo das setas para auxiliar, tentando resolver o problema por regra de três.

QUESTÃO 7

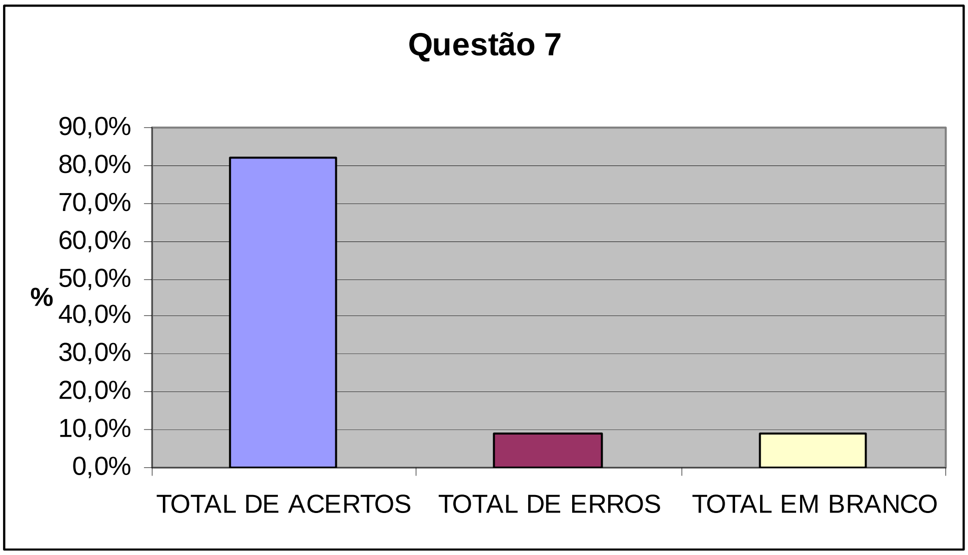
QUESTÃO 7

Após um desconto de 5% um produto passou a custar R$ 19,00. Qual o preço do produto antes do desconto?

Aqui a incógnita era o valor inicial. Esperávamos o seguinte resultado:



Análise *a posteriori* e validação da questão 7



Nesta questão houve 9 acertos, 1 erro e uma dupla (a mesma que errou a questão anterior) deixou em branco. A dupla que errou a questão montou corretamente o eixo das setas, mas não concluiu. Todas as duplas que acertaram construíram o eixo das setas para auxiliar. A figura abaixo mostra a resolução correta da dupla I.

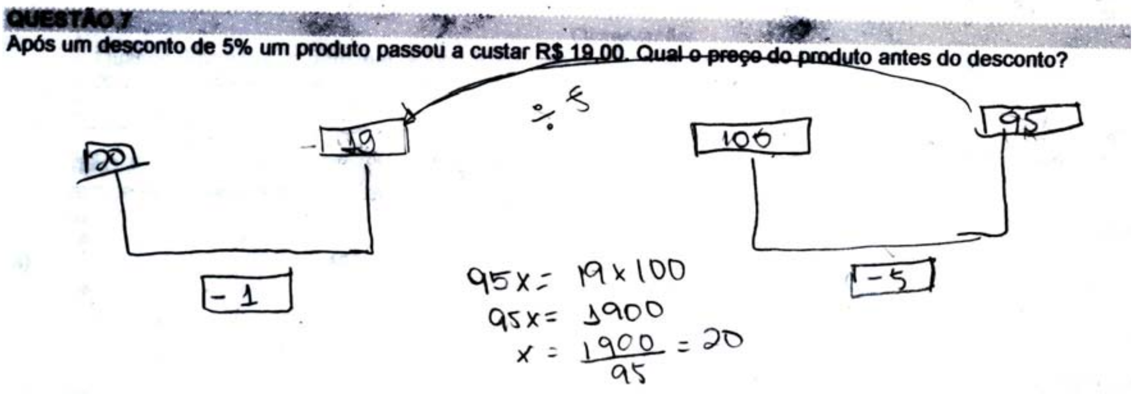
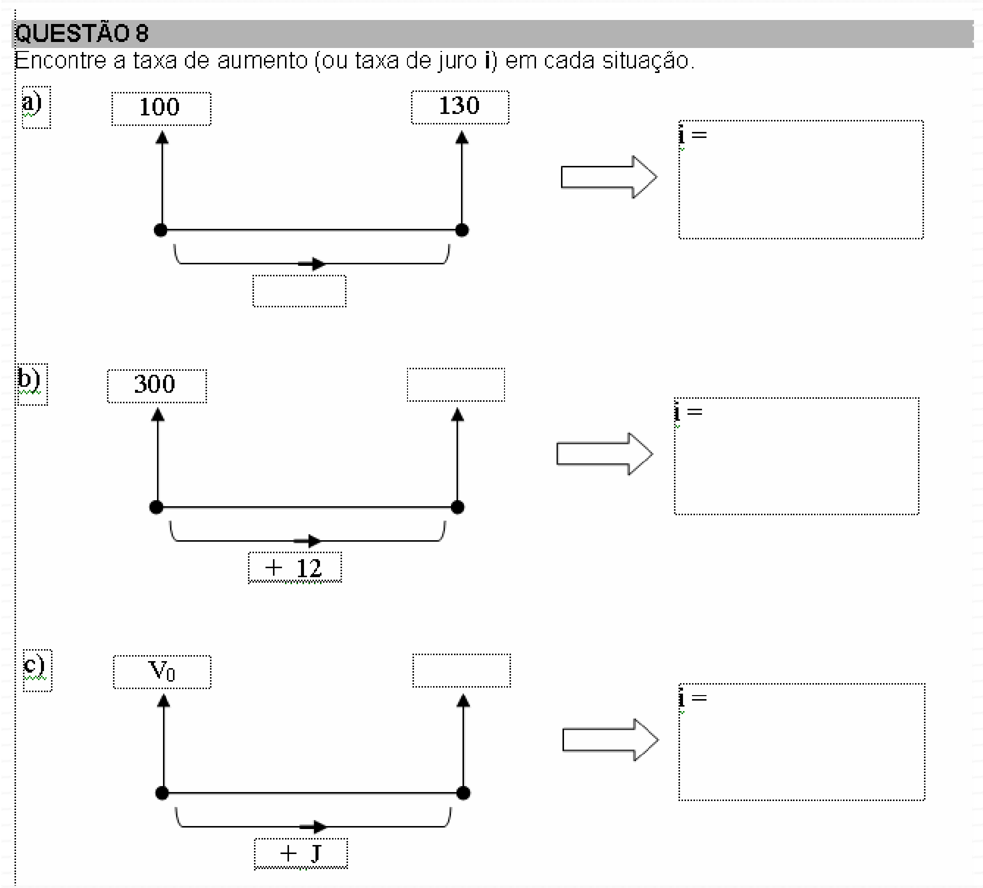


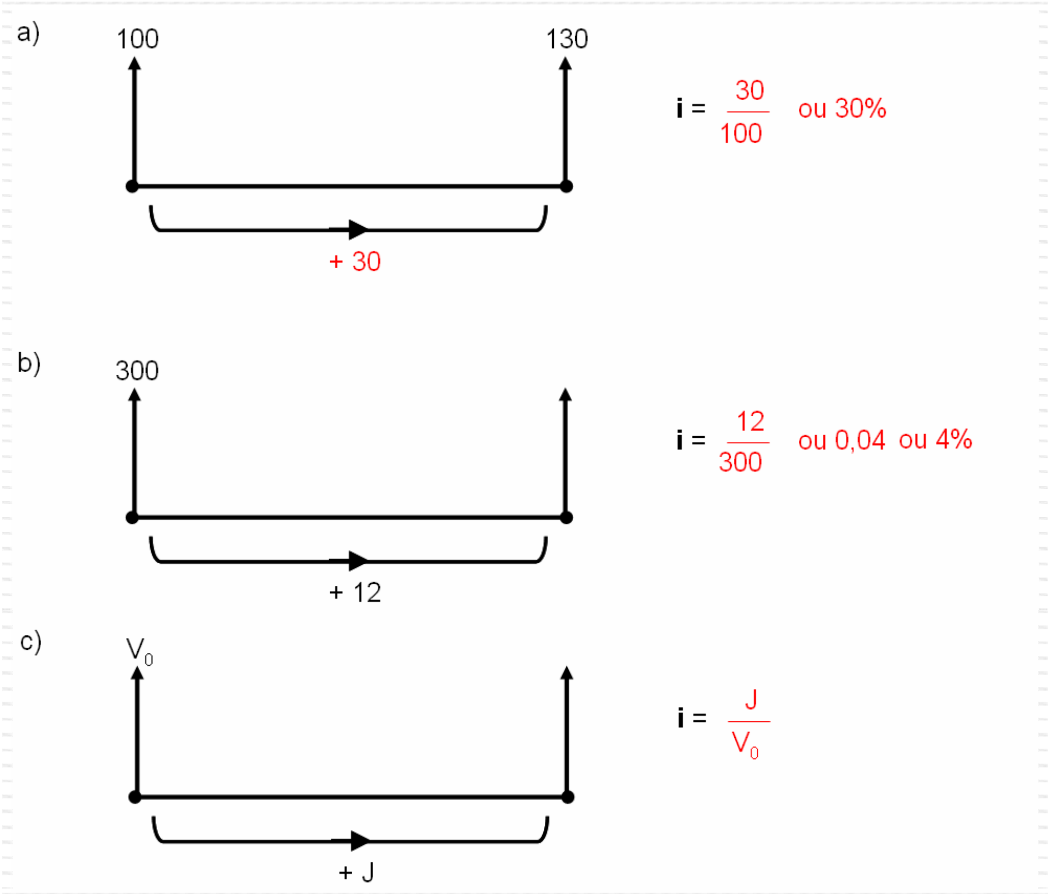
Figura 32 – Resolução da dupla I

QUESTÃO 8

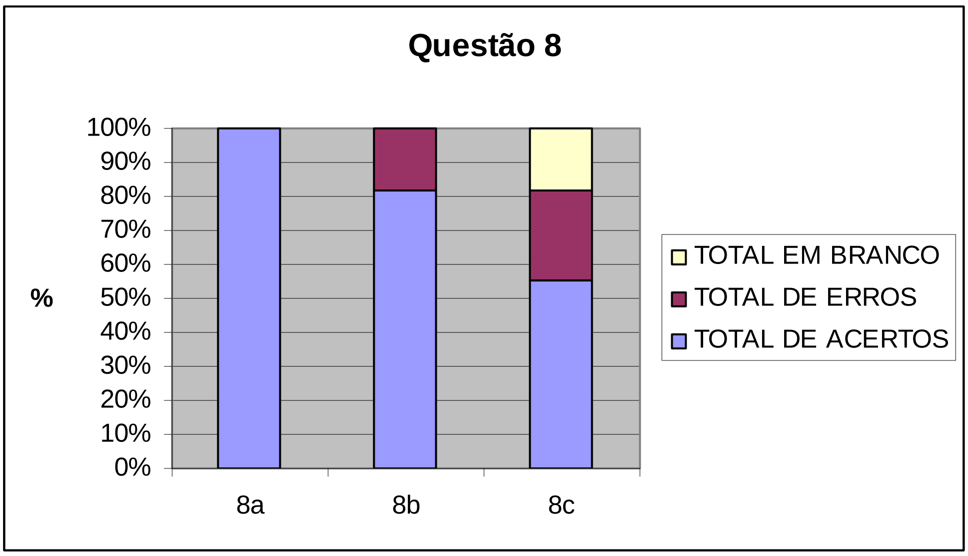


Concepção e análise *a priori* da questão 8

Nosso objetivo nesta questão era que o aluno descobrisse uma relação fundamental da matemática financeira: $i = \dfrac{J}{V_0}$. Esta relação seria explicada na próxima sessão, e gostaríamos que, antes, os alunos a encontrassem por si mesmos. Acreditávamos que os alunos teriam um pouco mais de dificuldade para resolver o item 8c, por não haver número, apenas letras. Apresentamos a seguir um modelo esperado das respostas:



Análise *a posteriori* e validação da questão 8



Todas as duplas acertaram o item 8a. No item 8b, 9 duplas acertaram e 2 duplas erraram. O erro da dupla H foi considerar que o valor inicial era 100, encontrando 12% como resposta. Já o erro da dupla L, ao resolver o item por regra de três, foi considerar que o valor 12 incidia sobre 100 e não sobre 300. No item 8c, 6 duplas acertaram, 3 erraram e 2 deixaram em branco.

Conclusão dessa sessão:

Uma vez concluída a sessão, parece-nos relevante mencionar que percebemos que algumas dificuldades foram geradas pela formulação do problema:

- A questão 1b foi mal redigida. Sugerimos sua alteração como mostra a figura a seguir:

b) Dizemos que foi dado um desconto de R$ 5,00 **sobre** o valor de R$ 100,00. Reescreva esta frase com símbolos usados na matemática.

Podemos dizer que o desconto é de R$ 5,00 sobre R$ 100,00 ou ainda: o desconto é de 5 por cento. Escrevemos assim: o desconto é de 5%.

- A questão 1d foi mal elaborada. Sugerimos a seguinte alteração:

d) O valor inicial da mercadoria corresponde à fração: $\underbrace{\frac{5}{100}}_{\text{desconto}}$ + $\underbrace{\_\_\_\_\_\_}_{\text{valor da venda}}$ ou a 5 % + ______% = ______%

- O defeito desta questão é que não faz sentido representar seus dados no eixo das setas, pois a comissão não vai ser somada nem diminuída do preço do produto. Sugerimos que não se use o eixo das setas, excluindo o item (a) e que se faça a seguinte alteração no enunciado:

QUESTÃO 2

Na venda de um produto de R$ 100,00, Ana recebeu uma comissão de R$ 12,00 sobre o valor de venda. Qual o foi o percentual da comissão?

Pelos resultados observados na aplicação das atividades desta sessão, julgamos que os estudantes, de uma forma geral, compreenderam como se faz a transcrição das variáveis de um problema para o eixo das setas e conseguiram entender o que era pedido na atividade, demonstrando autonomia na resolução dos problemas propostos.

A maior dificuldade observada foi a de operação com frações equivalentes, fator que pode ter contribuído para alguma das dificuldades dos alunos nesta matéria.

4.7 Segunda sessão: juros simples

Esta sessão pretende introduzir alguns conceitos básicos da matemática financeira e explicar o significado de juros simples. Quanto aos aspectos do ensino-aprendizagem, temos por meta verificar se o aluno consegue identificar e representar as variáveis de um problema no eixo das setas e através da visualização, criar uma forma de resolver este problema. Para alcançarmos uma maior observação dos alunos, solicitamos que eles reproduzissem tanto o desenho quanto os cálculos no papel.

4.7.1 Concepção e análise *a priori* da sessão 2

Os alunos receberam um bloco de atividades contendo explicações e definições sobre os conceitos básicos e juros simples, além de 5 questões para serem resolvidas em sala de aula, onde buscamos distribuir as possíveis incógnitas de um problema de juro simples (V_0, V_n, J, i e I).

Variáveis micro-didáticas:

- Cálculo de juros simples pelo eixo das setas, sem o apoio de fórmulas;
- Integração de juro simples com progressão aritmética;
- integração de juro simples com função afim;
- integração de taxa de juro com razão e proporção;

As resolver as questões propostas nesta sessão é possível que surjam as seguintes situações:

- o aluno não consiga entender o que se pede na atividade por questões de interpretação de texto;
- o aluno não consiga fazer a transcrição das variáveis do problema para o eixo das setas;
- o aluno não consiga criar uma solução para o problema, mesmo tendo feito corretamente o eixo das setas;

- o aluno apresente dificuldades com a terminologia apresentada nesta sessão;

4.7.2 Experimentação da sessão 2

A aplicação da segunda sessão ocorreu no dia 29 de agosto de 2008 das 8h50 às 10h50 com 20 minutos de intervalo para o recreio.

Durante a aplicação das atividades não houve interferência na resolução dos alunos, a única instrução dada foi que buscassem um caminho para resolver as questões evitando deixá-las em branco.

Neste dia nenhum aluno faltou.

4.7.3 Análise *a posteriori* e validação da sessão 2

A análise *a posteriori* desta sessão assentou-se sobre:

- as respostas dadas pelos alunos às questões propostas na atividade;
- os relatórios preenchidos pelos observadores, auxiliados por gravação em áudio;

Inicialmente, para proporcionar uma visão geral, apresentamos um gráfico relacionando cada questão com sua porcentagem de acertos (universo de 11 duplas). Em seguida, apresentamos um gráfico relacionando cada dupla com sua porcentagem de acertos em todas as questões da 2ª sessão.

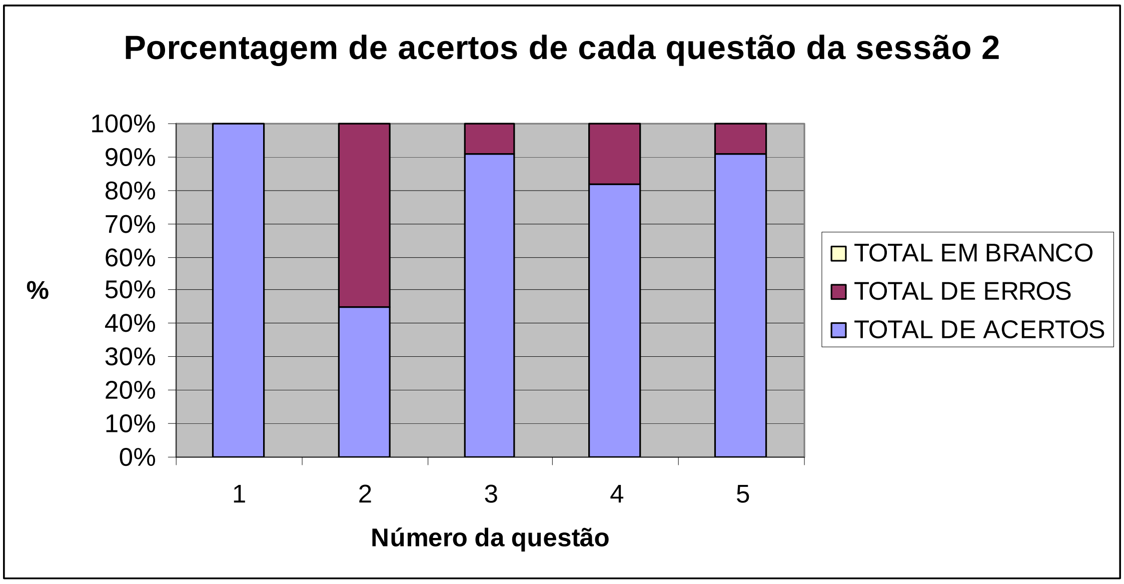


Figura 33 – Porcentagem de acertos de cada questão da sessão 2

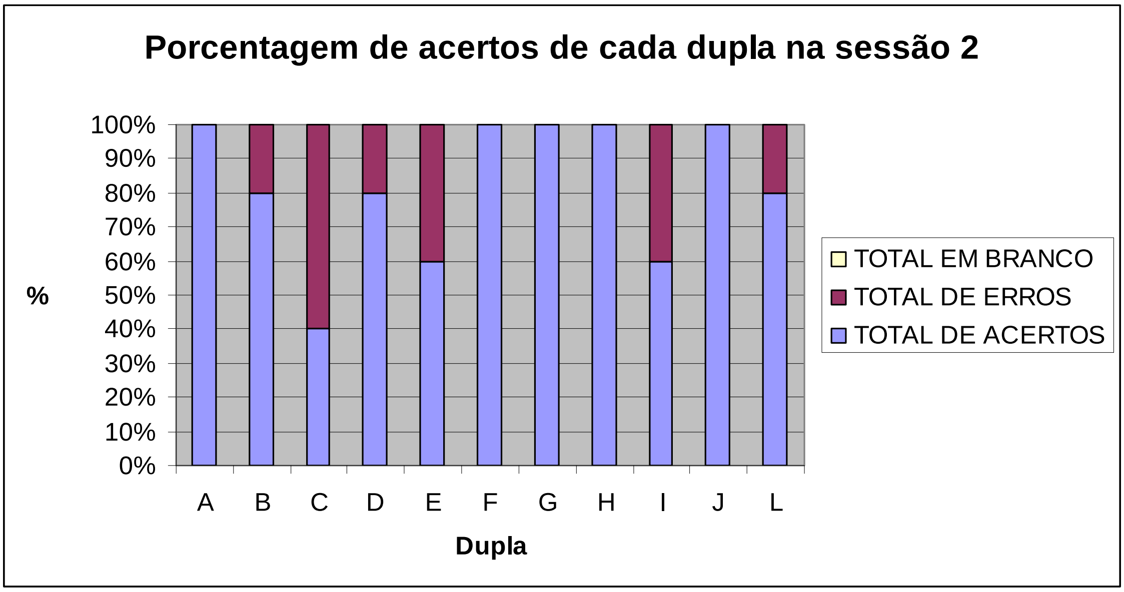


Figura 34 – Porcentagem de acertos de cada dupla na sessão 2

Para facilitar a leitura e evitar o acesso constante aos anexos deste trabalho, apresentaremos um recorte de cada questão seguida por sua discussão.

QUESTÃO 1

QUESTÃO 1
Fernanda investiu R$ 3.500,00 em um fundo de investimento durante dois anos à taxa de juros simples de 2% ao mês. Qual o valor final da aplicação?

Concepção e análise *a priori* da questão 1

Nesta questão, onde a incógnita é o montante (V_n), pretendíamos verificar se os alunos conseguiam fazer a transcrição das variáveis do problema para o eixo das setas e a partir daí chegar às conclusões desejadas, com a seguinte resposta:

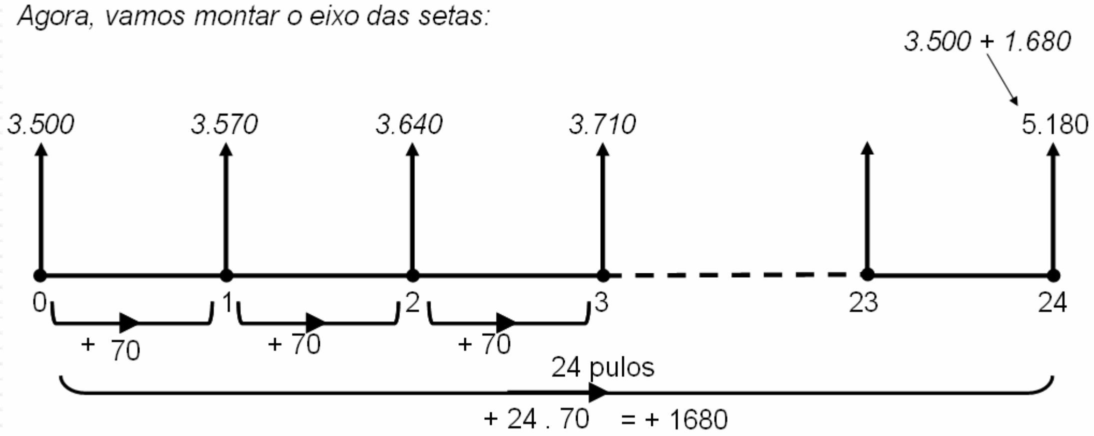
1. Fernanda investiu R$ 3.500,00 em um fundo de investimento durante dois anos à taxa de juros simples de 2% ao mês. Qual o valor final da aplicação?

Resolução:

Primeiro vamos encontrar o valor do juro mensal :

J = 2% de R$ 3500,00 = 0,02 . 3500 = 70 ⇨ J = *R$ 70,00*

Agora, vamos montar o eixo das setas:



Resposta: O valor final da aplicação será de R$ 5180,00.

Análise *a posteriori* e validação da questão 1

Todas as duplas acertaram a 1ª questão, demonstrando que compreenderam como se faz a transposição de valores para o eixo das setas e que sabem resolver um problema de juro simples quando a incógnita é o montante (V_n)

QUESTÃO 2

QUESTÃO 2

Qual o valor do capital aplicado pelo prazo de oito meses e taxa de juro simples de 1,5% a.m. cujo valor final atingiu R$ 3.800,00?

Concepção e análise *a priori* da questão 2

Nesta questão, onde a incógnita é o principal (V_0), esperávamos o seguinte resultado:

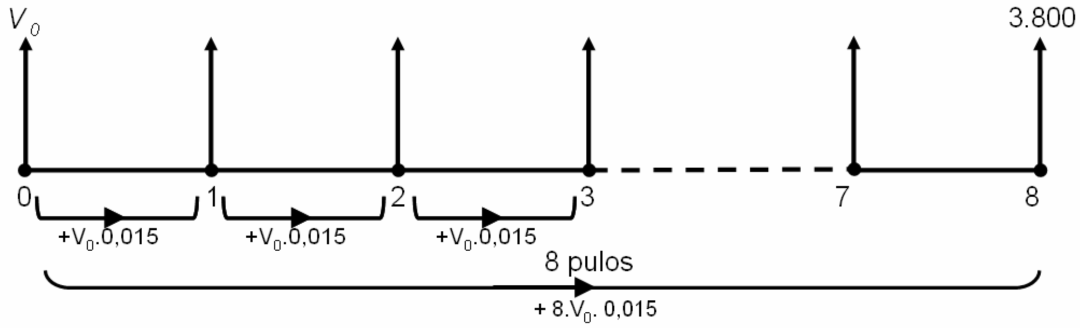
2. Qual o valor do capital aplicado pelo prazo de oito meses e taxa de juro simples de 1,5% a.m. cujo valor final atingiu R$ 3.800,00?

Resolução:

Primeiro vamos encontrar o valor do *<u>juro</u>* *mensal :*

$J = 1{,}5\%$ de $V_0 = 0{,}015 \,.\, V_0 \Rightarrow J = 0{,}015 \,.\, V_0$

Agora, vamos montar o eixo das setas:



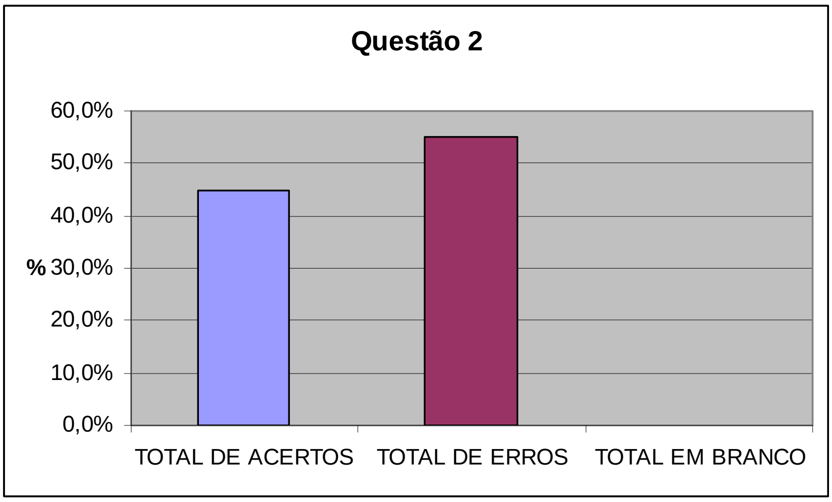
Observando o eixo das setas, temos:

$V_0 + 8.V_0.\ 0{,}015 = 3.800 \Rightarrow V_0 + 0{,}12.V_0 = 3800 \Rightarrow 1{,}12.V_0 = 3800$

$\Rightarrow V_0 = 3800 : 1{,}12 \Rightarrow V_0 = 3.392{,}86$

Resposta: O valor do capital aplicado foi R$ 3392,86.

Análise *a posteriori* e validação da questão 2



Seis duplas erraram esta questão. A dupla B fez corretamente a transição dos dados do problema para o eixo das setas, mas errou ao montar a regra de três, como mostra a figura a seguir.

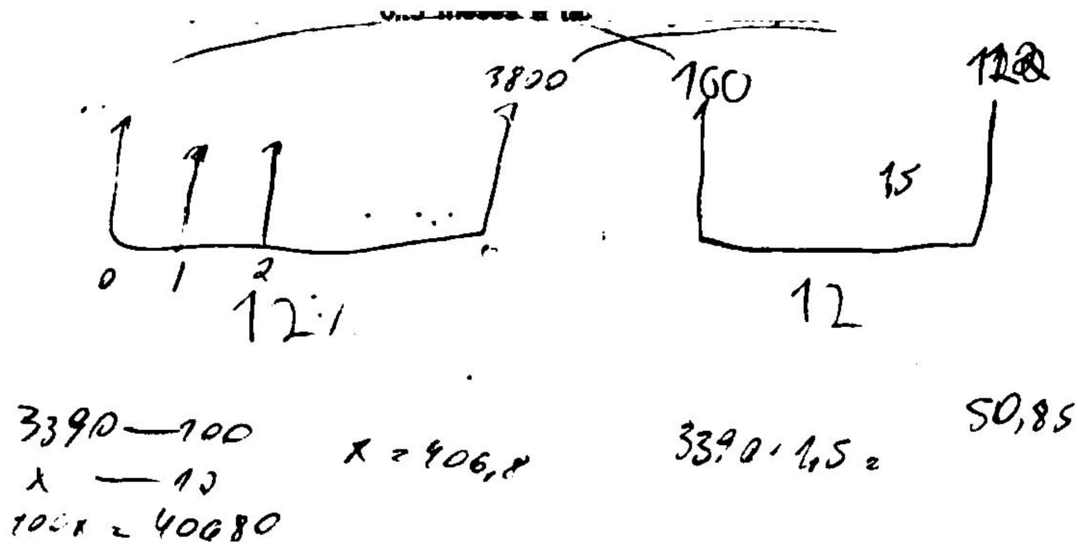


Figura 35 – Resolução incorreta da dupla B

As duplas C, D, E, I e L souberam fazer a transcrição para o eixo das setas, porém não conseguiram criar uma solução correta para o problema.

QUESTÃO 3

QUESTÃO 3

Pedro investiu R$ 800,00 em uma aplicação cuja taxa de juro simples mensal é de 1,7%. Qual será o valor do juro ao fim de 24 meses?

Concepção e análise *a priori* da questão 3

Nesta questão, onde a incógnita é o juro (J), esperávamos o seguinte resultado:

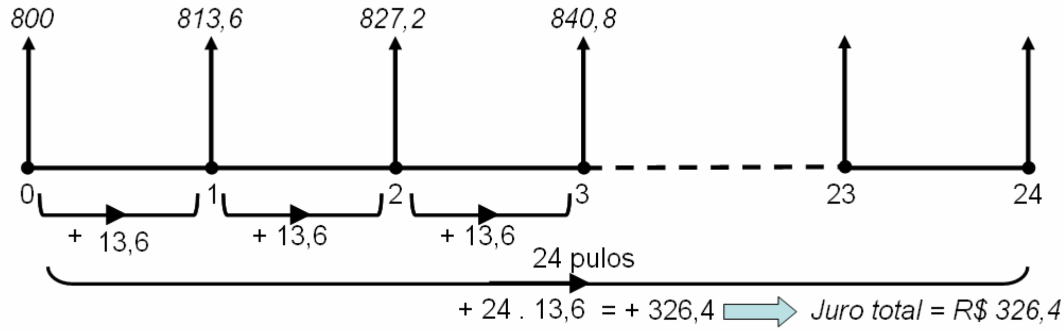
3. Pedro investiu R$ 800,00 em uma aplicação cuja taxa de juro simples mensal é de 1,7%. Qual será o valor do juro ao fim de 24 meses?

Resolução:

Primeiro vamos encontrar o valor do juro mensal :

J = 1,7% de R$ 800,00 = 0,017 . 800 = 13,6 ⇒ J = *R$ 13,60*

Agora, vamos montar o eixo das setas:



Resposta: O valor do juro ao fim de 24 meses será de R$ 326,40.

Análise *a posteriori* e validação da questão 3

Todas as duplas acertaram a 3ª questão, demonstrando que compreenderam como se faz a transposição de valores para o eixo das setas e que sabem resolver um problema de juro simples quando a incógnita é o juro (J)

QUESTÃO 4

QUESTÃO 4

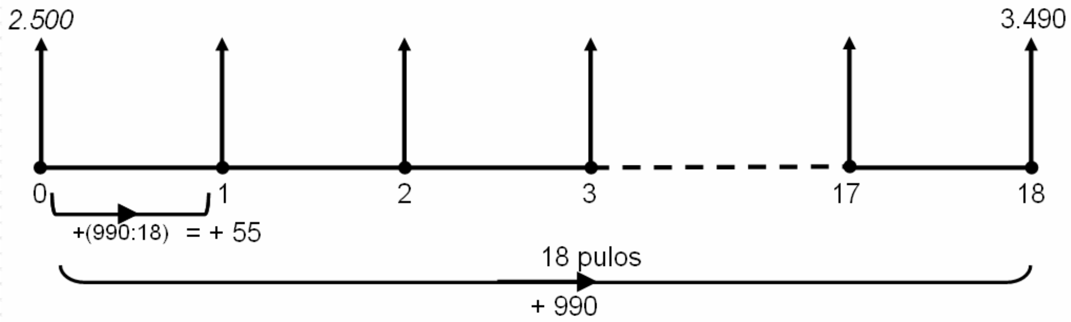
Qual a taxa de juro simples mensal de um investimento de R$ 2.500,00 pelo prazo de 18 meses cujo montante atingiu o valor de R$ 3.490,00?

Concepção e análise *a priori* da questão 4

Nesta questão, onde a incógnita é a taxa de juro (i), esperávamos o seguinte resultado:

4. Qual a taxa de juro simples mensal de um investimento de R$ 2.500,00 pelo prazo de 18 meses cujo montante atingiu o valor de R$ 3.490,00?

Resolução:

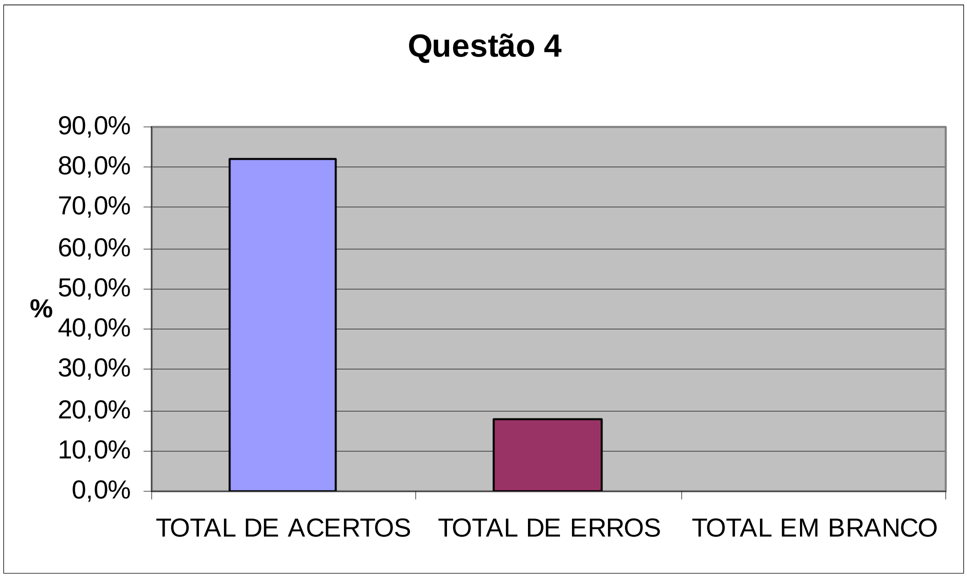


Observando o eixo das setas, temos:

$$i = \frac{55}{2.500} = 0{,}022 = 2{,}2\%$$

Resposta: A taxa de juro mensal é 2,2%.

Análise *a posteriori* e validação da questão 4



Apenas 2 duplas erraram a questão. Ambas erraram apenas na utilização da definição de taxa de juro, pois dividiram o juro mensal (55) por 100, no lugar de 2500, como está ilustrado a seguir.

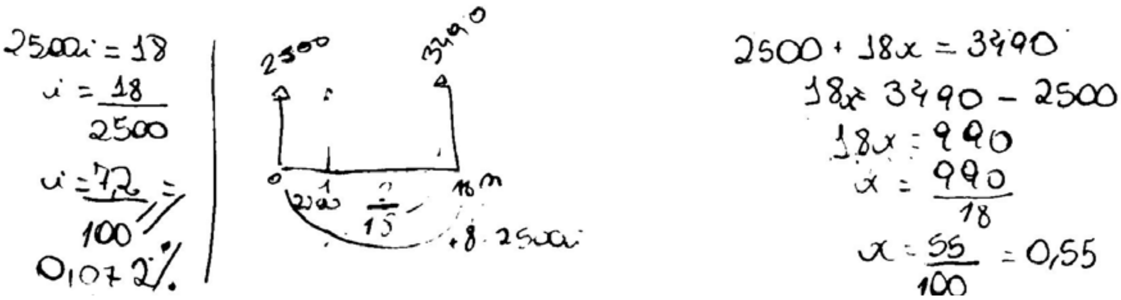


Figura 36 – Resolução incorreta da dupla C

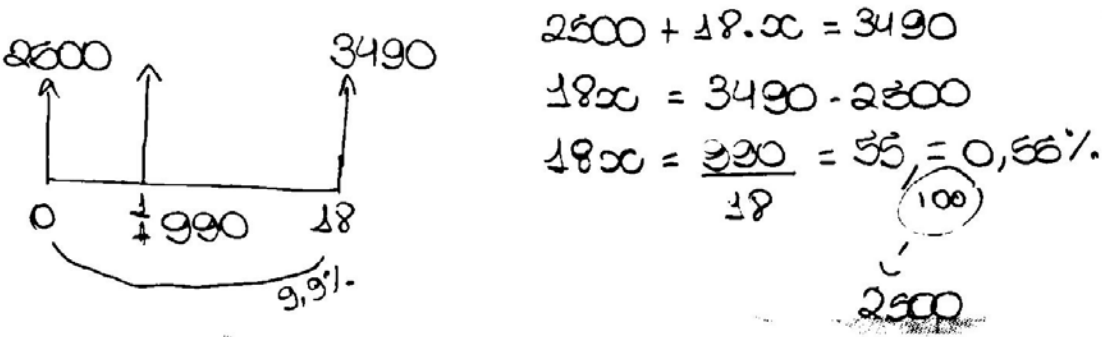


Figura 37 – Resolução incorreta da dupla E

QUESTÃO 5

QUESTÃO 5

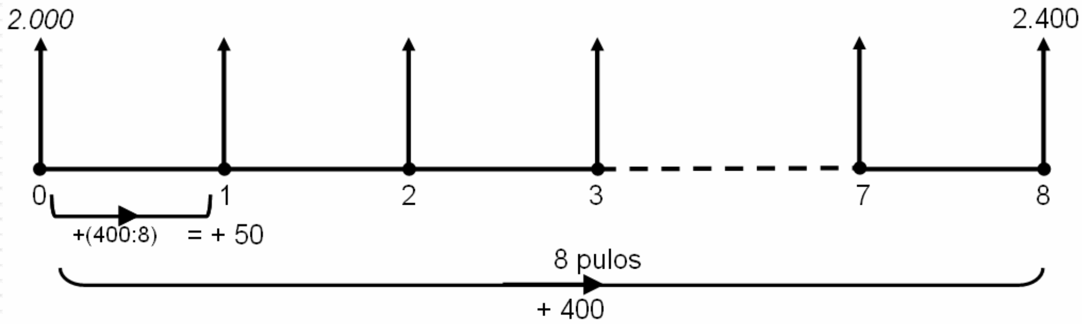
Qual a taxa mensal de juros simples de um investimento de R$ 2000,00 pelo prazo de 8 meses cujo montante atingiu R$ 2400,00? E qual a taxa do período?

Concepção e análise *a priori* da questão 5

Nesta questão, onde as incógnitas são as taxas (i e I), esperávamos o seguinte resultado:

5. Qual a taxa mensal de juros simples de um investimento de R$ 2000,00 pelo prazo de 8 meses cujo montante atingiu R$ 2400,00? E qual a taxa do período?

Resolução:



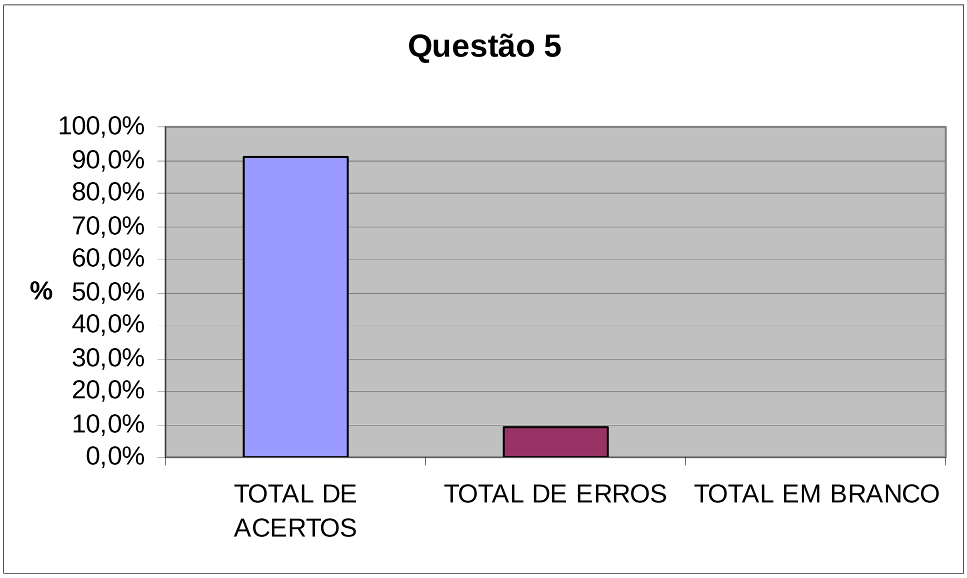
Observando o eixo das setas, temos:

$i = \dfrac{50}{2.000} = 0{,}025 = 2{,}5\%$ ⇒ *taxa do período = 2,5% . 8 = 20%*

Ou: *taxa do período =* $\dfrac{400}{2.000} = 0{,}2 = 20\%$

Resposta: A taxa de juro mensal é 2,5% e a taxa do período é 20%.

Análise *a posteriori* e validação da questão 5



A dupla C, utilizou de forma errada a definição de taxa de juro, pois dividiu o juro mensal (50) por 100, no lugar de 2000. Foi a única dupla que errou, as outras dez acertaram a questão. A figura abaixo mostra a resolução da dupla.

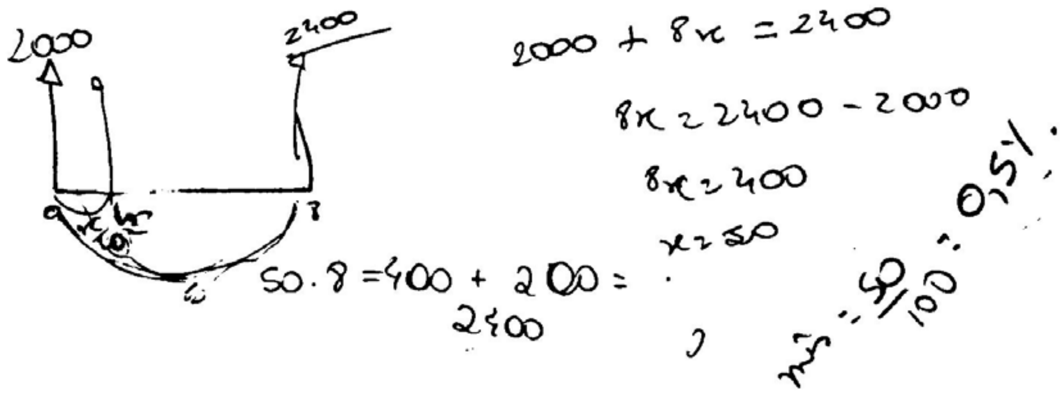


Figura 38 – Resolução incorreta da dupla C

Conclusão dessa sessão:

Pelos resultados observados na aplicação das atividades desta sessão, julgamos que os alunos, de uma forma geral, conseguiram identificar e representar as variáveis dos problemas propostos no eixo das setas e através da visualização, traçar uma estratégia para resolver os problemas, demonstrando inteligibilidade. Destacamos que os estudantes não apresentaram dificuldade com a terminologia apresentada na sessão.

A maior dificuldade observada foi a falta de noção de proporcionalidade, fator que pode ter contribuído para alguma das dificuldades dos alunos na matéria. Sugerimos que antes da aplicação das atividades desta sessão seja realizada uma revisão deste conteúdo.

A relação entre Juros Simples, PA e Função Afim foi explorada na questão 8 do dever de casa (Anexo 4).

4.8 Terceira sessão: fator de aumento e fator de desconto

Tínhamos por meta nesta sessão levar o aluno a deduzir que o fator de aumento (1 + i) é formado pela soma da taxa (i) com a porcentagem que representa o capital inicial (100% ou 1) e que o fator de desconto (1 – i) é formado pela diferença entre a porcentagem que representa o capital (1) e a taxa (i). Esperávamos que após esta descoberta o aluno criasse o hábito de utilizar o fator de aumento (ou de desconto), na notação decimal, sempre que necessário. Para alcançarmos uma maior observação dos alunos, solicitamos que eles reproduzissem tanto o desenho quanto os cálculos no papel.

4.8.1 Concepção e análise *a priori* da sessão 3

Os alunos receberam um bloco de atividades contendo 7 questões para serem resolvidas em sala de aula, além de explicações e definições sobre fator de aumento e de desconto, valor futuro e atual. As questões foram elaboradas buscando explorar problemas práticos, do dia-a-dia dos cidadãos.

Variáveis micro-didáticas:

- Utilização da junção da taxa com o capital como fator, de modo que, para encontrar um valor com acréscimo com uma taxa i de aumento, multiplica-se a quantia original por (1+i) e se for desconto de i, multiplica-se a quantia original por (1- i);
- incentivo à representação do fator de aumento e de desconto sob a forma de número decimal;
- utilização do fator de aumento na equivalência de capitais, isto é, para encontrar o valor futuro ou atual de um capital.

As resolver as questões propostas nesta sessão é possível que surjam as seguintes situações:

- o aluno não consiga entender o que se pede na atividade por questões de interpretação de texto;
- o aluno não consiga fazer a transcrição das variáveis do problema para o eixo das setas;

- o aluno não consiga criar uma solução para o problema, mesmo tendo feito corretamente o eixo das setas;
- o aluno apresente dificuldades com a terminologia apresentada nesta sessão;
- o aluno apresente dificuldade de resolver as questões por não ter bem formado o conceito de fração e/ou número decimal;
- o aluno apresente dificuldade de operar com porcentagens maiores que 100%.

4.8.2 Experimentação da sessão 3

A aplicação da terceira sessão ocorreu no dia 5 de setembro de 2008 das 8h50 às 10h50 com 20 minutos de intervalo para o recreio.

Durante a aplicação das atividades não houve interferência na resolução dos alunos, a única instrução dada foi que buscassem um caminho para resolver as questões evitando deixá-las em branco.

Neste dia houve uma falta, a do aluno F1.

4.8.3 Análise *a posteriori* e validação da sessão 3

A análise *a posteriori* desta sessão assentou-se sobre:

- as respostas dadas pelos alunos às questões propostas na atividade;
- os relatórios preenchidos pelos observadores, auxiliados por gravação em áudio;

Inicialmente, para proporcionar uma visão geral, apresentamos um gráfico relacionando cada questão com sua porcentagem de acertos (universo de 11 duplas). Em seguida, apresentamos um gráfico relacionando cada dupla com sua porcentagem de acertos em todas as questões da 3ª sessão.

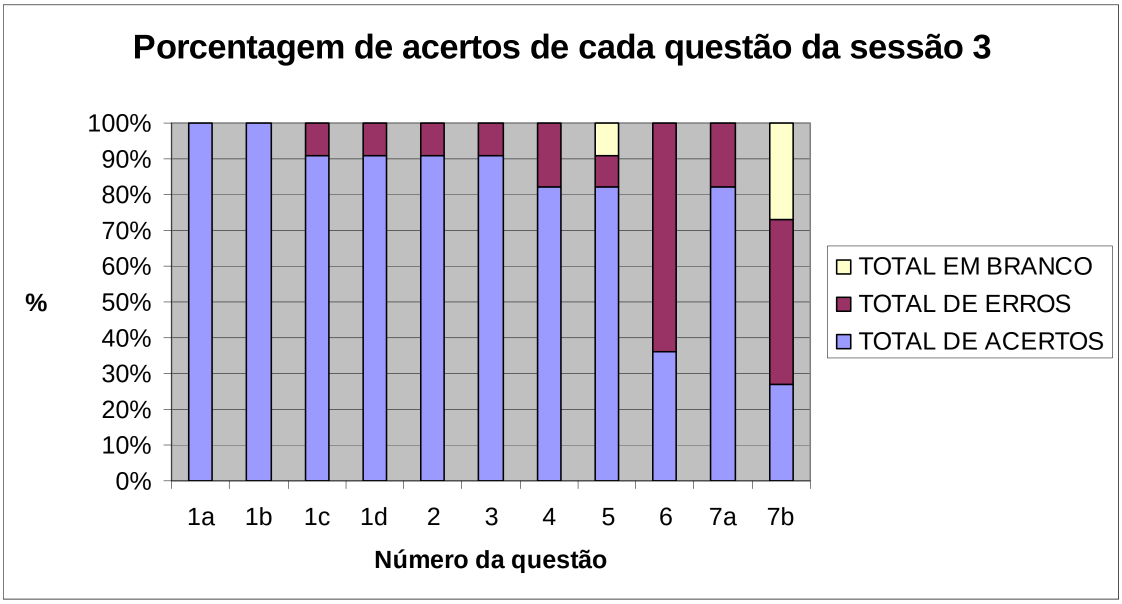


Figura 39 – Porcentagem de acertos de cada questão da sessão 3

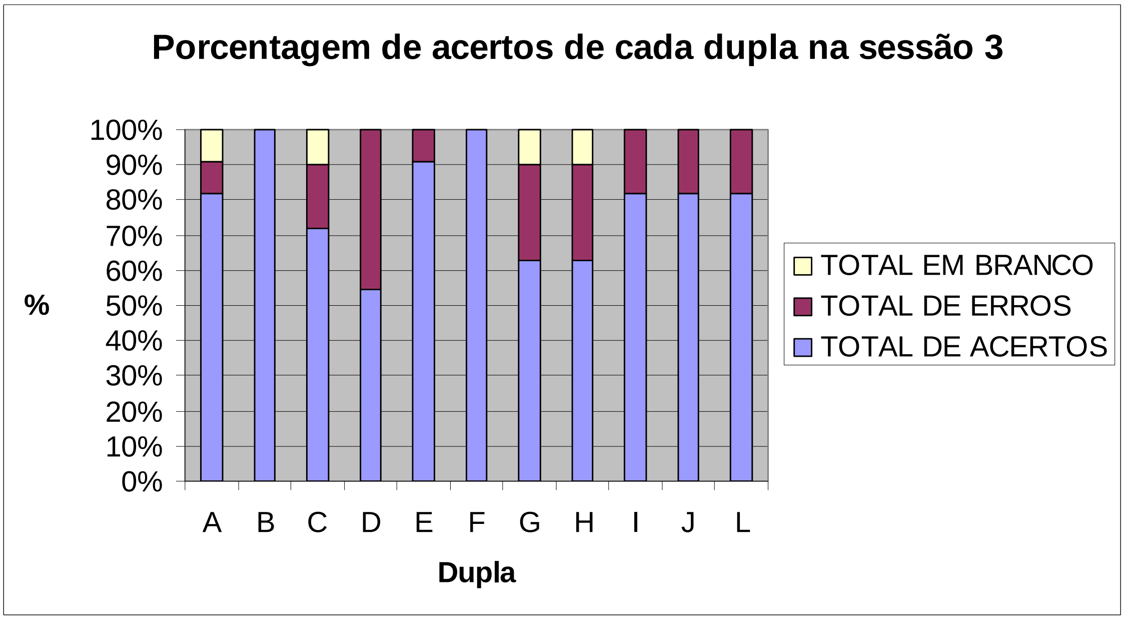


Figura 40 – Porcentagem de acertos de cada dupla na sessão 3

Para facilitar a leitura e evitar o acesso constante aos anexos deste trabalho, apresentaremos um recorte de cada questão seguida por sua discussão.

QUESTÃO 1

QUESTÃO 1

O preço P de uma roupa sofreu um aumento de 30%.

a) Qual a porcentagem que representa o preço da roupa antes do aumento?

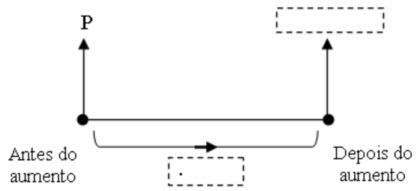
b) Qual a porcentagem que representa o preço da roupa após o aumento?

c) Para calcular o valor da roupa com aumento, um vendedor usa a sua máquina de calcular do seguinte modo:

preço total (P)	x	30	%	+

Um outro modo de calcular o valor da roupa com aumento seria multiplicar o preço (P) pelo número decimal _______.

d) Preencha o eixo das setas:



Concepção e análise *a priori* da questão 1

A maioria das pessoas calcula o valor de uma mercadoria após um aumento de x%, realizando dois cálculos: primeiro o cálculo do valor de x% depois a soma deste valor com o da mercadoria antes do aumento. Nesta atividade pretendíamos levar o aluno a descobrir que é possível obter esta resposta com apenas um cálculo, a multiplicação pelo fator de aumento, formado pela soma da taxa com o capital, na notação decimal. Esta idéia é fundamental para a próxima sessão, onde trabalhamos juros compostos. Esperávamos que o aluno chegasse ao seguinte resultado:

1. O preço P de uma roupa sofreu um aumento de 30%.

a) Qual a porcentagem que representa o preço da roupa antes do aumento? 100%

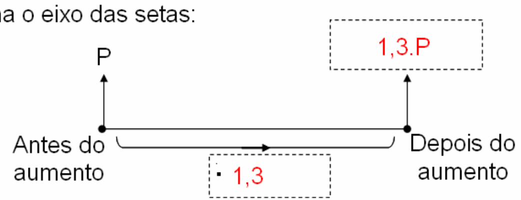
b) Qual a porcentagem que representa o preço da roupa após o aumento? 130%

c) Para calcular o valor da roupa com aumento, um vendedor usa a sua máquina de calcular do seguinte modo:

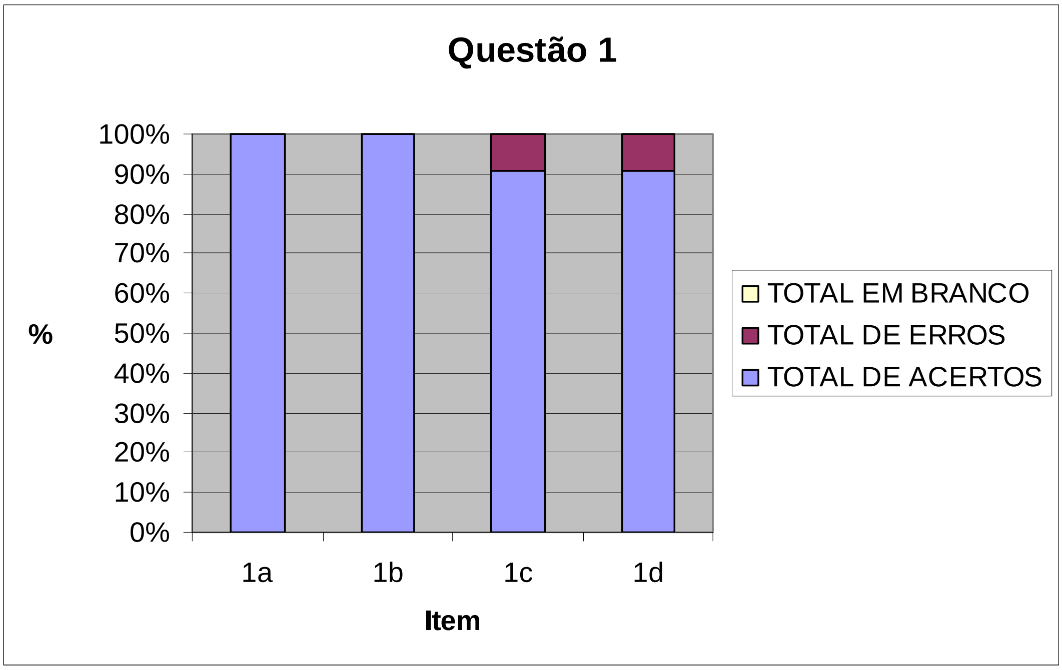
preço total (P)	x	30	%	+

Um outro modo de calcular o valor da roupa com aumento seria multiplicar o preço (P) pelo número decimal 1,3.

d) Preencha o eixo das setas:



Análise *a posteriori* e validação da questão 1



Todas as duplas acertaram os itens 1a e 1b. No item 1c, 10 duplas acertaram e uma dupla (a dupla E) errou, ao colocar como resposta 0,3. No item 1d, apenas a dupla D errou, pois respondeu que o valor depois do aumento seria P + 1,3, ao invés de P.1,3.

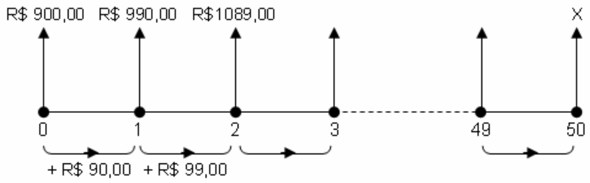
QUESTÃO 2

QUESTÃO 2

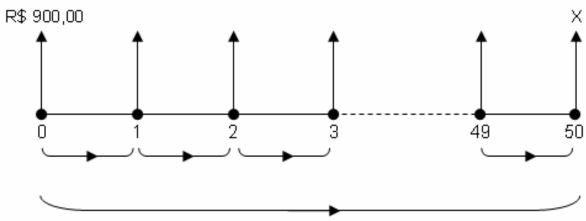
Augusto obteve um empréstimo bancário de R$ 900,00 para ser pago ao final de 50 meses com taxa mensal de 10%. Qual o valor a ser pago ao final do empréstimo, sabendo que os juros de cada período serão calculados sobre o saldo devedor?

Vamos pensar um pouco antes de resolver....

- Será que teremos que calcular os juros mês a mês (são 50 meses!!) ?
- A dificuldade aqui é que os juros não são constantes, como nos juros simples. Observe:



- Será que existe alguma forma de calcular, de tal modo que possamos cortar caminho e calcular direto o valor final?
- Tente encontrar uma idéia para resolver este desafio. Procure um valor constante nas pequenas etapas ("pulinhos"). Depois use este valor para calcular direto o valor a ser pago ao fim do empréstimo.



Concepção e análise *a priori* da questão 2

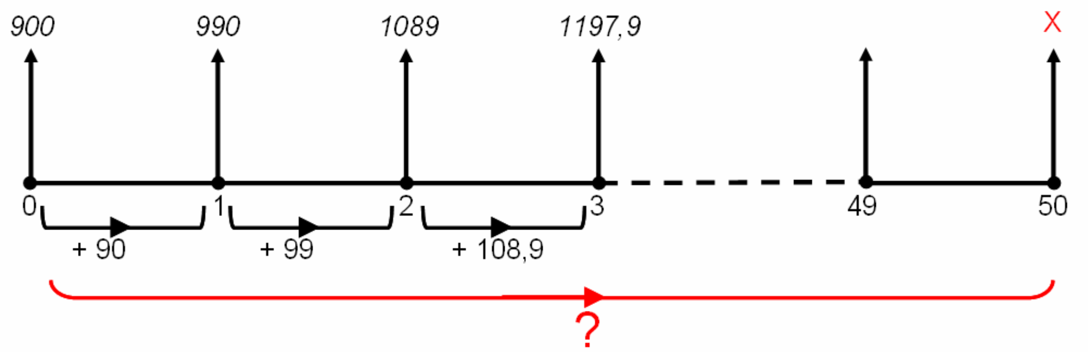
Esperávamos que os alunos, inspirados na questão anterior, deduzissem que o valor constante procurado é o fator de aumento 1,1 formado pela soma da taxa de aumento (10%) com a porcentagem que representa o capital inicial (100%). Apresentamos a seguir um modelo esperado da resposta:

2. Augusto obteve um empréstimo bancário de R$ 900,00 para ser pago ao final de 50 meses com taxa mensal de 10%. Qual o valor a ser pago ao final do empréstimo, sabendo que os juros de cada período serão calculados sobre o saldo devedor ?

Vamos pensar um pouco antes de resolver ...

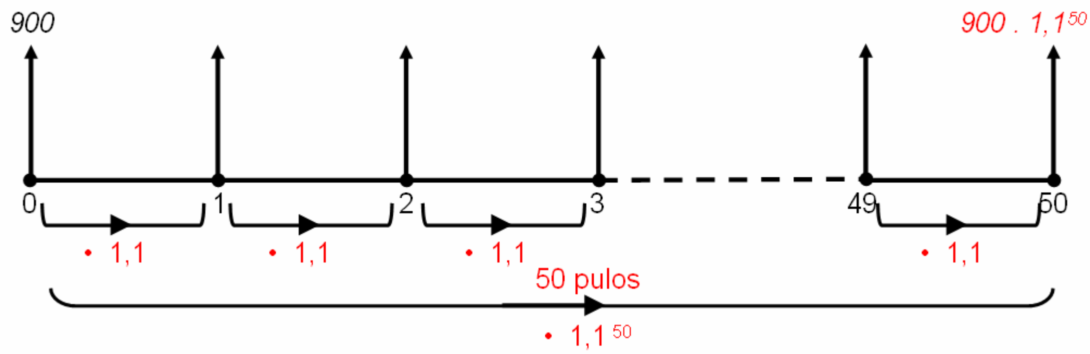
- Será que teremos que calcular os juros mês a mês (são 50 meses!!) ?

- A dificuldade aqui é que os juros não são constantes, como nos juros simples. Observe:



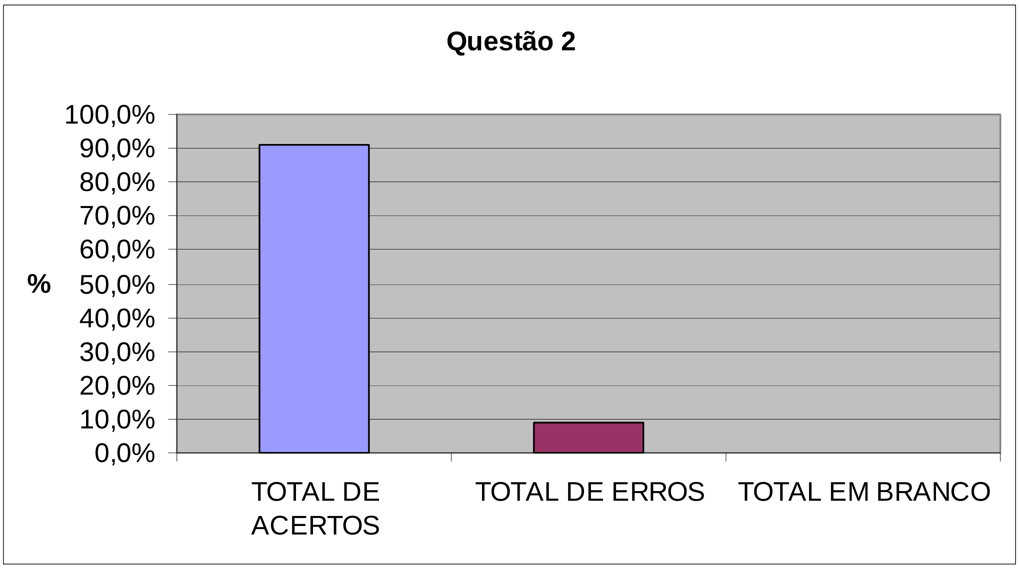
- Será que existe alguma forma de calcular, de tal modo que possamos cortar caminho e calcular direto o valor final?

  - Tente encontrar uma idéia para resolver este desafio. Procure um valor constante nas pequenas etapas ("pulinhos"). Depois use este valor para calcular direto o valor a ser pago ao fim do empréstimo.



*Resposta: O valor a ser pago ao fim do empréstimo será **R$ 105.651,77**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 2



A dupla D foi a única dupla que errou a questão, as outras dez chegaram ao resultado esperado. A figura abaixo mostra a resolução da dupla D.

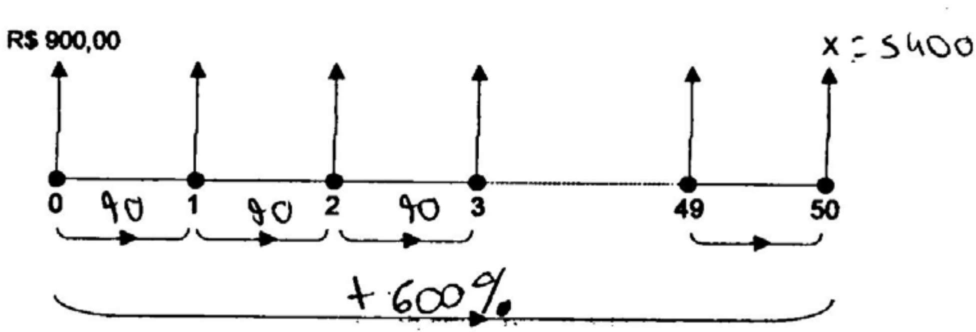


Figura 41 – Resolução incorreta da dupla D

QUESTÃO 3

QUESTÃO 3
(PROJETO FUNDÃO) O dono de uma empresa resolveu dar um aumento de 5% para todos os funcionários. Que fator deve ser multiplicado pelos salários atuais para obter os novos salários?

Concepção e análise *a priori* da questão 3

Esperávamos que os alunos, após a resolução e correção da questão 1, descobrissem o fator de aumento formado pela soma da taxa de aumento (5%) com a porcentagem que representa o salário inicial (100%). Esperávamos a seguinte resposta:

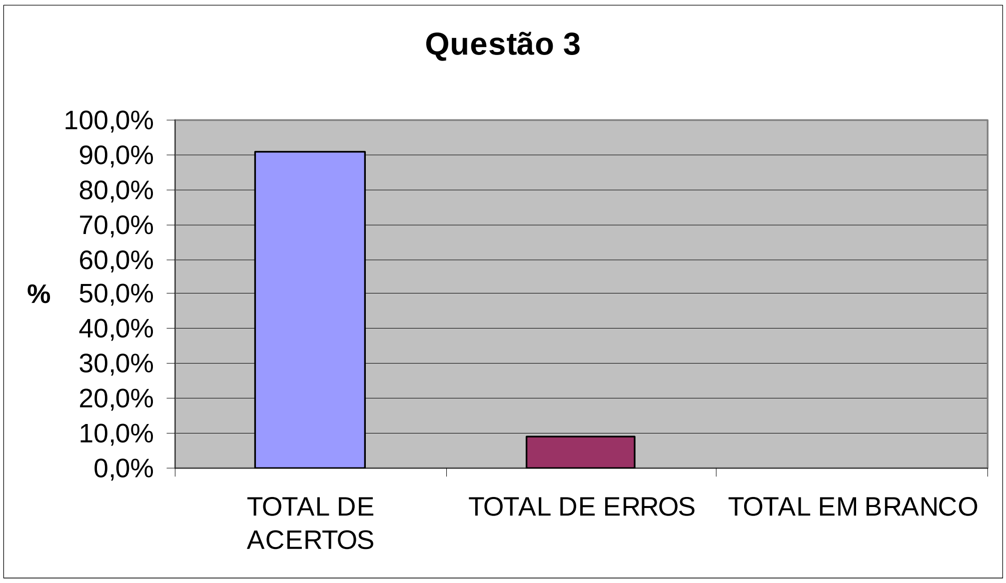
3. (PROJETO FUNDÃO) O dono de uma empresa resolveu dar um aumento de 5% para todos os funcionários. Que fator deve ser multiplicado pelos salários atuais para obter os novos salários?

Resolução:

fator de aumento (f.a.) = 100% + 5% = 105% = 1,05

*Resposta: O fator de aumento é **1,05**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 3



Apenas a dupla D errou a questão, provavelmente por não ter lido corretamente o que era pedido, pois calculou o valor do salário após o aumento e não o fator de aumento, como indica a figura a seguir.

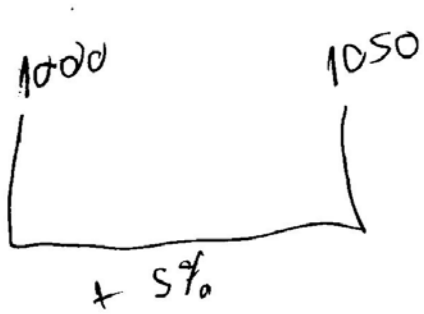


Figura 42 – Resolução incorreta da dupla D

QUESTÃO 4

QUESTÃO 4
Calcule o fator e a taxa de aumento na alteração do salário mínimo de R$ 150,00 para R$ 180,00?

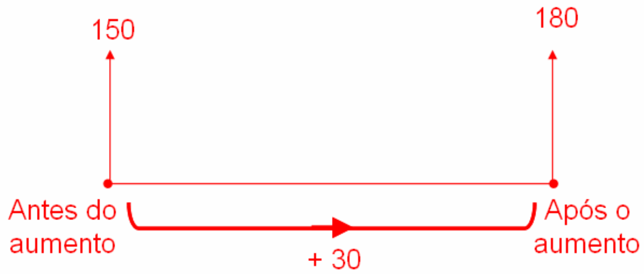
Concepção e análise *a priori* da questão 4

Nesta questão, fornecemos os valores de V_0 e V_n e pedimos a taxa e o fator de aumento. Esperávamos o seguinte resultado:

4. Calcule o fator e a taxa de aumento na alteração do salário mínimo de R$ 150,00 para R$ 180,00?

Resolução:

Primeiro vamos encontrar a ***taxa*** *de aumento:*

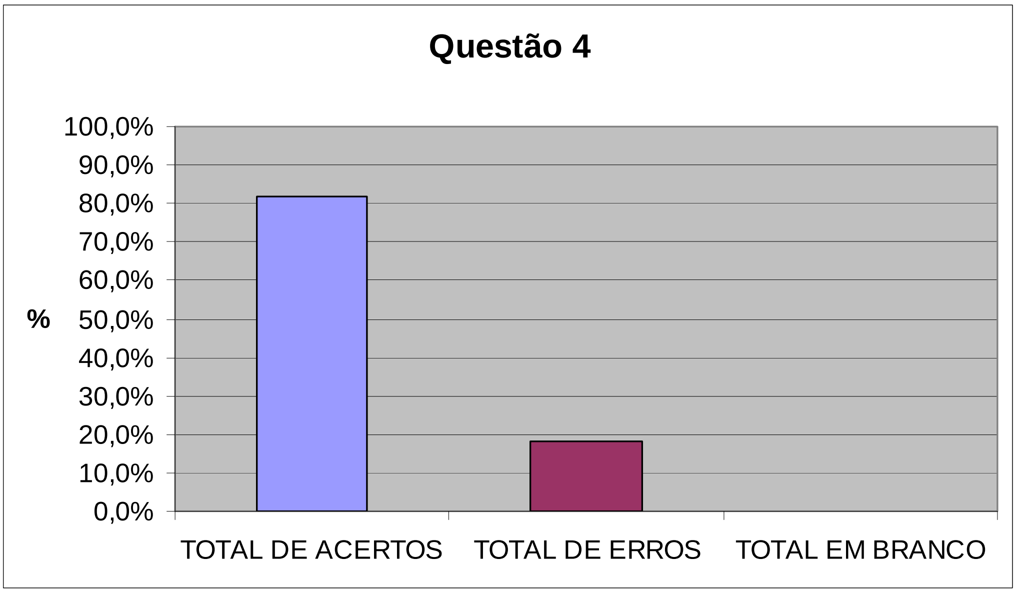


$$\text{Taxa de aumento} = \frac{30}{150} = 0{,}2 = 20\%$$

fator de aumento (f.a.) = 100% + 20% = 120% = 1,2

Resposta: A taxa de aumento é **20%** e o fator de aumento é **1,2**.

Análise *a posteriori* e validação da questão 4



Nesta questão houve 9 acertos e 2 erros (duplas G e H). Estamos considerando como erro uma resposta incompleta, que foi o que ocorreu nesta questão. As duas duplas que erraram encontraram corretamente a taxa de aumento, mas deixaram de responder qual o fator de aumento.

QUESTÃO 5

QUESTÃO 5

Louise obteve um empréstimo bancário de R$ 900,00 para ser pago em 90 dias com taxa trimestral de 14%. Qual valor a ser pago ao fim do empréstimo?

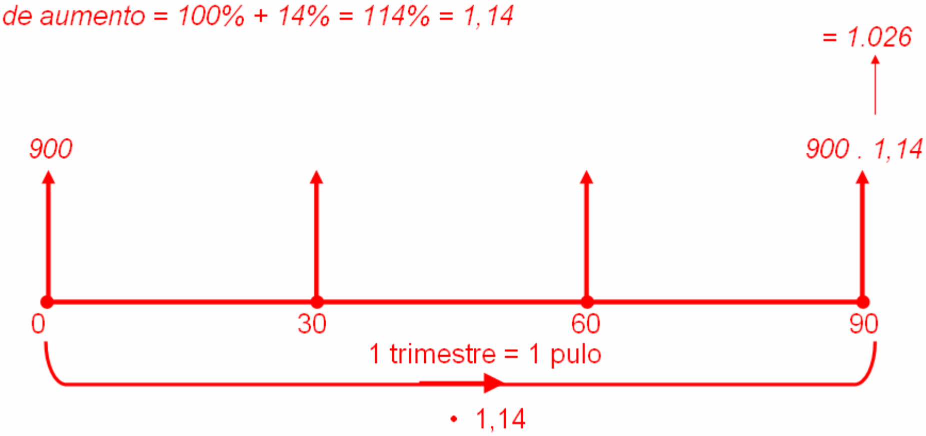
Concepção e análise *a priori* da questão 5

Nesta questão, fornecemos os valores de V_0 e i. Esperávamos que após encontrar o fator de aumento (1 + i) os alunos encontrassem o valor final (V_n). Apresentamos a seguir um modelo esperado da resposta:

5. Marco obteve um empréstimo bancário de R$ 900,00 para ser pago em 90 dias com taxa trimestral de 14%. Qual valor a ser pago ao fim do empréstimo?

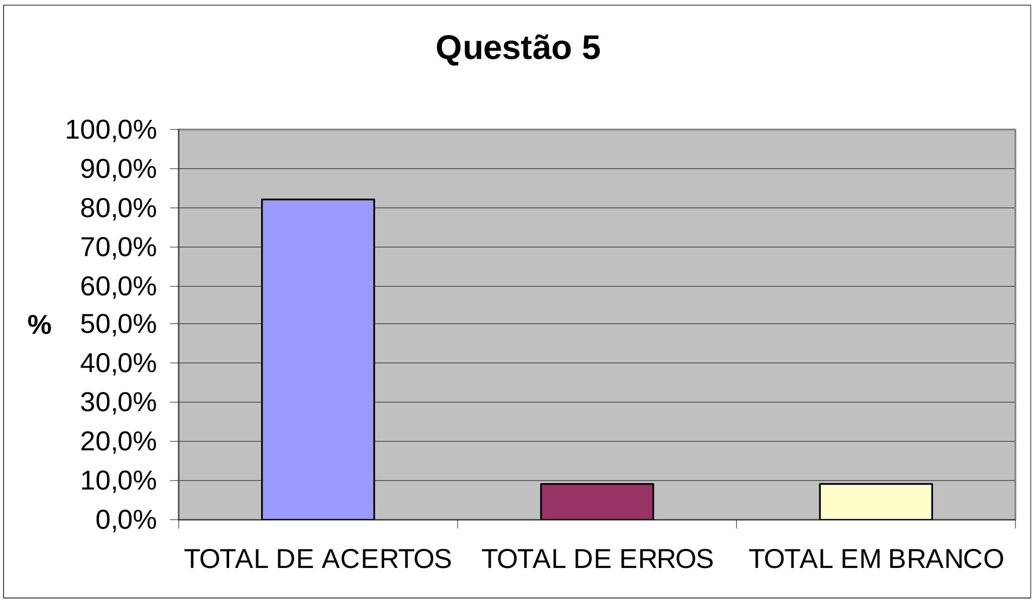
Resolução:

fator de aumento = 100% + 14% = 114% = 1,14



*Resposta: O valor a ser pago ao fim do empréstimo será **R$ 1.026,00**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 5



Nesta questão houve 9 acertos, 1 erro e 1 dupla deixou em branco (dupla H). A dupla G, que errou a questão começou a montar o eixo das setas, mas não concluiu. Das duplas que acertaram, algumas fizeram dois cálculos e não usaram o fator de aumento, outras fizeram apenas um cálculo, pois utilizaram o fator de aumento, como ilustram as figuras a seguir:

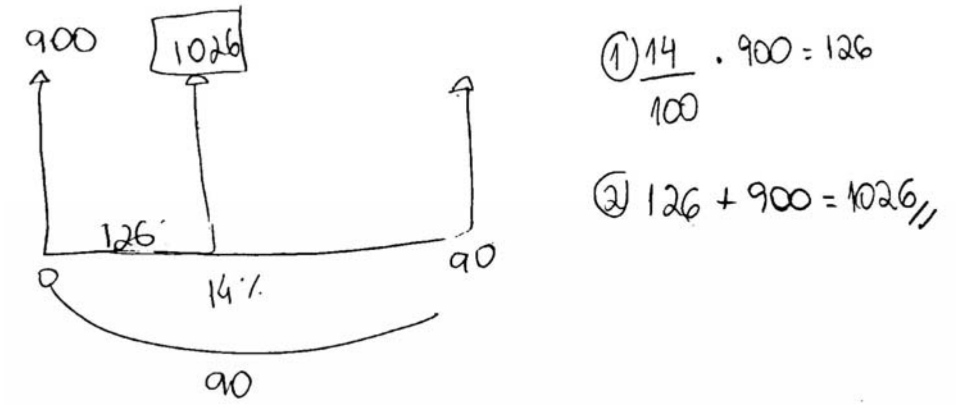


Figura 43 – Resolução da dupla A (dois cálculos)

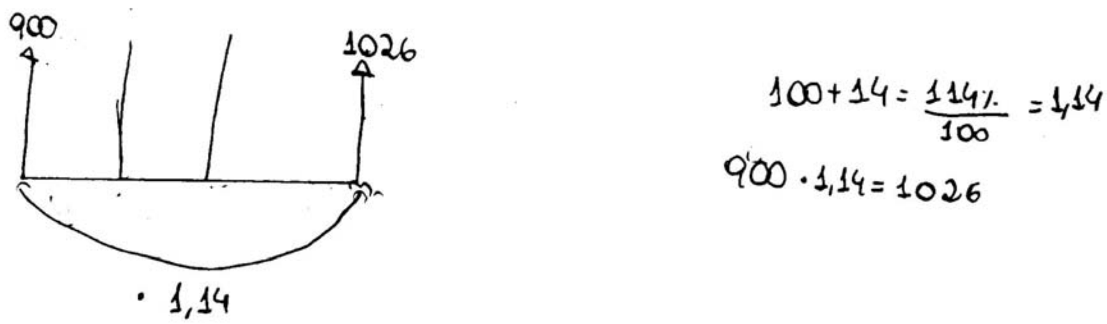


Figura 44 – Resolução da dupla C (uso do fator de aumento)

QUESTÃO 6

QUESTÃO 6
Felipe tomou um empréstimo de R$ 300,00 a juros compostos mensais de 15%. Dois meses após, Felipe pagou R$ 150,00 e um mês após esse pagamento liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

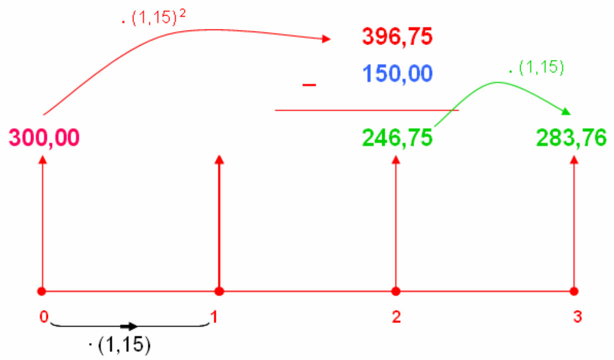
Concepção e análise *a priori* da questão 6

Esta é uma questão mais complexa, pois envolve a movimentação do dinheiro no tempo, já que o pagamento do empréstimo é realizado em dois momentos distintos. Apresentamos a seguir um modelo esperado de resposta:

6. Felipe tomou um empréstimo de R$ 300,00 a juros compostos mensais de 15%. Dois meses após, Felipe pagou R$ 150,00 e um mês após esse pagamento liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento ?

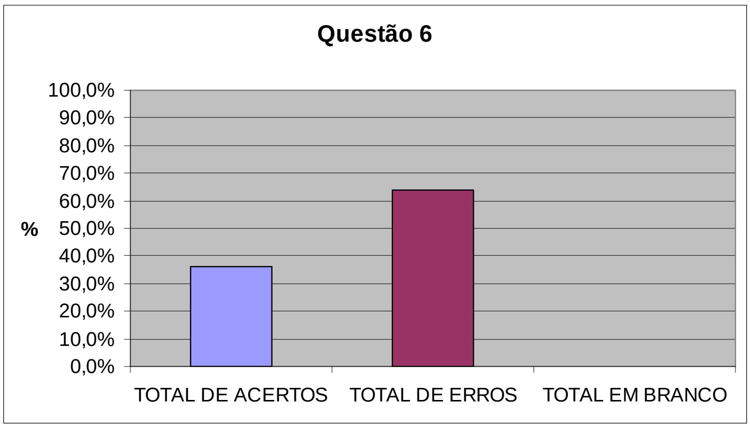
Resolução (1º modo):

fator de aumento mensal = 100% + 15% = 115% = 1,15



*Resposta: O valor do último pagamento será de **R$ 283,76**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 6



Nesta questão houve 4 acertos (duplas B, E, F e L) e 7 erros. As duplas que erraram encontraram corretamente a taxa de aumento, mas deixaram de responder qual o fator de aumento. A dupla D encontrou o valor da dívida na data 2, mas não calculou o valor do último pagamento, talvez por não ter construído o eixo das setas para auxiliar na visualização. Já a dupla J resolveu a questão como se fosse um problema de juro simples. As outras duplas que erraram, não tiveram idéia de como resolver a questão, como foi o caso da dupla A.

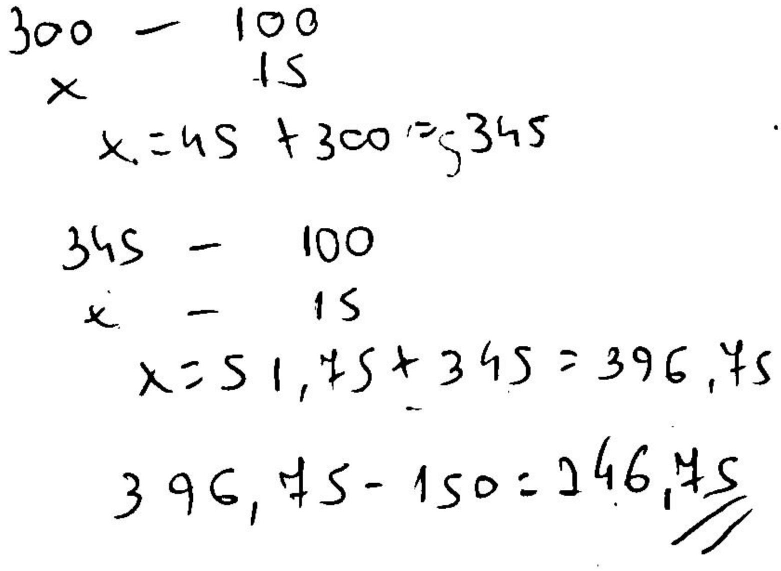


Figura 45 – Resolução incorreta da dupla D

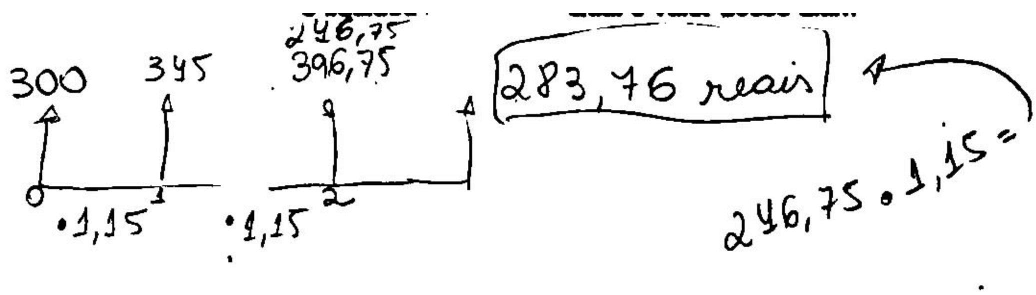


Figura 46 – Resolução incorreta da dupla J

QUESTÃO 7

QUESTÃO 7

(UFRJ – 94) Uma pessoa alugou um apartamento por CR$ 20.000,00 mensais durante três meses. Após esse período, o aluguel foi reajustado em 105%.

a) Calcule o valor do aluguel mensal após o aumento.

b) A inflação, naqueles três meses, foi de 30% ao mês. Determine qual deveria ter sido o percentual de reajuste para que esse tivesse correspondido à inflação do período.

Concepção e análise *a priori* da questão 7

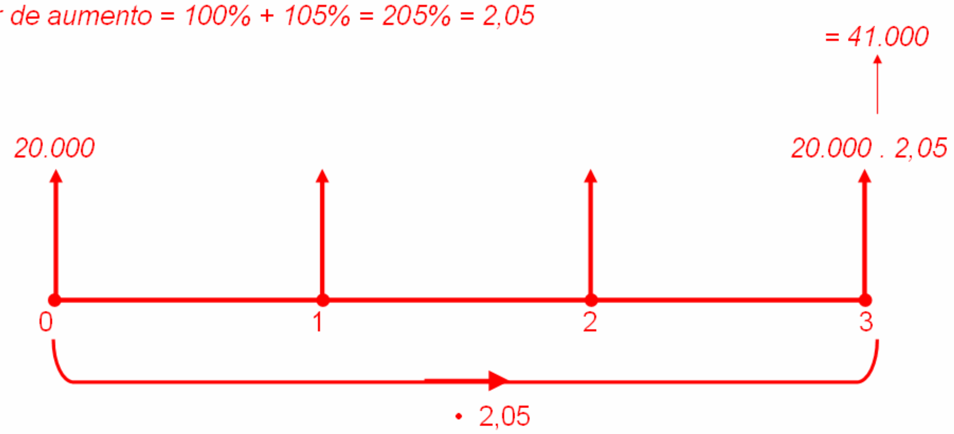
A dificuldade proposta no item (a) desta questão é a apresentação de uma taxa de aumento de 105%. Este empecilho foi criado propositadamente, pois sabemos que o manuseio de taxas maiores do que 100% é um obstáculo epistemológico do tópico porcentagem. Esperávamos o seguinte resultado:

7. (UFRJ – 94) Uma pessoa alugou um apartamento por CR$ 20.000,00 mensais durante três meses. Após esse período, o aluguel foi reajustado em 105%.

a) Calcule o valor do aluguel mensal após o aumento ?

Resolução:

fator de aumento = 100% + 105% = 205% = 2,05



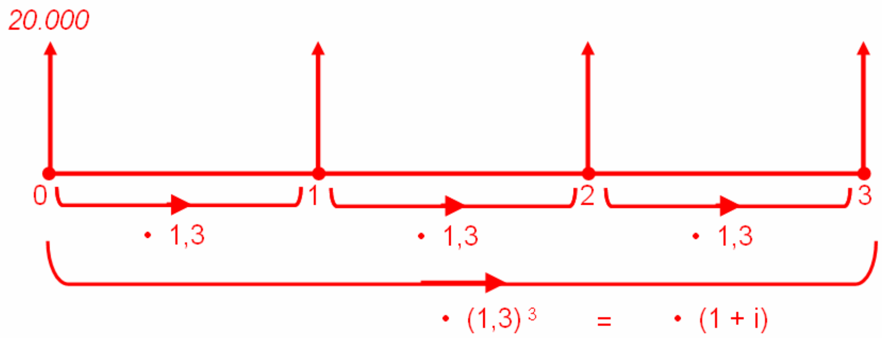
*Resposta: O valor do aluguel será de **R$ 41.000,00**.*

O item (b) desta questão é um exercício de aumentos sucessivos. Pretendíamos neste item fazer uma antecipação do conteúdo de juros compostos, levando o aluno a pensar em como resolver um problema que possuísse três fatores de aumento. Apresentamos a seguir um modelo esperado de resposta:

b) A inflação, naqueles três meses, foi de 30% ao mês. Determine qual deveria ter sido o percentual de reajuste para que esse tivesse correspondido à inflação do período.

Resolução:

fator de aumento mensal = 100% + 30% = 130% = 1,3



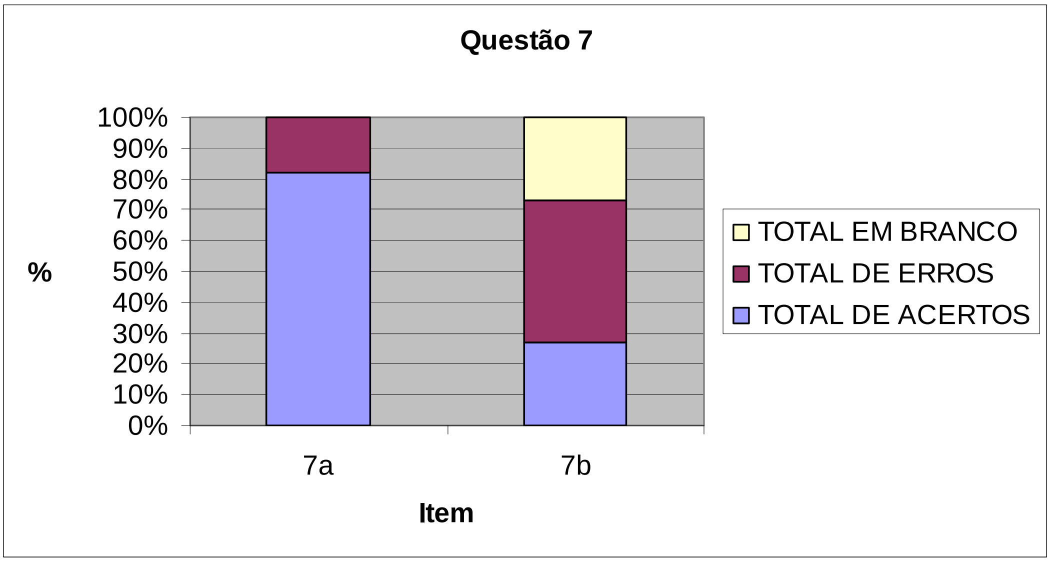
Observando o eixo das setas, temos :

• $(1,3)^3$ = • $(1 + i)$ ⇒ *2,197 = 1 + i* ⇒ *2,197 – 1 = i*

⇒ *i = 1,197 ou* ***119,7%***

Resposta: O percentual de reajuste deveria ter sido ***119,7%*** *.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 7



No item 7a, 9 duplas acertaram e 2 duplas (C e L) erraram. O erro das duas duplas foi considerar que o fator de aumento era 1,05, erro previsto na análise a priori. No item 7b, 3 duplas acertaram, 5 erraram e 3 deixaram em branco. O erro da dupla L foi ter considerado que o fator de aumento era 1,3.

Conclusão dessa sessão:

Pelos resultados observados na aplicação das atividades desta sessão, julgamos que os alunos, de uma forma geral, conseguiram deduzir que o fator de aumento (1 + i) é formado pela soma da taxa (i) com a porcentagem que representa o capital inicial (100% ou 1) e que o fator de desconto (1 – i) é formado pela diferença entre a porcentagem que representa o capital (1) e a taxa (i). Porém não alcançamos o objetivo de criar o hábito, no aluno, de utilizar o fator de aumento. Muitos alunos resolveram os problemas de acréscimo propostos, realizando primeiro o cálculo do valor da porcentagem de aumento depois somando este valor com o da mercadoria antes do aumento. Sugerimos que a correção dos problemas seja feita um a um, isto é, que só se peça ao aluno para fazer uma questão após a correção da questão anterior, e que se enfatize a necessidade e importância do uso do fator de aumento a cada correção.

Uma vez concluída a sessão, parece-nos relevante mencionar que percebemos que houve um salto muito grande no item b da questão 7. Sugerimos que este item seja retirado desta sessão e seja acrescentado na sessão 4, que trata de juros compostos.

A maior dificuldade observada foi a dificuldade que alguns alunos apresentaram em criar uma solução para alguns problemas propostos.

4.9 Quarta sessão: juros compostos

Capitalização é o processo que aumenta o capital investido. Nesta sessão tratamos da capitalização financeira com aplicação da taxa de juro, que periodicamente acrescenta valor ao investimento, conhecida como juro composto, também conhecido como juros sobre juros. O juro composto é utilizado na grande maioria das operações financeiras realizadas no Brasil. No juro composto calcula-se o valor do juro a cada intervalo de tempo, incorporando-se este valor ao saldo, passando a render juro.

No processo de capitalização composta, com taxa de juro (i) constante, para avançar um termo, basta multiplicar pelo fator de aumento (1 + i), conforme visto na sessão anterior. Esperamos que a partir desta informação o aluno deduza que para passar da data 0 (zero) para a data n, é preciso avançar n termos, e que para isso deve multiplicar V_0 por $(1 + i)^n$.

Procuramos chamar a atenção, nas atividades desta sessão, que o fato do capital ser multiplicado pelo fator (1 + i) ao fim de cada intervalo de tempo caracteriza o processo de capitalização composta como uma função exponencial e um caso particular de progressão geométrica onde a razão é (1 + i).

4.9.1 Concepção e análise *a priori* da sessão 4

Os alunos receberam um bloco de atividades contendo a definição de juros compostos, além de 6 questões para serem resolvidas em sala de aula, onde buscamos distribuir as possíveis incógnitas de um problema de juro composto (V_0, V_n e i). Procuramos também, na questão 6, chamar a atenção do aluno para a estreita relação entre juro composto e função exponencial.

Variáveis micro-didáticas:

- Utilização do eixo das setas como ferramenta para o ensino de juro composto;
- cálculo dos juros compostos pelo eixo das setas, sem o apoio de fórmulas;
- integração de juro composto com função exponencial;

- integração de juro composto com progressão geométrica;
- integração do valor futuro com fator de aumento.

Ao resolver as questões propostas nesta sessão é possível que surjam as seguintes situações:

- o aluno não consiga entender o que se pede na atividade por questões de interpretação de texto;
- o aluno não consiga fazer a transcrição das variáveis do problema para o eixo das setas;
- o aluno não consiga criar uma solução para o problema, mesmo tendo feito corretamente o eixo das setas;

4.9.2 Experimentação da sessão 4

A aplicação da quarta sessão ocorreu no dia 18 de setembro de 2008 das 10h50 às 12h30 sem intervalo.

Durante a aplicação das atividades não houve interferência na resolução dos alunos, a única instrução dada foi que buscassem um caminho para resolver as questões evitando deixá-las em branco.

Neste dia houve uma falta, a do aluno H2.

4.9.3 Análise *a posteriori* e validação da sessão 4

A análise *a posteriori* desta sessão assentou-se sobre:

- as respostas dadas pelos alunos às questões propostas na atividade;
- os relatórios preenchidos pelos observadores, auxiliados por gravação em áudio;

Inicialmente, para proporcionar uma visão geral, apresentamos um gráfico relacionando cada questão com sua porcentagem de acertos (universo de 11 duplas). Em seguida, apresentamos um gráfico relacionando cada dupla com sua porcentagem de acertos em todas as questões da 4ª sessão.

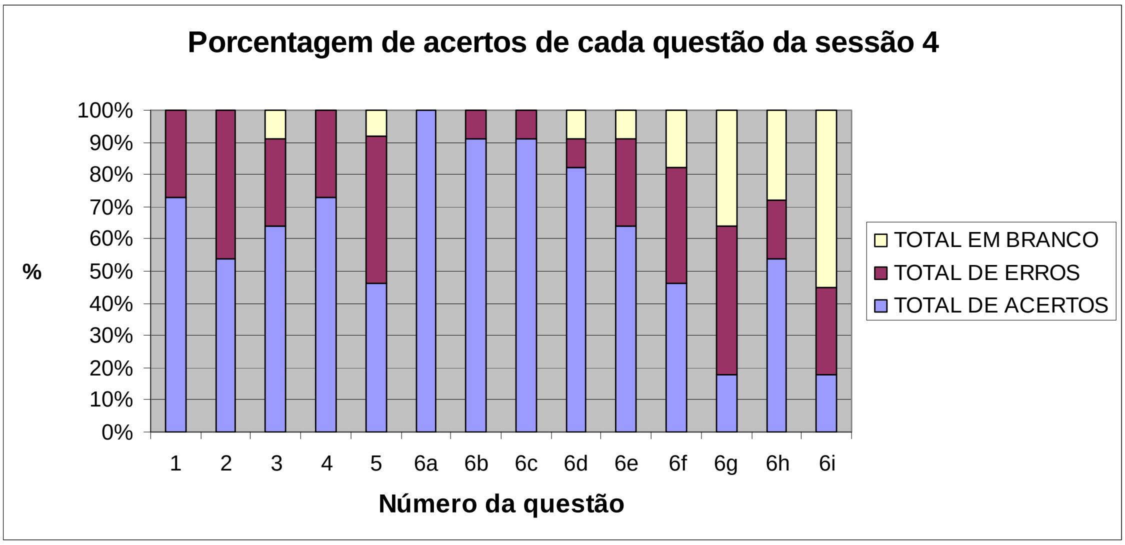


Figura 47 – Porcentagem de acertos de cada questão da sessão 4

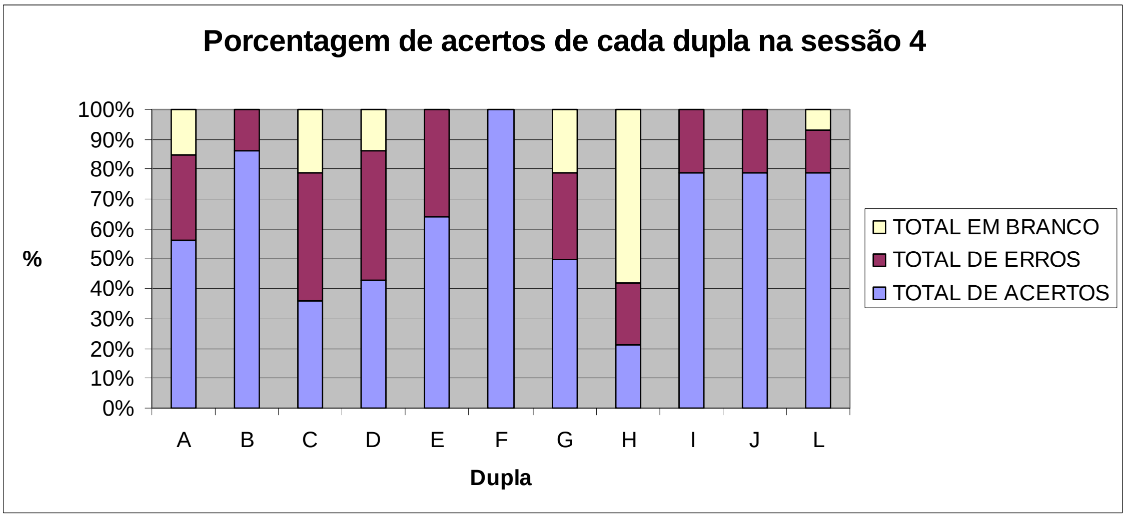


Figura 48 – Porcentagem de acertos de cada dupla na sessão 4

Para facilitar a leitura e evitar o acesso constante aos anexos deste trabalho, apresentaremos um recorte de cada questão seguida por sua discussão.

QUESTÃO 1

QUESTÃO 1
(PROJETO FUNDÃO) Marta tomou um empréstimo de R$ 200,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Marta 4 meses depois?

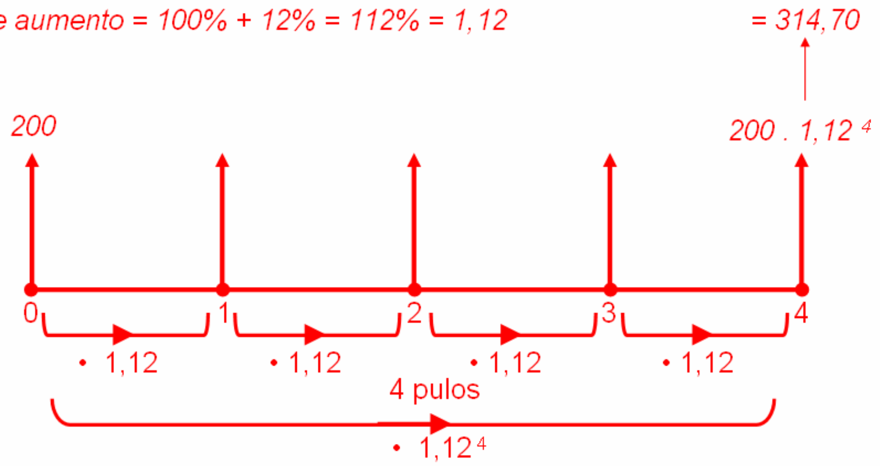
Concepção e análise *a priori* da questão 1

Esta questão foi criada com a intenção de introduzir juros compostos. Os alunos deveriam aplicar o mesmo fator de aumento em quatro momentos distintos, ou elevá-lo ao cubo e aplicar o resultado apenas uma vez. Apresentamos a seguir um modelo esperado de resposta.

1. (PROJETO FUNDÃO) Marta tomou um empréstimo de R$ 200,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Marta 4 meses depois?

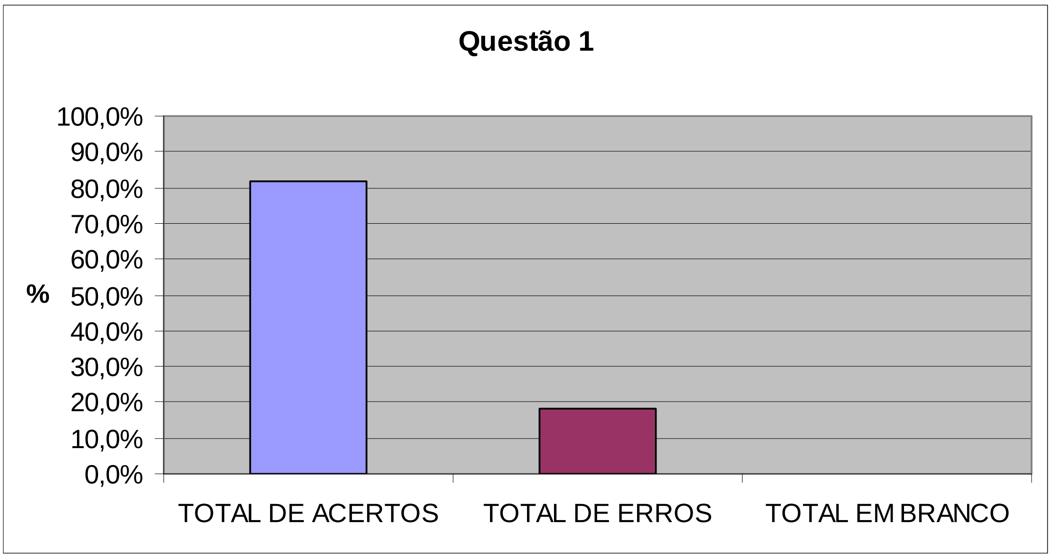
Resolução:

fator de aumento = 100% + 12% = 112% = 1,12



*Resposta: A dívida de Marta será de **R$ 314,70**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 1



Três duplas erraram esta questão. A dupla A fez corretamente a transição dos dados do problema para o eixo das setas, mas errou o fator de aumento, como mostra a figura a seguir.

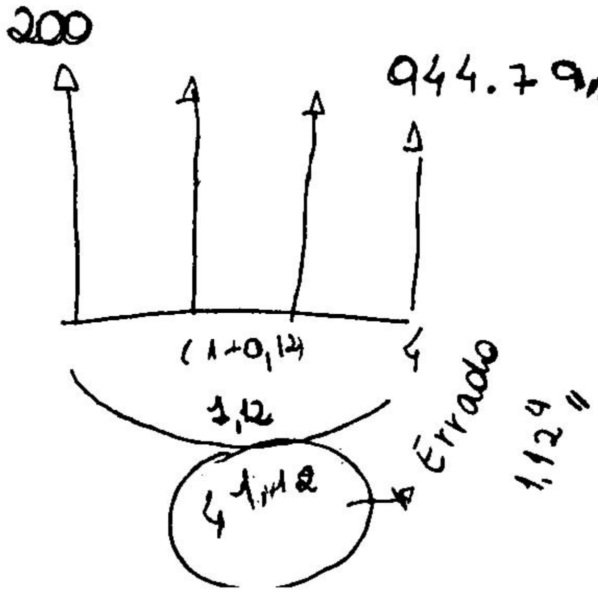


Figura 49 – Resolução incorreta da dupla A

A dupla C apresentou dois erros em sua estratégia: primeiramente multiplicou por quatro no lugar de elevar à quarta potência, demonstrando confusão entre juros simples e compostos. E se fosse uma questão de juros simples teria errado, pois multiplicou V_1 por quatro ao invés de multiplicar os juros. A figura abaixo mostra a resolução da dupla C.

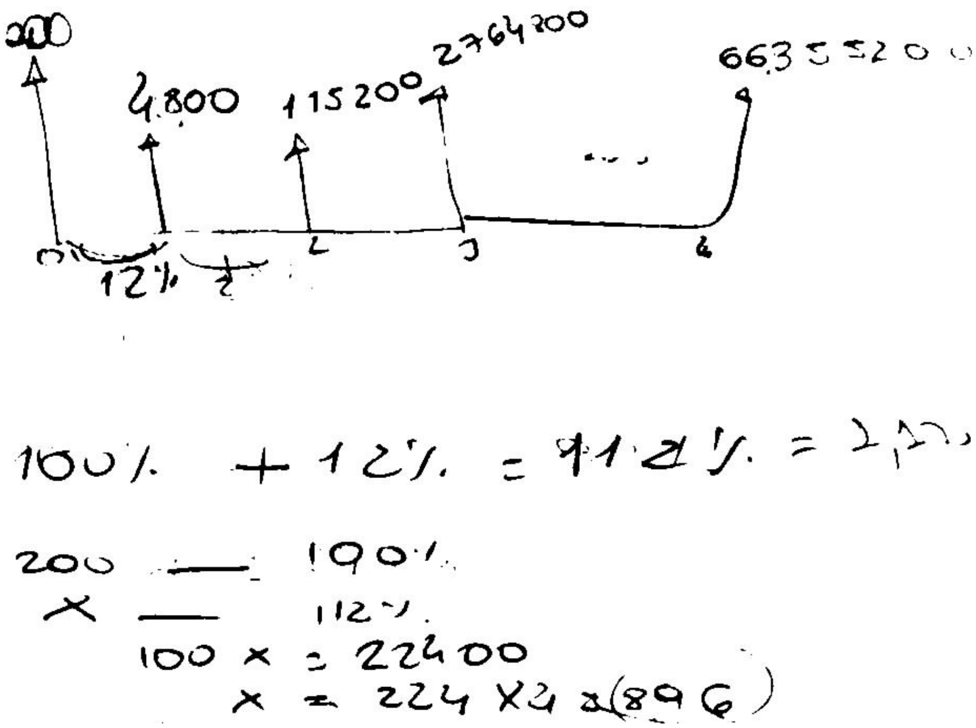


Figura 50 – Resolução incorreta da dupla C

A dupla H não desenhou o eixo das setas e não conseguiu criar uma solução correta para o problema, como mostra a figura a seguir.

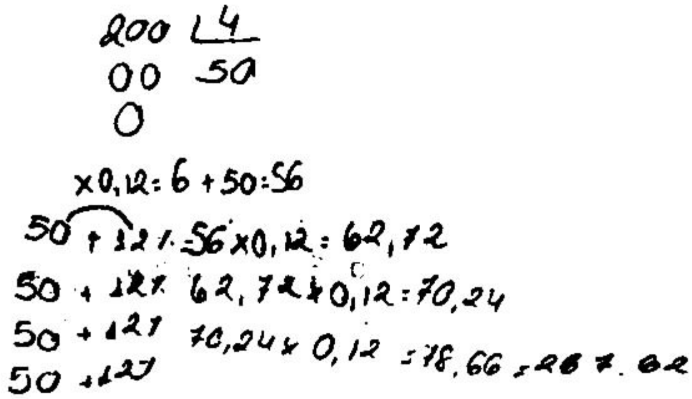


Figura 51 – Resolução incorreta da dupla H

Algumas duplas calcularam os juros mês a mês, no lugar de multiplicar pelo fator de aumento ($1{,}12^4$), como ilustra a seguinte figura:

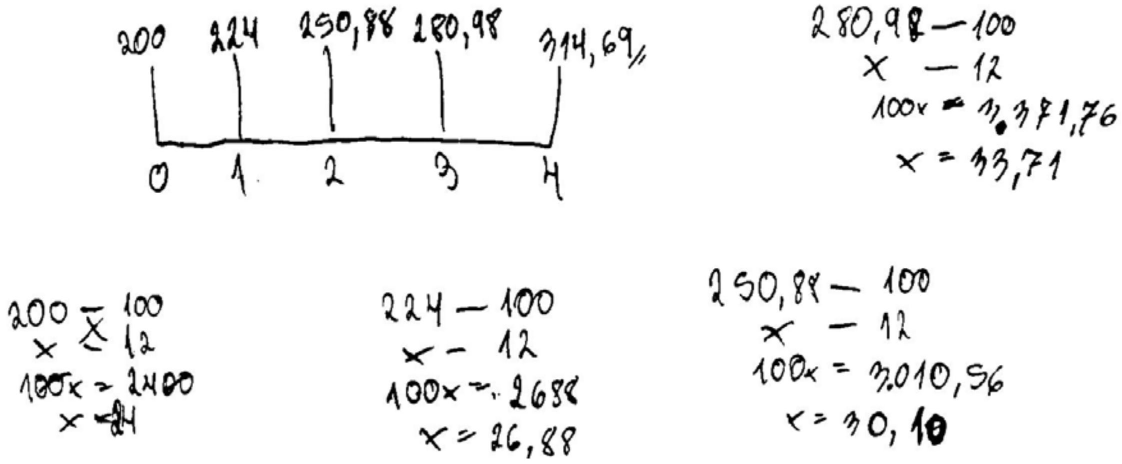


Figura 52 – Resolução incorreta da dupla D

QUESTÃO 2

QUESTÃO 2

(PROJETO FUNDÃO) João aplicou R$1 200,00 numa caderneta de poupança. No primeiro mês a taxa de juros foi de 0,4%, no segundo foi de 0,5% e no terceiro foi de 0,3%.

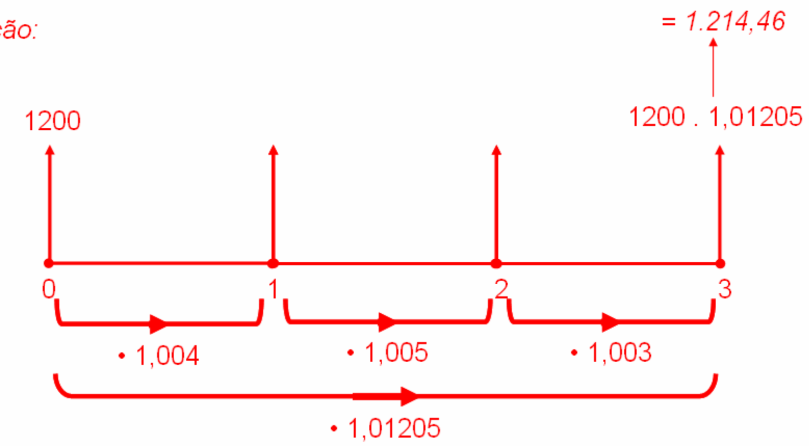
Represente essa situação no "eixo das setas", e calcule o rendimento total de João ao final desse período. Qual a taxa no período?

Concepção e análise *a priori* da questão 2

Nesta questão, onde as incógnitas são os juros e a taxa de juro (J e i), esperávamos o seguinte resultado:

2. (PROJETO FUNDÃO) João aplicou R$1 200,00 numa caderneta de poupança. No primeiro mês a taxa de juros foi de 0,4%, no segundo foi de 0,5% e no terceiro foi de 0,3%.
   Represente essa situação no "eixo das setas", e calcule o rendimento total de João ao final desse período. Qual a taxa no período?

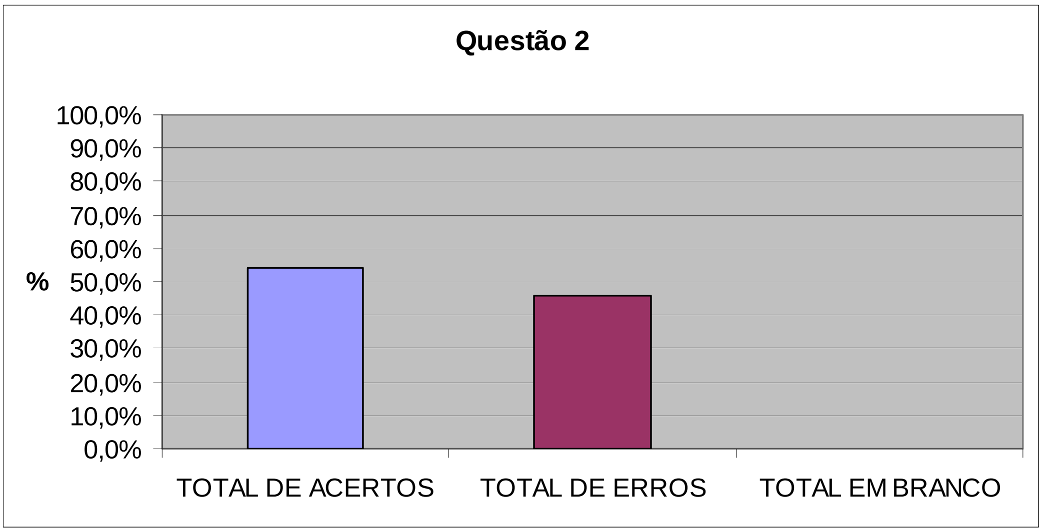
Resolução:



Rendimento = 1214,46 – 1200 = ***R$ 14,46***

Taxa do período = 0,01205 = ***1,205%***

Análise *a posteriori* e validação da questão 2



Cinco duplas erraram esta questão. As duplas B, H e L fizeram corretamente a transcrição para o eixo das setas, encontraram corretamente V_3, mas não calcularam a taxa, como mostra a figura abaixo.

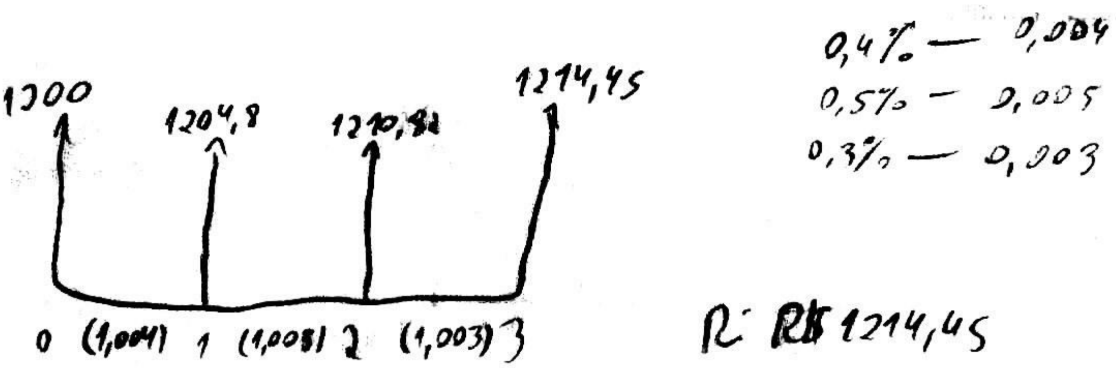


Figura 53 – Resolução incorreta da dupla B

A dupla C soube fazer a transcrição para o eixo das setas, calculou corretamente os fatores de aumentos mensais, porém não conseguiu criar uma estratégia correta para resolver o problema.

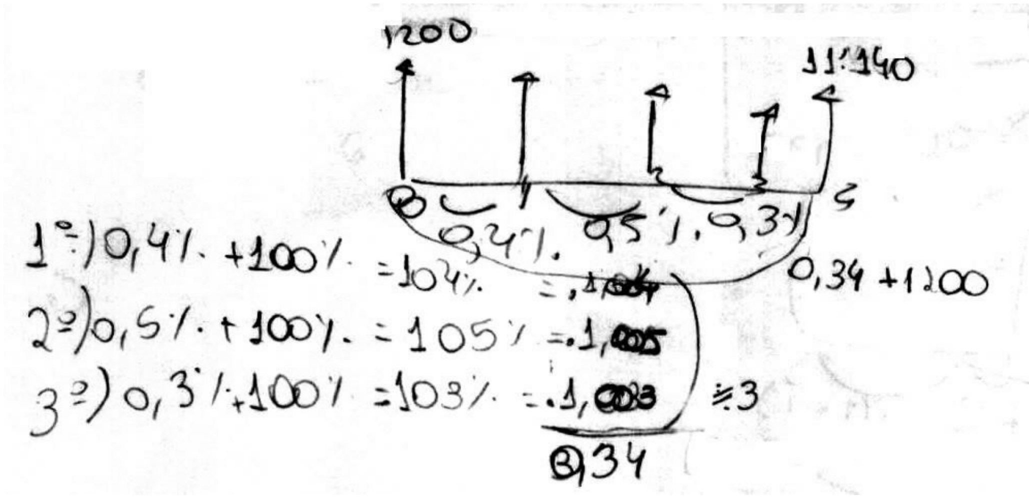


Figura 54 – Resolução incorreta da dupla C

A dupla G soube fazer a transcrição para o eixo das setas, calculou corretamente os fatores de aumentos mensais, porém não conseguiu concluir a resolução da questão.

Vale a pena ressaltar que nenhuma dupla calculou a taxa do período utilizando apenas as taxas mensais. Todas as duplas que acertaram a questão calcularam primeiramente o valor final para depois calcular a taxa do período, como ilustra a figura a seguir.

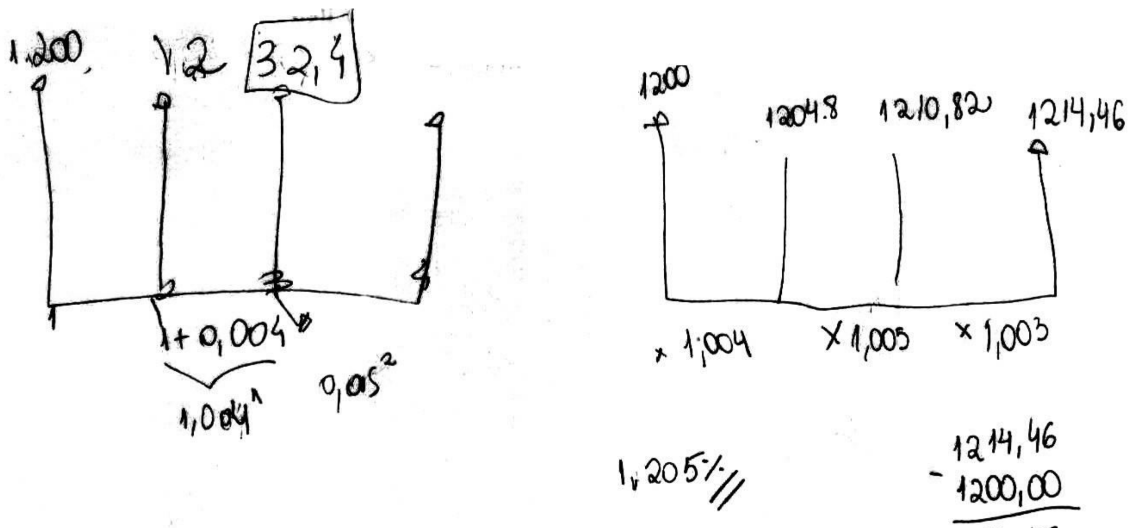


Figura 55 – Resolução correta da dupla A

QUESTÃO 3

QUESTÃO 3

Édipo obteve R$ 2.200,00 emprestados da sua mãe à taxa 3% ao mês pelo prazo de quatro anos capitalizado pelo sistema de juro simples. Nesse mesmo período ele aplicou esta mesma quantia com a mesma taxa, também com capitalização mensal, porém a juro composto. Quanto Édipo lucrou neste empréstimo de mãe para filho?

Concepção e análise *a priori* da questão 3

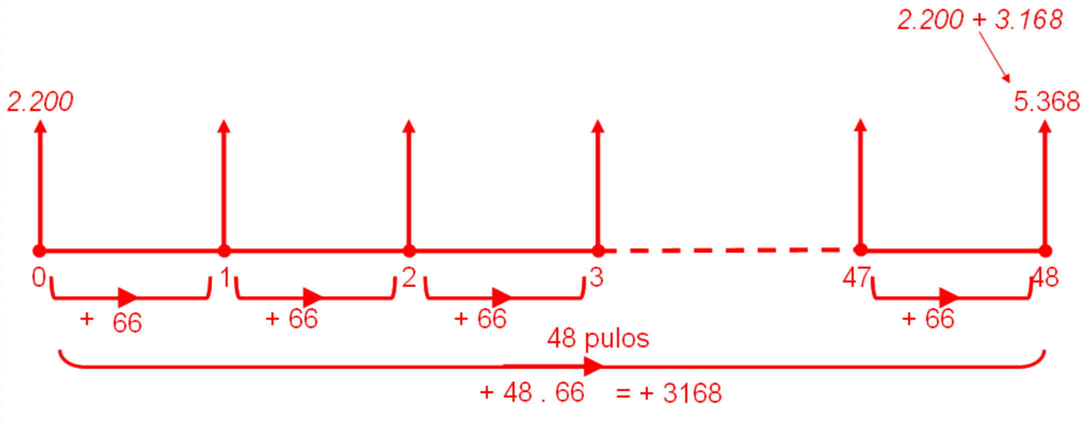
Esta é uma questão complexa, que requer vários passos na sua resolução. Primeiramente é necessário calcular o V_n do empréstimo (juro simples). Depois é preciso calcular o V_n da aplicação (juro composto), para finalmente calcular a diferença entre os dois resultados e obter a resposta do problema. Neste caso, esperamos o seguinte resultado:

3. Édipo obteve R$ 2.200,00 emprestados da sua mãe à taxa 3% ao mês pelo prazo de quatro anos capitalizado pelo sistema de juro simples. Nesse mesmo período ele aplicou esta mesma quantia com a mesma taxa, também com capitalização mensal, porém a juro composto. Quanto Édipo lucrou neste empréstimo de mãe para filho?

Resolução:

Primeiro vamos calcular quanto Édipo pagará à sua mãe daqui a quatro anos:

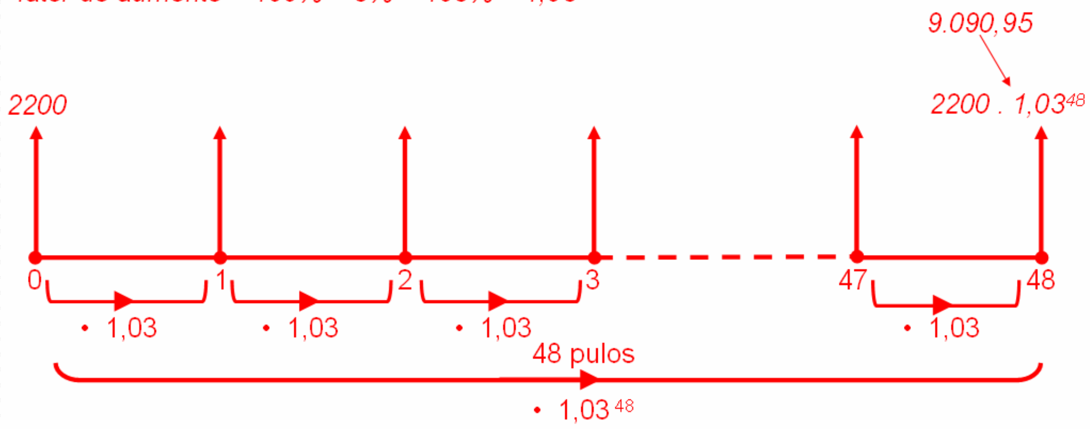
Juro mensal = 3% de R$ 2200,00 = 0,03 . 2200 = 66 ⇒ *J = R$ 66,00*



.˙. Édipo pagará R$ 5.368,00 à sua mãe daqui a quatro anos.

Agora vamos calcular quanto Édipo irá resgatar daqui a quatro anos:

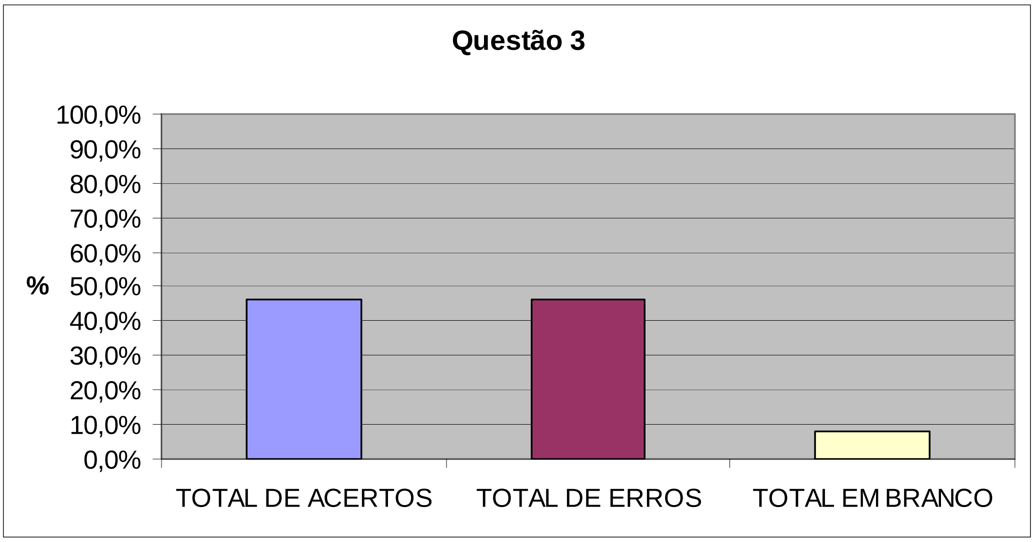
fator de aumento = 100% + 3% = 103% = 1,03



9.090,95 – 5.368,00 = 3.722,95

*Resposta: Édipo lucrou **R$ 3.722,95**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 3



Três duplas erraram esta questão. A dupla A errou apenas o fator de aumento, como mostra a figura a seguir.

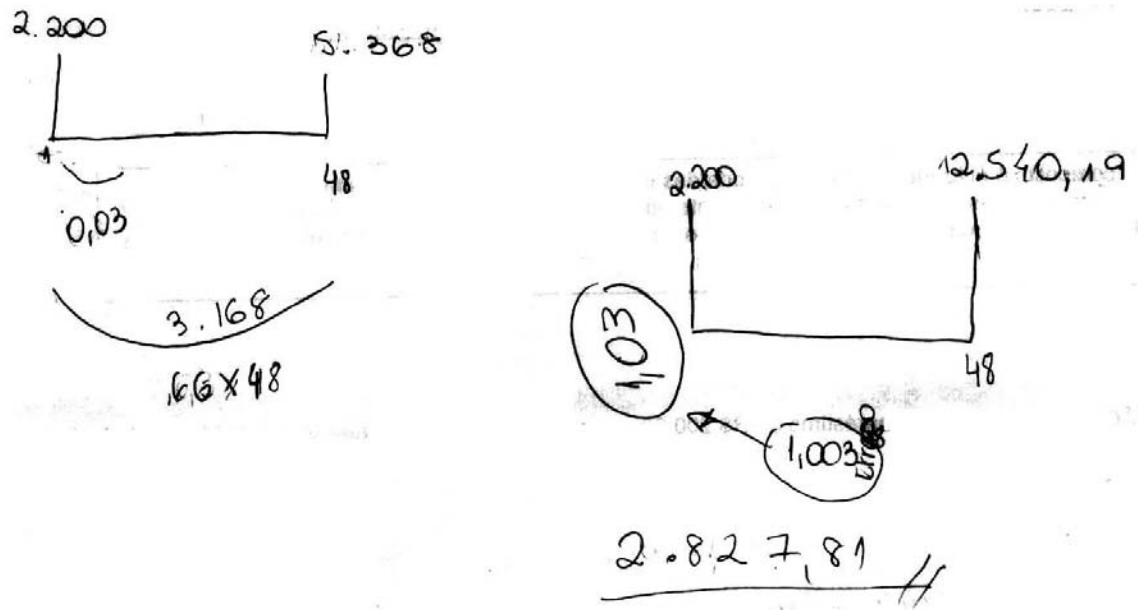


Figura 56 – Resolução incorreta da dupla A

A dupla C desenhou corretamente o eixo das setas, achou o fator de aumento certo, não conseguiu criar uma solução correta para o problema.

A dupla E errou apenas no calculo do valor dos juros no caso de juros simples, pois multiplicou o fator de aumento (1,03) por 48 no lugar de multiplicar o juro mensal (66) por 48. A figura abaixo mostra a resolução da dupla E.

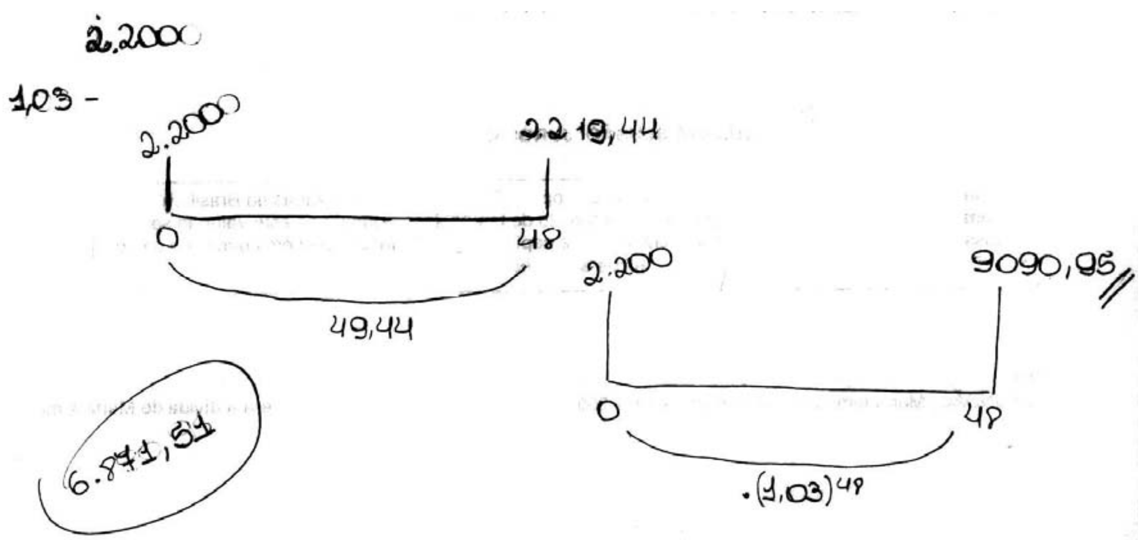


Figura 57 – Resolução incorreta da dupla E

QUESTÃO 4

QUESTÃO 4

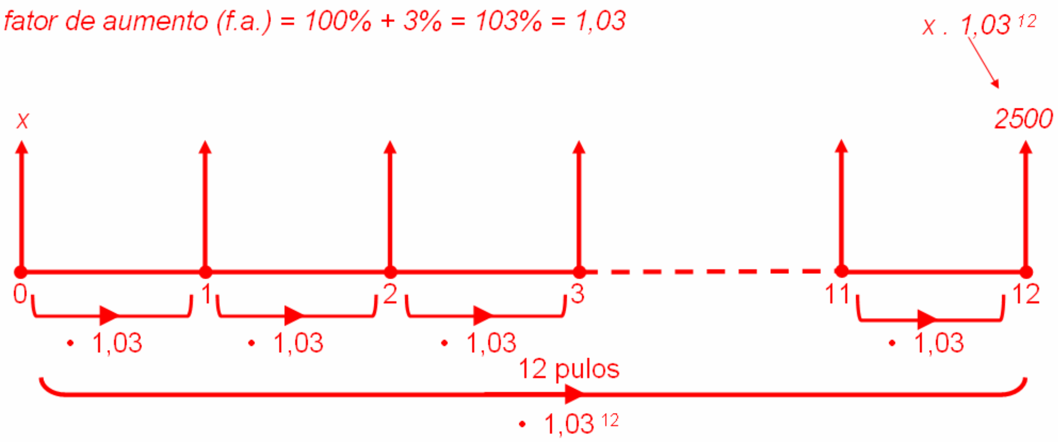
Um banco paga o montante de R$ 2 500,00 a quem aplicar em um de seus títulos durante um ano. Sabendo que a taxa de juros é de 3% a. m., qual o valor do capital necessário neste investimento?

Concepção e análise *a priori* da questão 4

Nesta questão, onde a incógnita é o capital inicial (V_0), esperávamos o seguinte resultado:

4. Um banco paga o montante de R$ 2 500,00 a quem aplicar em um de seus títulos durante um ano. Sabendo que a taxa de juros é de 3% a. m., qual o valor do capital necessário neste investimento?

fator de aumento (f.a.) = 100% + 3% = 103% = 1,03

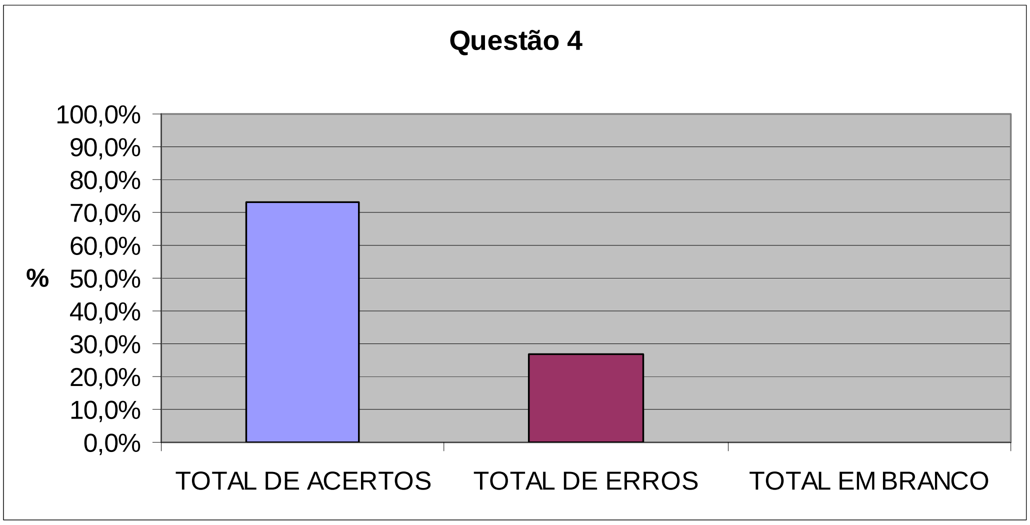


Observando o eixo das setas, temos :

$$x \cdot 1{,}03^{12} = 2500 \Rightarrow x = \frac{2500}{1{,}03^{12}} \Rightarrow x = 1753{,}45$$

Resposta: O capital necessário neste investimento é de ***R$ 1.753,45***.

Análise *a posteriori* e validação da questão 4



Três duplas erraram esta questão. A dupla D desenhou corretamente o eixo das setas, achou o fator de aumento certo, porém achou que o valor final fosse o valor dos juros, errando a questão. Já as duplas G e H não conseguiram criar uma solução correta para o problema. A figura abaixo mostra a resolução da dupla D.

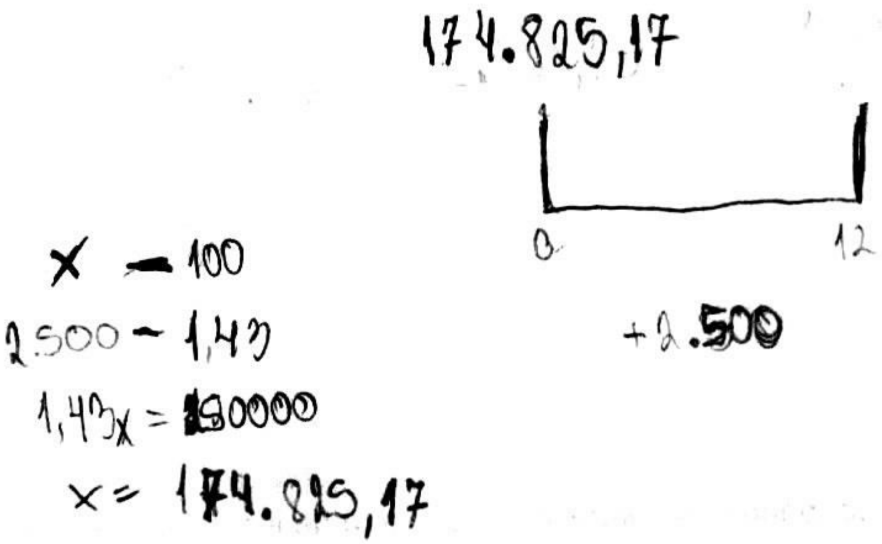


Figura 58 – Resolução incorreta da dupla D

QUESTÃO 5

QUESTÃO 5

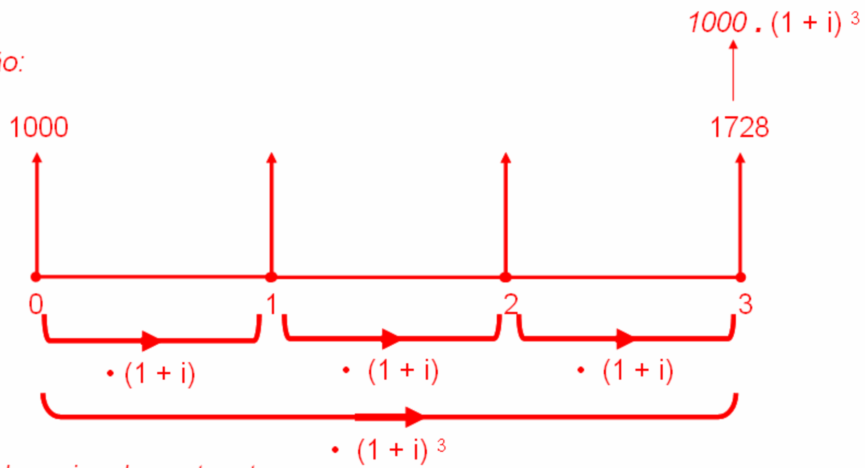
(PROJETO FUNDÃO) Ana investiu R\$1 000,00 a juros compostos pelo período de três meses, e resgatou a quantia de R\$ 1 728,00. Qual foi a taxa mensal de juros?

Concepção e análise *a priori* da questão 5

Nesta questão, onde a incógnita é a taxa de juro (i), esperávamos o seguinte resultado:

5. (PROJETO FUNDÃO) Ana investiu R\$1 000,00 a juros compostos pelo período de três meses, e resgatou a quantia de R\$ 1 728,00. Qual foi a taxa mensal de juros?

Resolução:



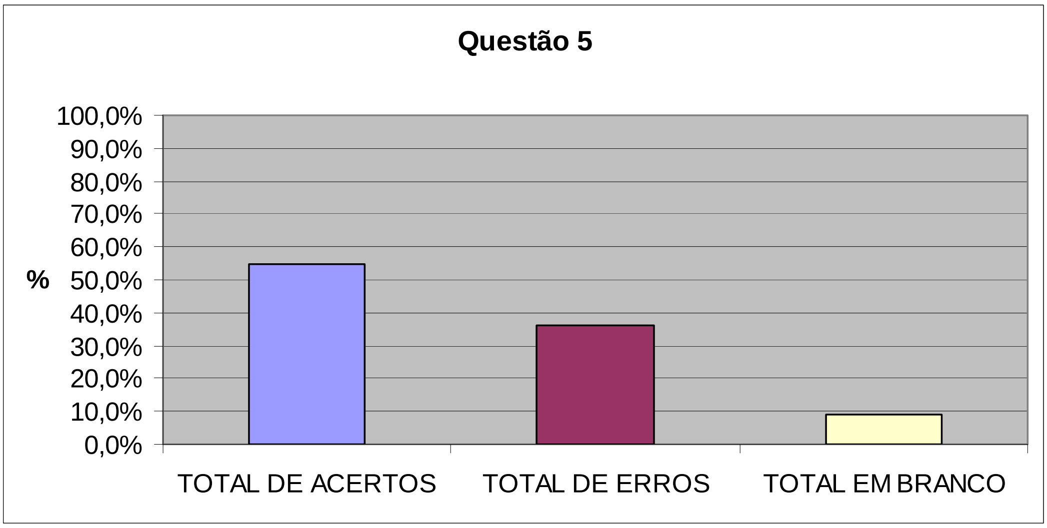
Observando o eixo das setas, temos :

$1000 \cdot (1+i)^3 = 1728 \Rightarrow (1+i)^3 = \dfrac{1728}{1000} \Rightarrow 1 + i = \sqrt[3]{\dfrac{1728}{1000}}$

$\Rightarrow 1 + i = 1{,}2 \Rightarrow i = 0{,}2$ **ou 20%**

Resposta: A taxa mensal de juros foi ***20%****.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 5



Cinco duplas erraram esta questão. As duplas A e D desenharam corretamente o eixo das setas, porém resolveram o problema como se fosse uma questão de juros simples, dividindo o fator de aumento trimestral por três no lugar de extrair sua raiz cúbica, como ilustra a figura a seguir.

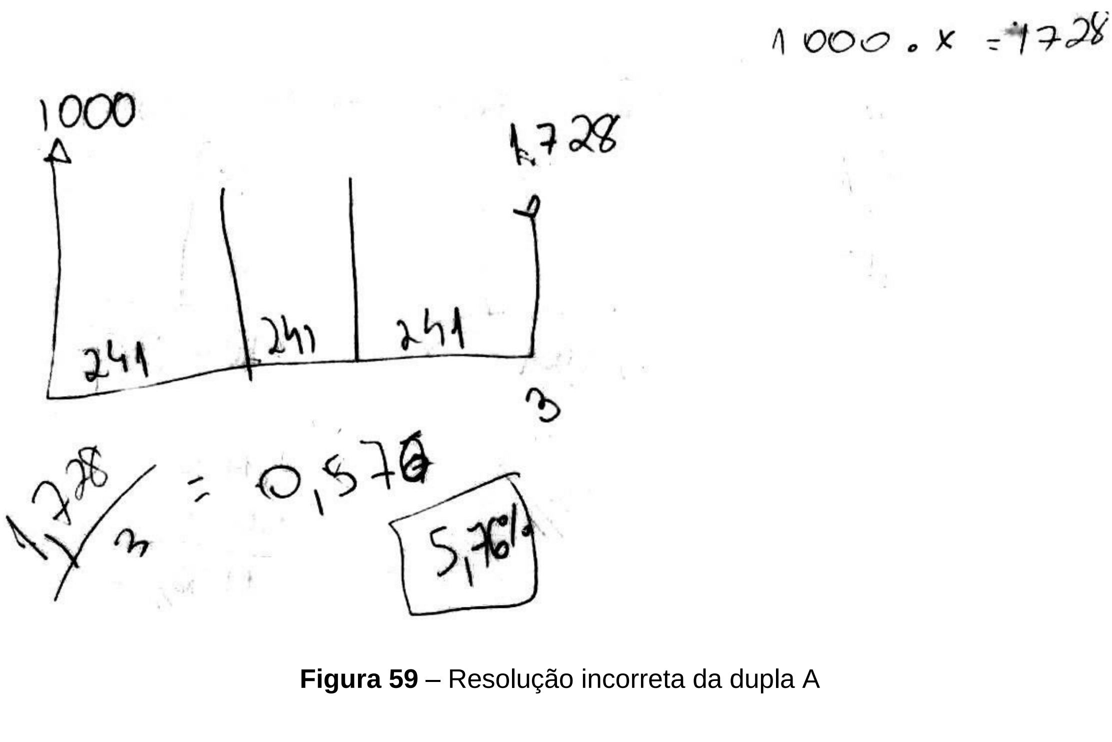


Figura 59 – Resolução incorreta da dupla A

A dupla C soube fazer a transcrição para o eixo das setas, porém não concluiu a resolução da questão.

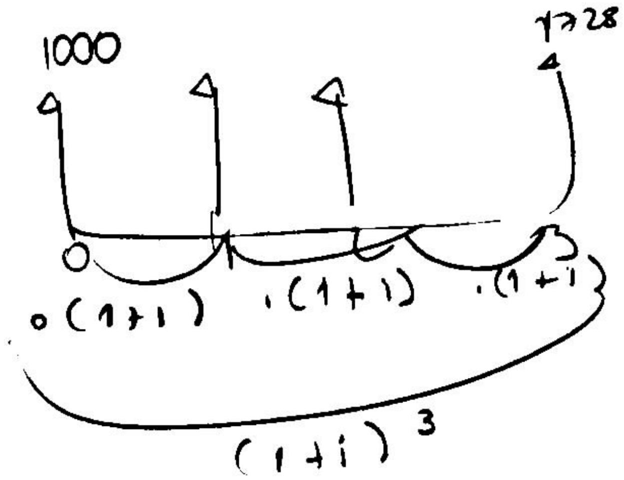


Figura 60 – Resolução incompleta da dupla C

A dupla G errou apenas no final da resolução. Ao realizar a conta 1,2 – 1 encontrou o valor 2,0 no lugar de 0,2 como mostra a figura a seguir.

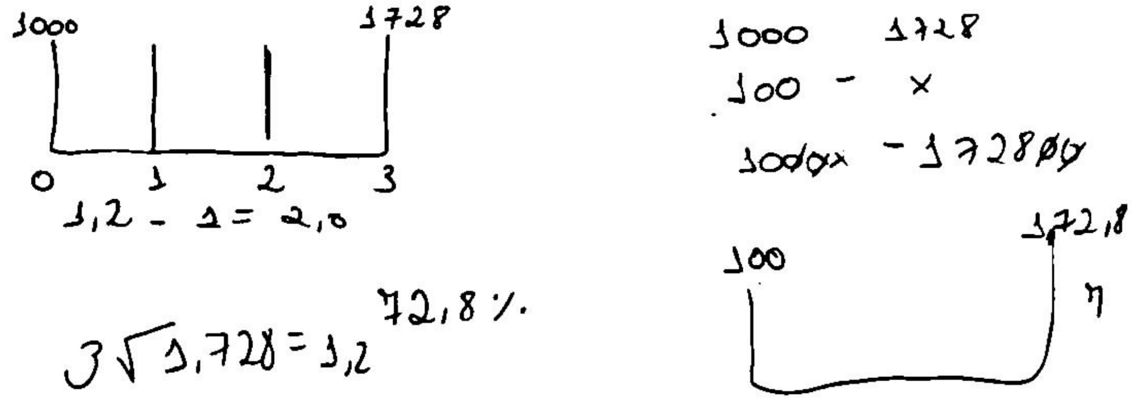


Figura 61 – Resolução incorreta da dupla G

A dupla L errou na resolução da equação. Considerou erroneamente que $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.

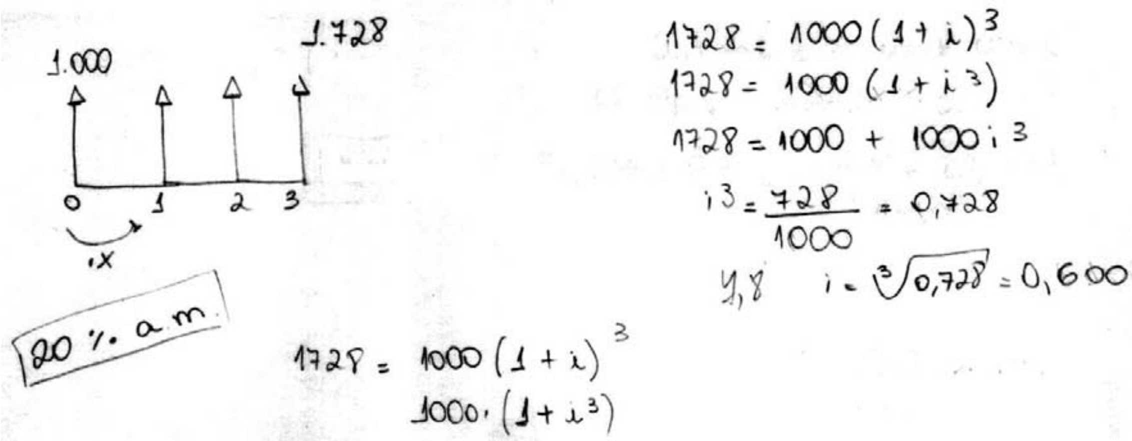


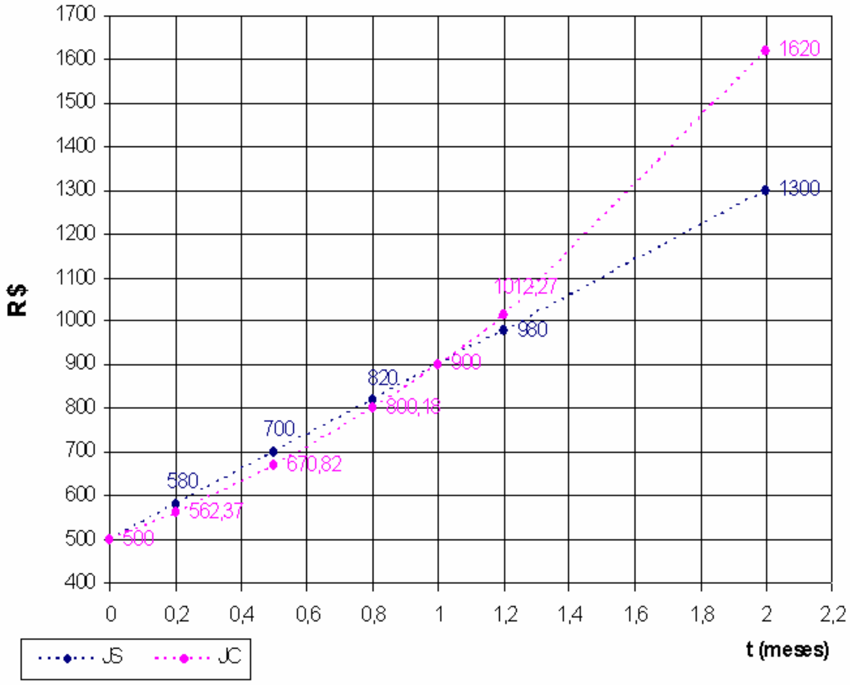
Figura 62 – Resolução incorreta da dupla L

QUESTÃO 6

QUESTÃO 6

(PROJETO FUNDÃO) Comparando Juros Simples e Compostos:

Observe os gráficos abaixo que representam a evolução do dinheiro no tempo em dois regimes diferentes: juros simples (JS) e juros compostos(JC).



Com base nas informações contidas nos gráficos, responda:

a) Qual o valor do capital inicial?
b) Qual o montante após 2 meses no regime de juros simples?
c) O tempo t = 0,2 equivale a quantos dias?
d) Qual o valor de t equivalente a 10 dias?
e) Qual a taxa mensal de juros simples?
f) Qual a taxa mensal de juros compostos?
g) Pode-se afirmar que o montante no regime de juros compostos é sempre maior que o montante no regime de juros simples? Justifique sua resposta.
h) Qual a taxa diária de juros simples?
i) Qual a taxa diária de juros compostos?

Concepção e análise *a priori* da questão 6

Nesta questão, onde procuramos relacionar juro composto com função exponencial, esperávamos o seguinte resultado:

Com base nas informações contidas nos gráficos, responda:
a) Qual o valor do capital inicial?

Resposta: V_0 = ***R$ 500,00****.*

b) Qual o montante após 2 meses no regime de juros simples?

Resposta: V_2 = ***R$ 1.300,00****.*

c) O tempo t = 0,2 equivale a quantos dias?

t = 1 – 30 dias

t = 0,1 – 3 dias

t = 0,2 – **6 dias**

Resposta: t = 0,2 equivale a ***6 dias****.*

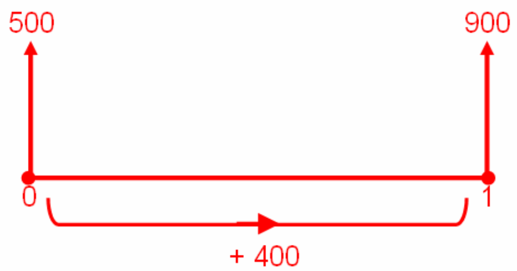
d) Qual o valor de t equivalente a 10 dias

t = 1 – 30 dias

$t = \frac{1}{3}$ – 10 dias

Resposta: O valor de t que equivale a 10 dias é ***1/3 do mês****.*

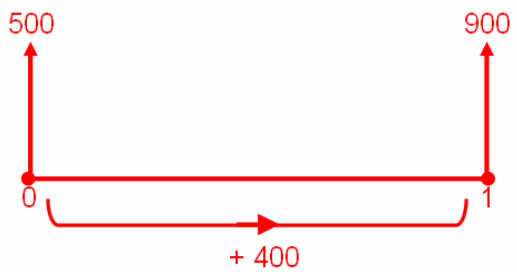
e) Qual a taxa mensal de juros simples?



$\mathbf{i} = \frac{400}{500}$ ou 0,8 ou 80%

Resposta: A taxa mensal de juro simples é ***80%****.*

f) Qual a taxa mensal de juros compostos?



$\mathbf{i} = \frac{400}{500}$ ou 0,8 ou 80%

Resposta: A taxa mensal de juro compostos é ***80%****.*

g) Pode-se afirmar que o montante no regime de juros compostos é sempre maior que o montante no regime de juros simples? Justifique sua resposta?

*Resposta: **Não**, pelo gráfico podemos observar que isto só ocorre para $t > 1$. Para $0 < t < 1$ o montante no juros simples será maior.*

h) Qual a taxa diária de juros simples?

Já vimos que a taxa mensal é 80% $\Rightarrow$ *Taxa diária = 80% ÷ 30 = 2,67%*

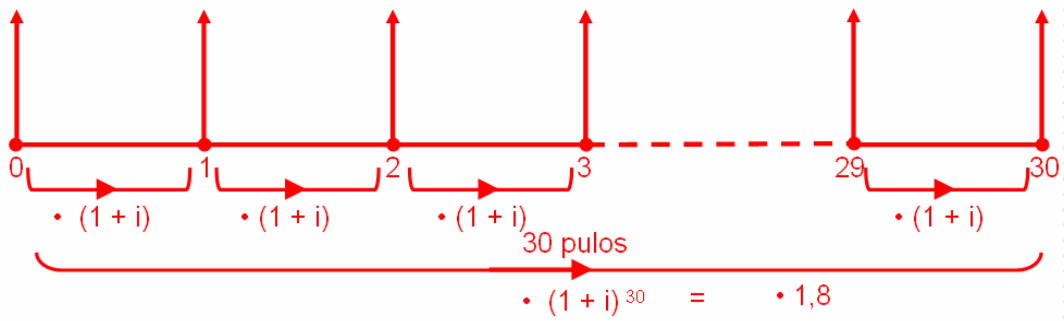
*Resposta: A taxa diária de juros simples é **2,67%**.*

i) Qual a taxa diária de juros compostos?

Já vimos que a taxa mensal é 80%

fator de aumento (mensal) = 100% + 80% = 180% = 1,8

Seja (1 + i) o fator de aumento diário



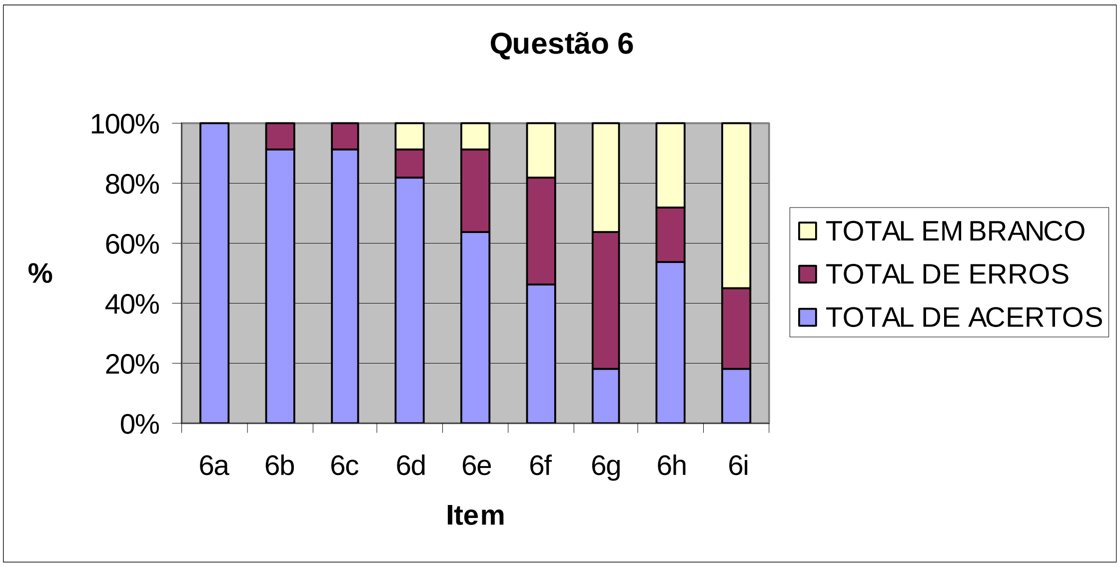
Observando o eixo das setas, temos :

$(1 + i)^{30} = 1,8$ $\Rightarrow$ $1 + i = \sqrt[30]{1,8}$ $\Rightarrow$ $1 + i = 1,0198$

$\Rightarrow$ $i = 0,0198$ *ou* ***1,98%***

*Resposta: A taxa diária de juros compostos é **1,98%**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 6



Todas as duplas acertaram o item 6a. No item 6b, 10 duplas acertaram e uma dupla (a dupla D) errou, ao colocar como resposta 800. No item 6c, apenas a dupla A errou, pois respondeu 6 + 30/s, ao invés de 6 dias. No item 6d, apenas a dupla E errou, pois respondeu 0,356, no lugar de $\frac{1}{3}$. No item 6e, 7 duplas acertaram, uma dupla (a dupla H) deixou em branco e 3 duplas (C, D e E) erraram, mas não deixaram os cálculos, não sendo possível fazer uma análise dos erros. No item 6f, 5 duplas acertaram, duas duplas (G e H) deixaram em branco e 4 duplas (C, D, I e J) erraram, as duplas I e J cometeram o mesmo erro: escreveram a equação $500.x^2 = 900$ no lugar de $500.x^2 = 1620$. Já as duplas C e D não deixaram os cálculos.

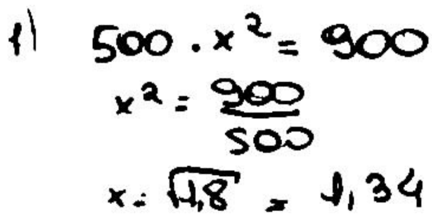


Figura 63 – Resolução incorreta da dupla J no item 6f

No item 6g, 2 duplas (A e F) acertaram, 4 duplas (C, D, G e H) deixaram em branco e 5 duplas (B, E, I, J e L) erraram, as duplas B e E responderam que sim e as duplas I, J e L responderam corretamente que não, mas não justificaram a resposta. No item 6h, 6 duplas acertaram, 3 duplas (A, C e H) deixaram em branco e 2 duplas (D e G) erraram, mas não deixaram os cálculos. No item 6i, 2 duplas (B e F) acertaram, 6 duplas (A, C, D, G, H e L) deixaram em branco e 3 duplas (E, I e J) erraram, mas não deixaram os cálculos, sendo que as duplas I e J encontraram a mesma resposta errada 1,13%.

Conclusão dessa sessão:

A principal dificuldade observada foi a utilização de estratégias de resolução de problemas de juros simples na resolução dos problemas de juros compostos, por parte de alguns alunos.

A relação entre Juros Compostos, PG e Função Exponencial foi explorada na questão 2 do dever de casa (Anexo 8).

4.10 Quinta sessão: o valor do dinheiro no tempo

O objetivo da Matemática Financeira é estudar a evolução do dinheiro no tempo. Nesta sessão utilizamos os conhecimentos adquiridos nas outras sessões para trabalhar problemas do dia-a-dia, como escolher a melhor maneira de efetuar compras, ou pagar contas. Para resolver os problemas, o aluno deve ter formado a idéia que o valor do dinheiro não é absoluto, que depende da época em que é usado, isto é, que evolui com o tempo. Esperamos que o aluno perceba que o cálculo do valor futuro representa o próprio processo de capitalização enquanto o cálculo do valor presente é um procedimento de regressão, inverso da capitalização, e que consiga resolver as questões que necessitam desses conceitos.

4.10.1 Concepção e análise *a priori* da sessão 5

Os alunos receberam um bloco de atividades contendo 5 questões para serem resolvidas em sala de aula, além de explicações sobre valor futuro, valor atual, erros comuns na matemática financeira e taxa de atratividade. As explicações foram feitas com o auxílio do data-show antes da realização das questões, que foram elaboradas buscando explorar problemas práticos dos cidadãos.

Variáveis micro-didáticas:

- Utilização do eixo das setas como ferramenta para resolver problemas do dia-a-dia;
- utilização dos conceitos trabalhados nas sessões anteriores para resolver problemas práticos.

As resolver as questões propostas nesta sessão é possível que surjam as seguintes situações:

- o aluno não consiga entender o que se pede na atividade por questões de interpretação de texto;
- o aluno não consiga fazer a transcrição das variáveis do problema para o eixo das setas;

- o aluno confunda o modo como se movimenta o dinheiro no tempo e, para levar o dinheiro para o passado, multiplique por (1 – i) ao invés de dividir por (1 + i);
- o aluno some quantias em datas diferentes;
- o aluno compare quantias em datas diferentes;
- o aluno não consiga criar uma solução para o problema, mesmo tendo feito corretamente o eixo das setas.

4.10.2 Experimentação da sessão 5

A aplicação da quinta sessão ocorreu nos dias 25 de setembro das 8h50 às 10h50 com 20 minutos de intervalo para o recreio e nos dia 26 de setembro e 2 de outubro de 2008 das 10h50 às 12h30 sem intervalo.

Durante a aplicação das atividades não houve interferência na resolução dos alunos, a única instrução dada foi que buscassem um caminho para resolver as questões evitando deixá-las em branco.

No dia 25 de setembro os alunos A1 e H2 faltaram.

4.10.3 Análise *a posteriori* e validação da sessão 5

A análise *a posteriori* desta sessão assentou-se sobre:

- as respostas dadas pelos alunos às questões propostas na atividade;
- os relatórios preenchidos pelos observadores, auxiliados por gravação em áudio;

Inicialmente, para proporcionar uma visão geral, apresentamos um gráfico relacionando cada questão com sua porcentagem de acertos (universo de 11 duplas). Em seguida, apresentamos um gráfico relacionando cada dupla com sua porcentagem de acertos em todas as questões da 5ª sessão.

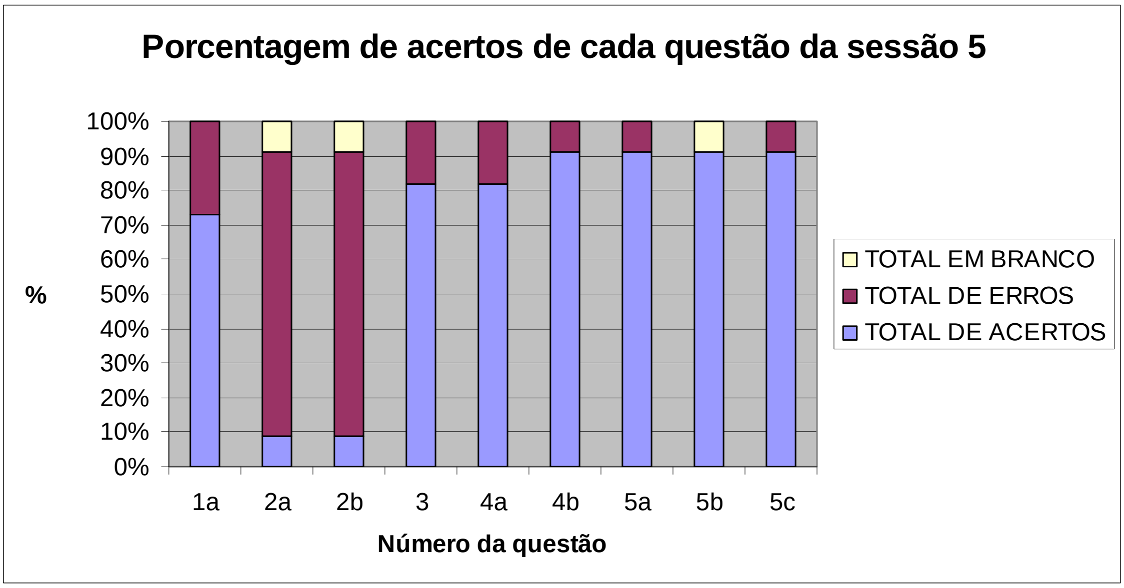


Figura 64 – Porcentagem de acertos de cada questão da sessão 5

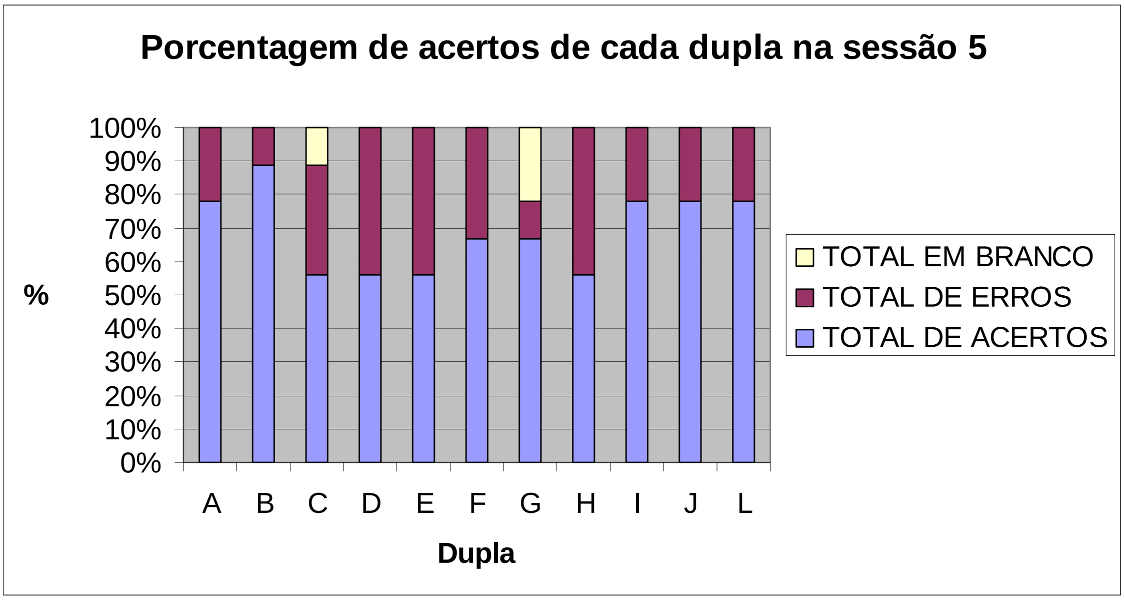


Figura 65 – Porcentagem de acertos de cada dupla na sessão 5

Para facilitar a leitura e evitar o acesso constante aos anexos deste trabalho, apresentaremos um recorte de cada questão seguida por sua discussão.

QUESTÃO 1

QUESTÃO 1

Andressa usou R$ 500,00 do cheque especial, mesmo possuindo R$ 2.000,00 aplicados na poupança. Ao tomar esta atitude Andressa não percebeu que o banco estava lhe emprestando o dinheiro que já era dela e, ainda por cima estava cobrando juros por isso! Ela preferiu pagar juros de 10% a.m. no cheque especial para não perder o juro de 1% a.m. da caderneta de poupança.

a) Em um mês, quanto Andressa teria economizado se houvesse retirado o dinheiro da caderneta de poupança ao invés de usar o especial?

b) Pesquise o valor das taxas citadas no texto e verifique se o problema é realista.

Concepção e análise *a priori* da questão 1

Pretendemos nessa questão chamar a atenção de como as pessoas, sem se darem conta, fazem negócios ruins, por desinformação. No livro A regra do jogo, Veiga (2007, pp.23, 24 e 30) diz:

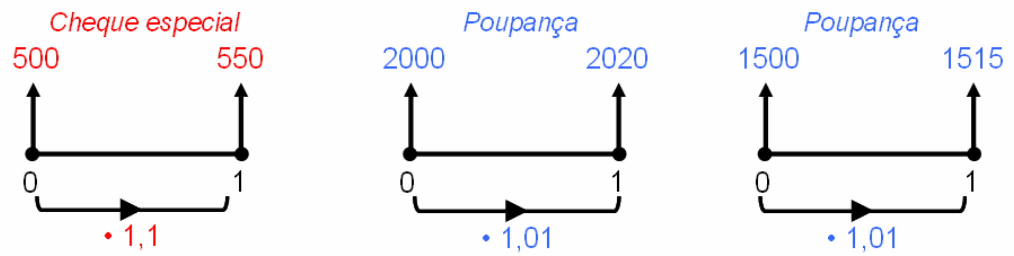
> *"Mesmo tendo dinheiro aplicado, quando a conta bancária fica no vermelho, a maioria das pessoas não tira da aplicação para cobrir o buraco. Preferem pagar 10% no cheque especial para não perder 1% de rendimento de sua aplicação na caderneta de poupança... Ao ter esse comportamento, a pessoa sequer percebe que o banco empresta para ela o dinheiro que já é dela e, ainda por cima, cobra juros por isso... Que o banco em que pega dinheiro emprestado a taxas altíssimas é o mesmo que empresta com taxas muito baixas."*

Apresentamos a seguir um modelo esperado de resposta:

1. Andressa usou R$ 500,00 do cheque especial, mesmo possuindo R$ 2.000,00 aplicados na poupança. Ao tomar esta atitude Andressa não percebeu que o banco estava lhe emprestando o dinheiro que já era dela e, ainda por cima estava cobrando juros por isso! Ela preferiu pagar juros de 10% a.m. no cheque especial para não perder o juro de 1% a.m. da caderneta de poupança.

a) Em um mês, quanto Andressa teria economizado se houvesse retirado o dinheiro da caderneta de poupança ao invés de usar o especial?

Resolução:



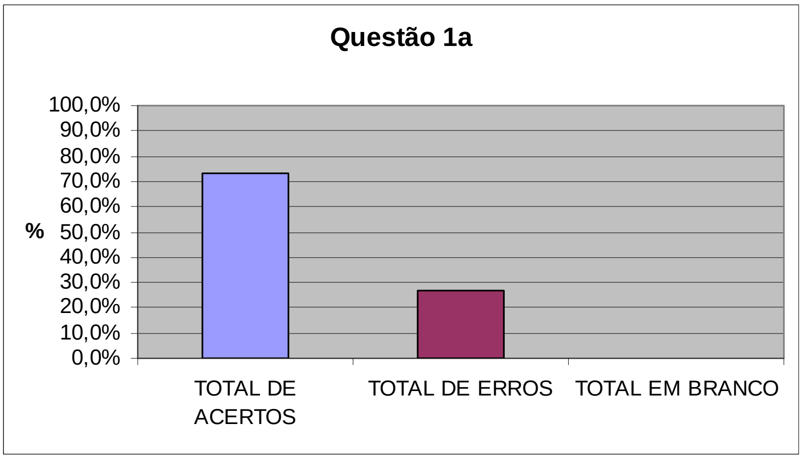
Vamos calcular o saldo total de Andressa na data 1, em ambas as situações:

Sem retirada da poupança, o saldo total dela na data 1 será: **2020 – 550 = 1470**

Com retirada da poupança, o saldo total dela na data 1 será: **1515**

Andressa teria economizado em um mês: 1515 – 1470 = **R$ 45,00**

Análise *a posteriori* e validação da questão 1



Três duplas erraram esta questão. A dupla H não fez o eixo das setas nem concluiu seu raciocínio. As duplas D e F subtraíram quantias em datas diferentes, pois levaram o valor do cheque especial para a data 1 mas não fizeram o mesmo com os R$ 2.000,00 da poupança, como mostra a figura a seguir:

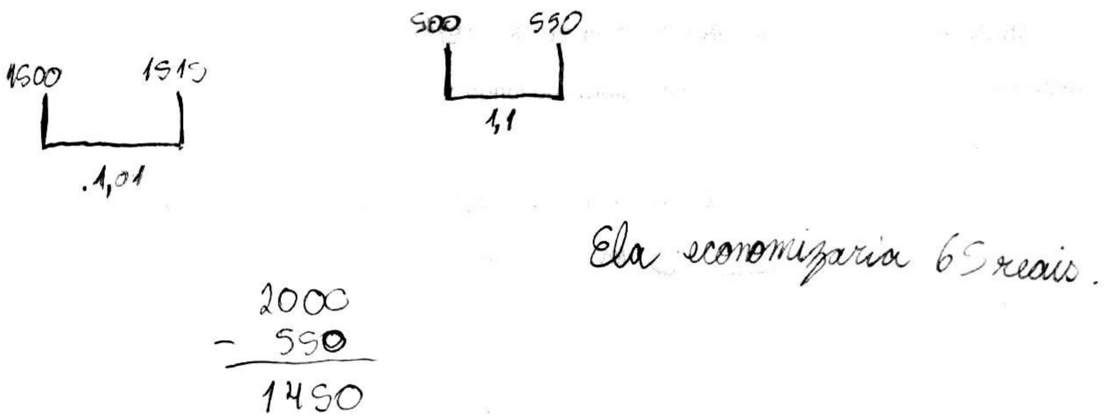


Figura 66 – Resolução incorreta da dupla D

A dupla E resolveu o problema de uma forma mais rápida e simples, como mostra a figura a seguir:

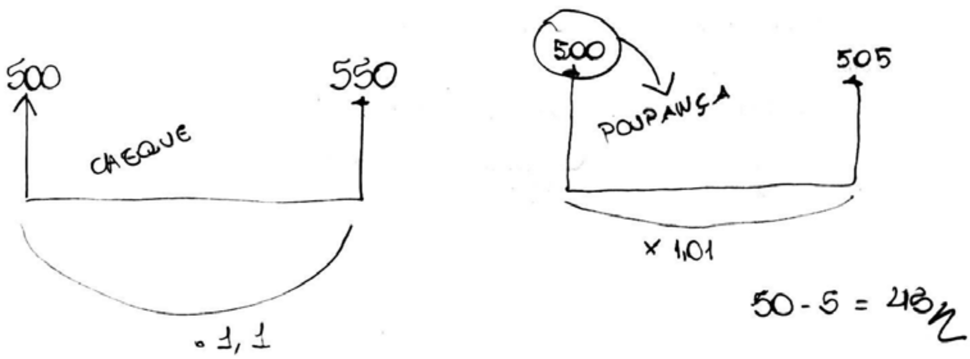


Figura 67 – Resolução correta da dupla E

QUESTÃO 2

QUESTÃO 2

Na hora de comprar um eletrodoméstico a prazo, Lucas só se preocupou em saber se a prestação cabia ou não em seu bolso. O que ele não imaginava é que a loja, mesmo na venda a prazo, recebe à vista da financeira.

Ao vender a prazo para Lucas, a loja receberá da financeira R$ 500,00 à vista e a financeira se encarregará de cobrar as 2 prestações de **x** reais, com juros de 10% ao mês, vencendo a primeira prestação no ato da compra. Responda:

a) Qual o valor de **x**?

b) Se a loja tem por hábito lograr o cliente anunciando "compre à vista ou em 2 vezes **sem juros**", com quais valores deve anunciar o eletrodoméstico comprado por Lucas?

Concepção e análise *a priori* da questão 2

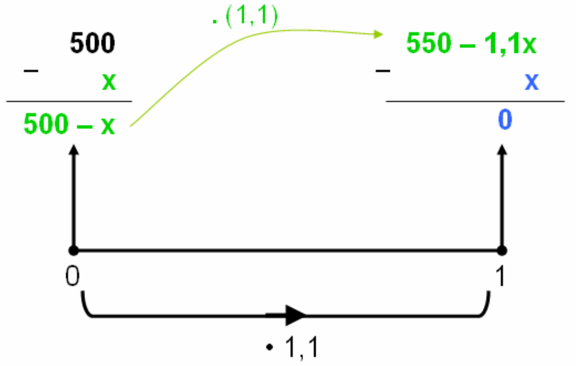
Segundo Veiga, no livro A regra do jogo (2007, pp.20 e 21):

> *"Na hora de comprar móveis e eletrodomésticos a prazo, a pessoa só se preocupa em saber se a prestação cabe ou não no seu orçamento. O que nem imagina é que a loja, mesmo vendendo a prazo, recebe à vista da financeira ou do banco... Ao comprar a prazo, a pessoa alimenta dois negócios diferentes: um é a compra e a venda de mercadorias feitas pela loja e o outro, muito mais lucrativo é o ganho com os juros que a financeira, associada à loja, cobra de quem comprou em prestações. Se, pelo contrário, o indivíduo fizer a melhor negociação para comprar à vista conseguindo tirar os juros embutidos no preço, terá um grande benefício. Por exemplo, toda vez que uma loja anunciar: R$ 500,00 à vista ou em 10 parcelas mensais e iguais de R$ 50,00, "sem juros", o que realmente deseja é que o consumidor pague as 10 prestações de R$ 50,00. Obviamente, os juros já estavam embutidos nos R$ 500,00... Ao vender a prazo para o cliente, a loja receberá da financeira, digamos, R$ 400,00 à vista e a financeira ficará responsável por cobrar as 10 parcelas de R$ 50,00. Para a loja, mais importante que vender a mercadoria é vendê-la em vezes, para que tanto ela como a financeira ganhem."*

Esperávamos que o aluno chegasse ao seguinte resultado:

a) Qual o valor de **x**?

Resolução:



Observando o eixo das setas, temos :

$550 - 1{,}1x - x = 0$

$550 = 1{,}1x + x$

$550 = 2{,}1x$

$\frac{550}{2{,}1} = x$

$261{,}90 = x$

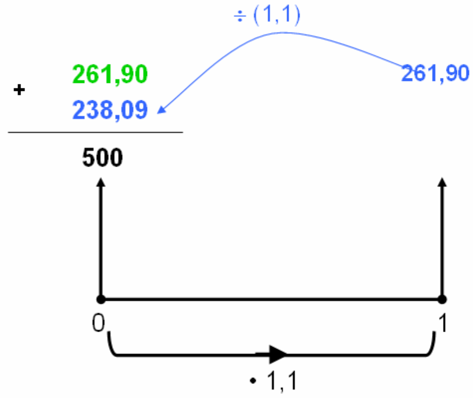
*Resposta: O valor de x é **R$ 261,90**.*

b) Se a loja tem por hábito lograr o cliente anunciando "compre à vista ou em 2 vezes **sem juros**", com quais valores deve anunciar o eletrodoméstico comprado por Lucas

Resolução:

2 . 261,90 = 523,80

*Note que se a financeira anunciar: "**Compre à vista por R$ 523,80 ou em 2 vezes sem juros de R$ 261,90 cada"** não estará lucrando nada, pois duas prestações de R$ 261,90 com juros de 10% equivalem a R$ 500,00 à vista. Veja:*

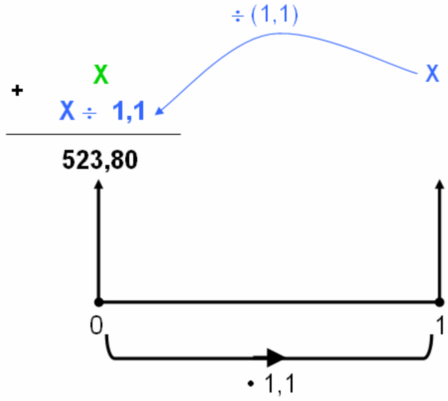


Se o valor da prestação for R$ 261,90 a financeira pagará R$ 500,00 à loja e não irá lucrar nada.

Já sabemos que a financeira quer lucrar:

523,80 – 500,00 = R$ 23,80

Precisamos então calcular o valor da prestação para que alcance este lucro.



Observando o eixo das setas, temos :

$$x + \frac{x}{1{,}1} = 523{,}80 \quad \cdot 1{,}1$$

$$1{,}1x + x = 576{,}18$$

$$2{,}1x = 576{,}18$$

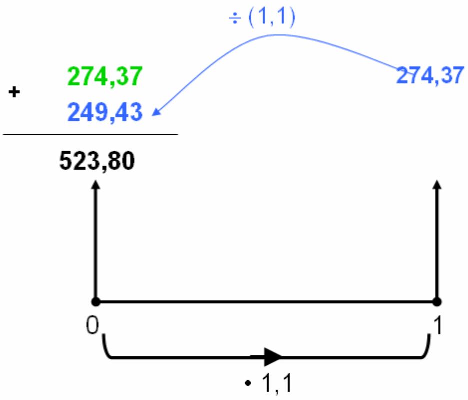
$$x = \frac{576{,}18}{2{,}1}$$

$$\mathbf{x = 274{,}37}$$

Vamos verificar se a resposta está correta.

Sabemos que a financeira quer lucrar R$ 23,80. Logo as duas prestações de R$ 274,37 com juros de 10% devem equivaler a R$ 523,80 à vista.

OK

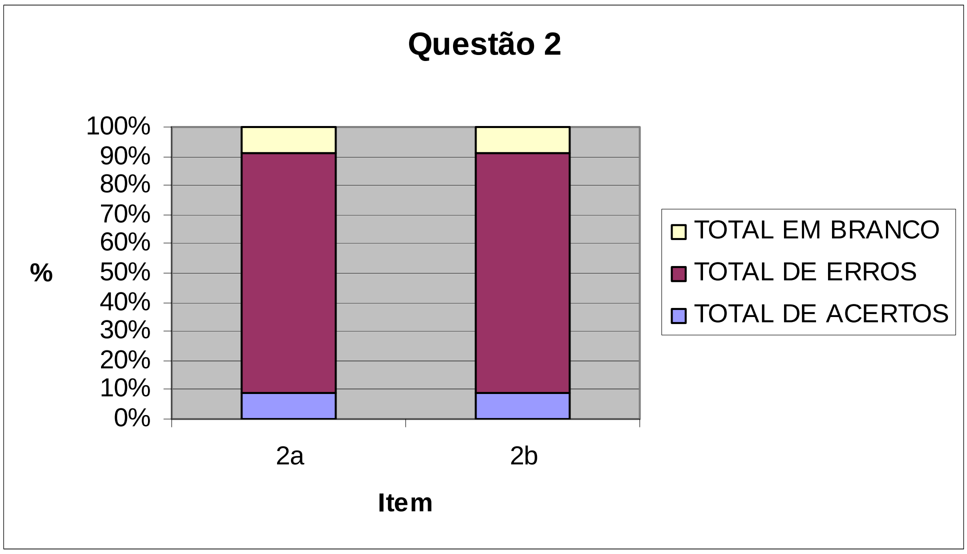


2 . 274,37 = 548,74

Resposta:

*"**Compre à vista por R$ 548,74 ou em 2 vezes sem juros de R$ 274,37 cada"**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 2



Apenas uma dupla acertou o item a. A maioria das duplas errou este item, pois somou quantias em datas diferentes, encontrando como resposta R$ 250,00 ou R$ 262,50, conforme ilustra a figura a seguir.

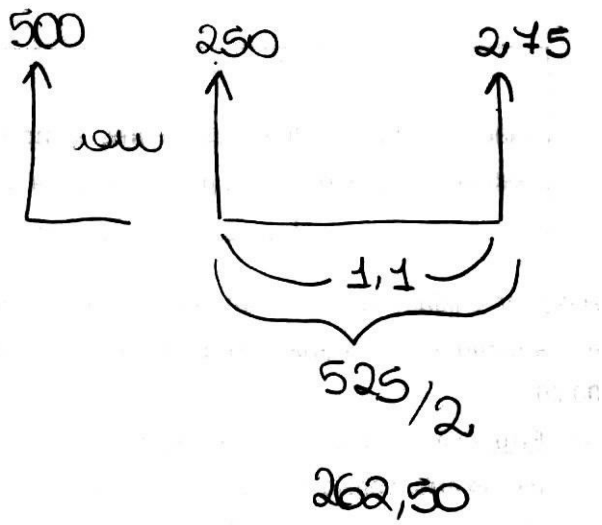


Figura 68 – Resolução incorreta da dupla E

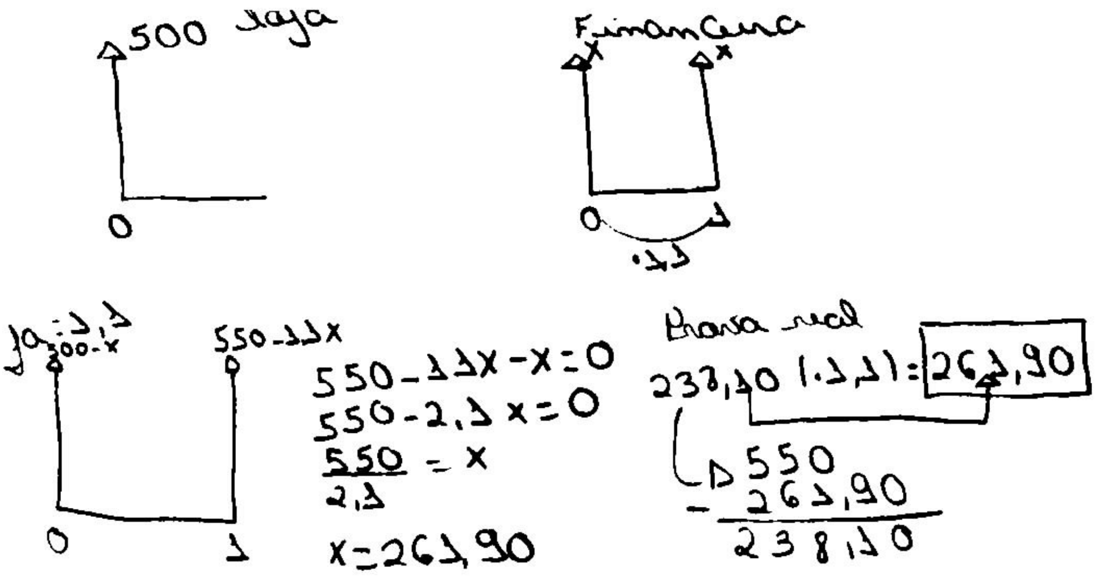


Figura 69 – Resolução correta da dupla L

No item b, apenas a dupla B acertou. O motivo dos erros neste item foi o mesmo do item a, somar valores em datas diferentes, como mostra a figura a seguir:

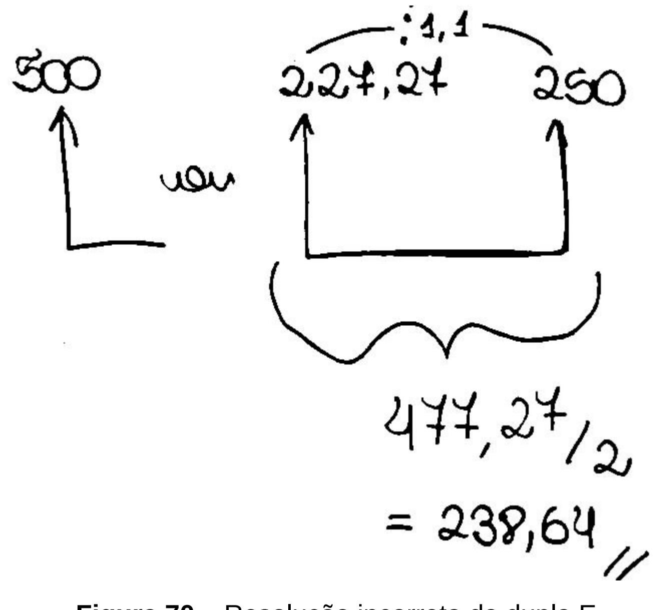


Figura 70 – Resolução incorreta da dupla E

QUESTÃO 3

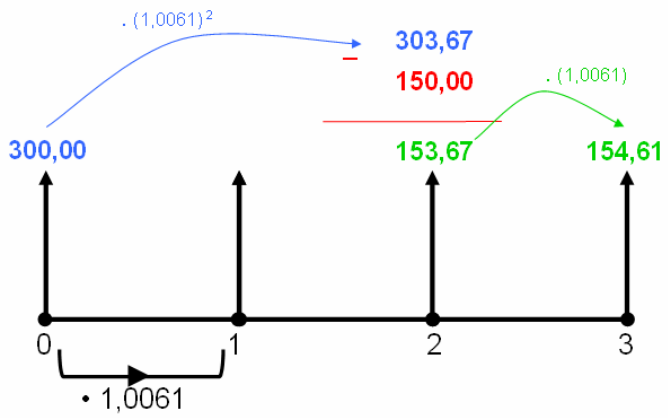
QUESTÃO 3
Augusto aplicou R$ 300,00 a juros mensais de 0,61% na Caderneta de Poupança. Dois meses depois, Augusto retirou R$ 150,00 e, um mês após encerrou a aplicação. Qual o valor dessa última retirada, supondo que houve rendimento em todos os meses, inclusive no mês da primeira retirada?

Concepção e análise *a priori* da questão 3

Pretendíamos que nesta questão o aluno exercitasse o objetivo da matemática financeira, que é estudar a evolução do dinheiro ao longo do tempo. Existem várias maneiras de resolver este problema, dependendo das datas para onde o dinheiro será movido, sempre tomando o cuidado de não somar nem comparar quantias em datas diferentes. Apresentamos a seguir um modelo esperado de resposta, onde o aluno leva o valor aplicado para a data da retirada, desconta R$ 150,00 e leva o valor que sobrou para a data três.

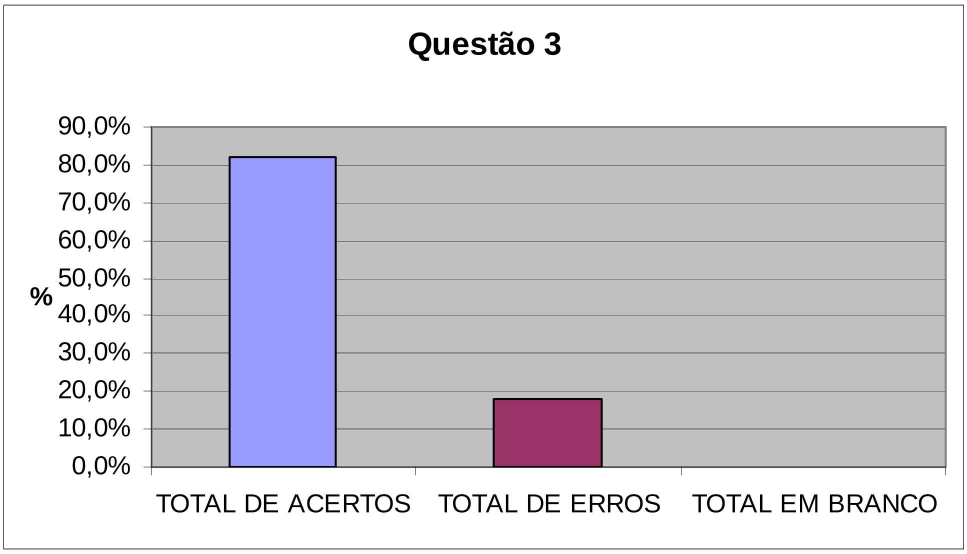
3. Augusto aplicou R$ 300,00 a juros mensais de 0,61% na Caderneta de Poupança. Dois meses depois, Augusto retirou R$ 150,00 e, um mês após encerrou a aplicação. Qual o valor dessa última retirada, supondo que houve rendimento em todos os meses, inclusive no mês da primeira retirada?

Resolução:



*Resposta: O valor da última retirada é **R$ 154,61**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 3



Duas duplas erraram esta questão. A dupla G fez o eixo das setas, mas não concluiu seu raciocínio. A dupla H errou o fator de aumento usando 1,061 no lugar de 1,0061 além de não concluir seu raciocínio.

QUESTÃO 4

QUESTÃO 4

A rede de lojas PontoCom oferece duas opções de pagamento na compra de uma televisão: três parcelas mensais de R$ 180,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 100,00 cada, ambas com entrada. Louise pretende adquirir o aparelho. Qual a sua melhor opção se ela aplica o seu dinheiro à taxa de 5% ao mês? E se a taxa for de 10% ao mês?

Observação:

Neste exercício é preciso introduzir o conceito de **taxa mínima de atratividade**, *bastante utilizado em análise de investimentos. É assim definida porque um investimento só é atrativo se render, no mínimo, esta taxa. Também é conhecida como* **taxa mínima de retorno**.

É a melhor taxa de rendimento de capital que uma pessoa (física ou jurídica) obtém ao realizar uma operação. Por exemplo: Louise obtém 5% a.m. em suas aplicações financeiras com um determinado agente bancário. Se um segundo operador oferece uma taxa mensal de 4% com certeza Louise recusará. Nesse exercício a taxa mínima de atratividade para Louise é de 5% a.m. Qualquer taxa inferior a esta não é atraente. As taxas que oferecem atratividade para Louise são iguais ou superiores a 5% a.m.

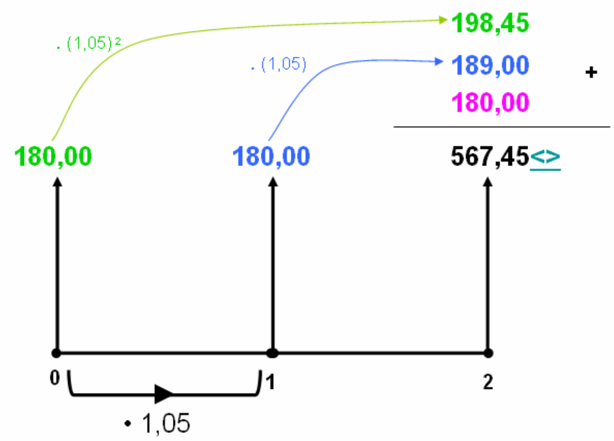
A taxa mínima de atratividade pode variar de pessoas para pessoa, de empresa para empresa, etc.

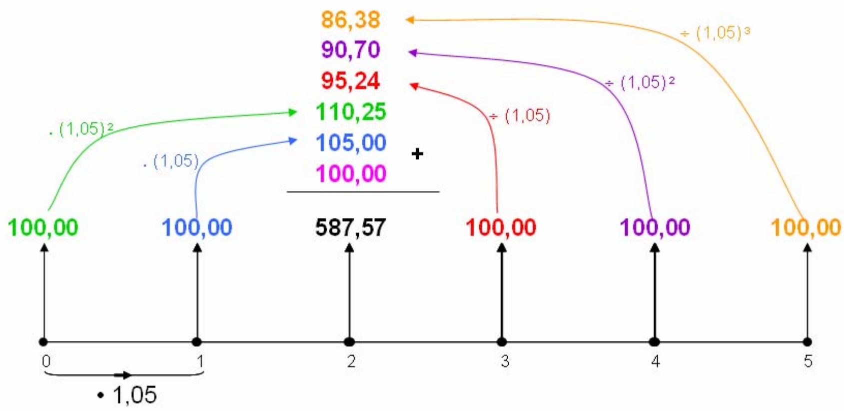
Concepção e análise *a priori* da questão 4

Além de exercitar a movimentação do dinheiro no tempo, pretendíamos nesta questão chamar a atenção que a melhor opção de compra para uma pessoa pode não ser a melhor opção para outra pessoa. A melhor opção depende da taxa com que cada um consegue fazer render o seu capital.

4. A rede de lojas PontoCom oferece duas opções de pagamento na compra de uma televisão: três parcelas mensais de R$ 180,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 100,00 cada, ambas com entrada. Louise pretende adquirir o aparelho. Qual a sua melhor opção se ela aplica o seu dinheiro à taxa de 5% ao mês?->

Resolução:

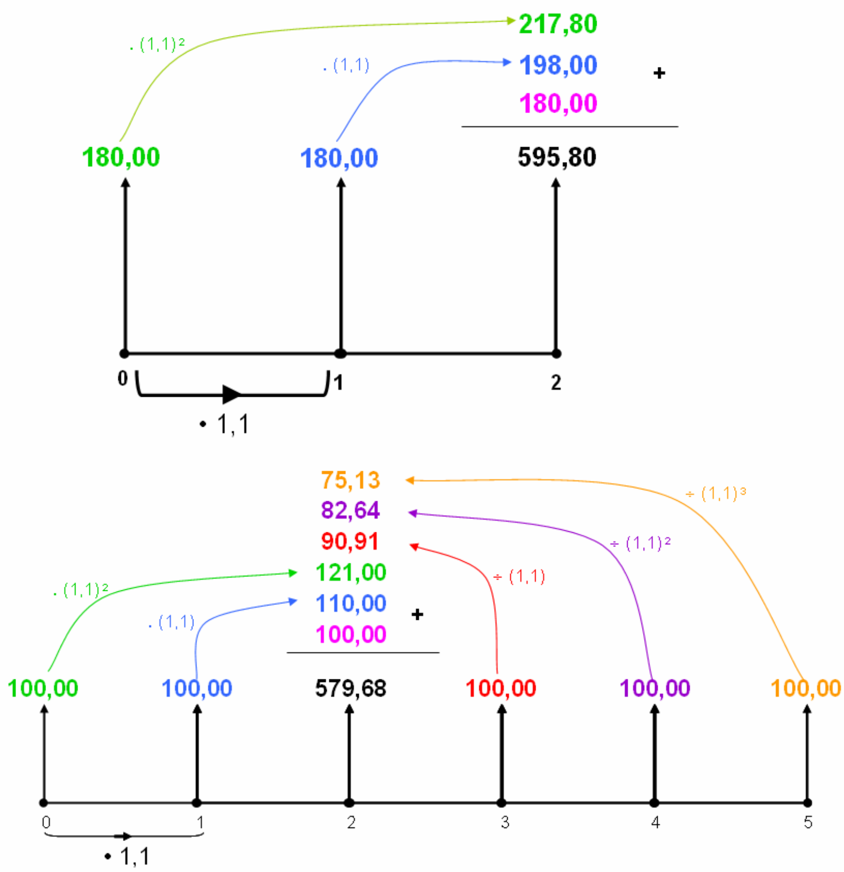




*Resposta: A melhor opção é a de **três prestações de R$ 180,00**.*

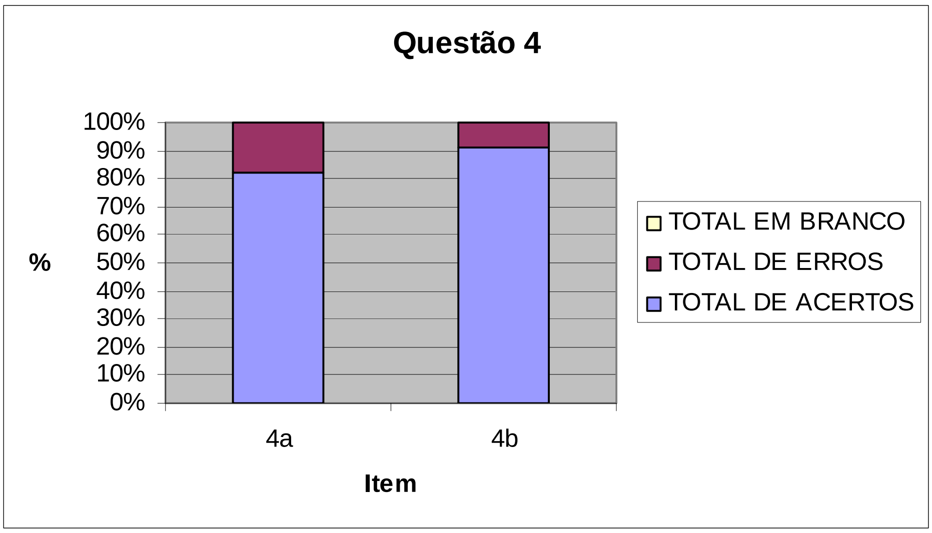
E se a taxa for de 10% ao mês?

Resolução:



*Resposta: A melhor opção é a de **seis prestações de R$ 100,00**.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 4



Duas duplas erraram o item a. A dupla D levou as parcelas de R$ 180,00 para a data 1 e as parcelas de R$ 100,00 para a data 2, cometendo o erro de comparar quantias em datas diferentes, como mostra a figura a seguir:

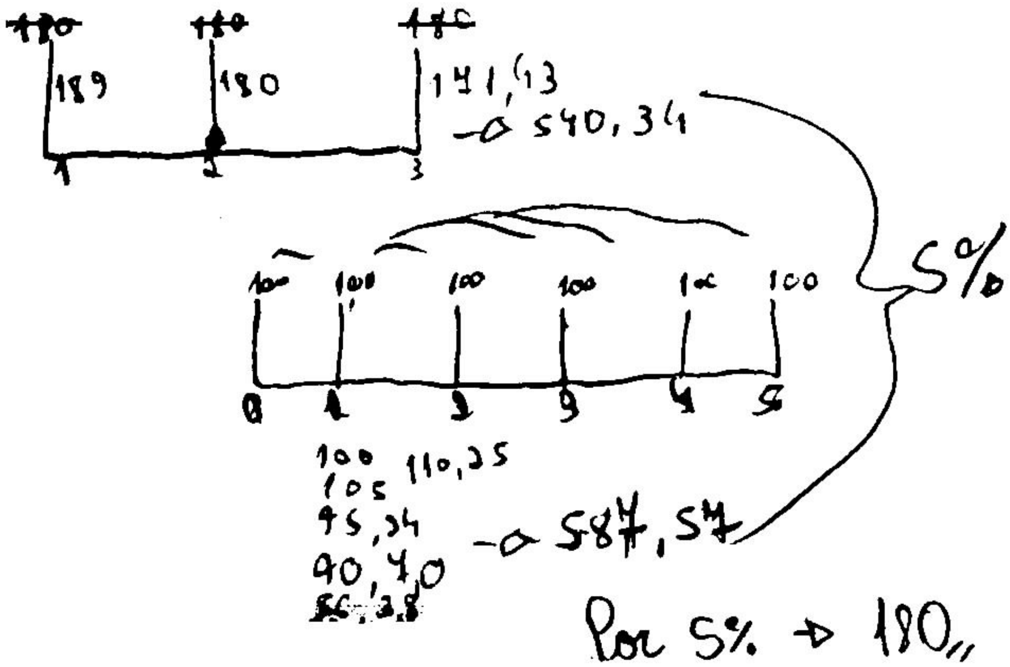


Figura 71 – Resolução incorreta da dupla D

Já a dupla L acrescentou uma parcela de R$ 100,00 somando 7 prestações no lugar de 6, conforme ilustra a figura a seguir:

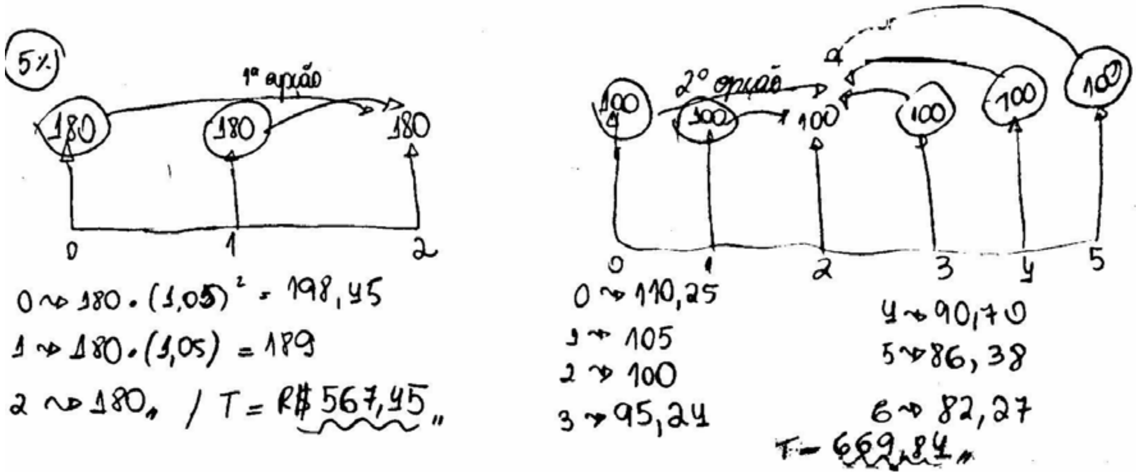


Figura 72 – Resolução incorreta da dupla L

Apenas a dupla E errou o item b, pois levou as parcelas de R$ 180,00 para a data 1 e as parcelas de R$ 100,00 para a data 2, cometendo o mesmo erro da dupla D no item anterior, comparando quantias em datas diferentes, como ilustra a figura a seguir:

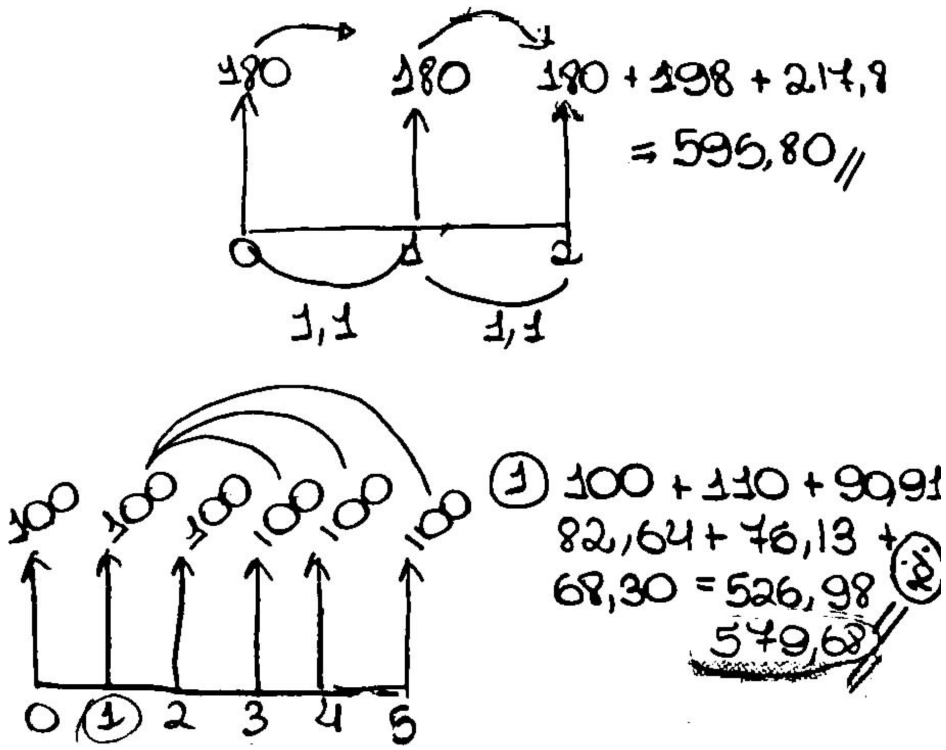


Figura 73 – Resolução incorreta da dupla E

QUESTÃO 5

QUESTÃO 5

(PROJETO FUNDÃO) A diretora da escola juntou dinheiro para comprar um computador. Comparando os preços de mercado, encontrou a seguinte oferta numa loja:

Computador: R$ 1 800,00 à vista
ou em
3 x iguais sem juros (entrada + 2)

A diretora pediu um desconto para o pagamento à vista, mas o vendedor respondeu que o preço a prazo sem juros era igual ao preço à vista e, portanto, não era possível dar desconto.

a) Considerando que o dinheiro pode render 4% ao mês, qual seria o preço justo para o pagamento à vista?
b) Qual é a porcentagem referente a esse desconto?
c) Se o número de prestações for maior, o desconto para a compra à vista deve ser maior, menor ou o mesmo?

Concepção e análise *a priori* da questão 5

No livro A regra do jogo, Veiga (2007, pp. 36, 37 e 38) comenta:

> *"Contando com a falta de conhecimento financeiro do seu público-alvo, as empresas acostumaram-se a anunciar seus produtos enfatizando apenas a parte da verdade que fará com que o indivíduo vá até a loja e compre o bem anunciado... Atualmente o exemplo clássico é dado pelo bordão utilizado por grande parte do comércio varejista de móveis, eletrodomésticos, roupas, passagens aéreas etc. Eis a isca: Compre à vista ou em 3 vezes sem juros... Você realmente acha que é sem juros? É absolutamente impossível alguém financiar um bem ou serviço sem juros. Naturalmente, governos ou instituições ligadas a eles podem ofertar juro zero considerando programas sociais. No entanto, empresas que visem lucro não oferecem dinheiro a juro zero... Anunciar juro zero é contar com a cegueira do consumidor, que o impede de ver as condições gerais do financiamento. Ele só se importa com o valor das prestações... Ao enfatizar o financiamento a juros zero, aloja não menciona que eles já estão embutidos no preço à vista do bem. Como boa parte do ganho está no juros, a loja tem interesse zero em conceder desconto à vista... A loja afirma que o financiamento é sem juros para que você compre a prazo e ela ganhe dinheiro com juros embutidos no preço. Você sabia que a venda a prazo traz mais dinheiro para a loja que a venda à vista mediante desconto? Você sabia que ao vender um automóvel à prestação, a loja de carro recebe à vista da financeira? Você sabia que ao comprar carro financiado, o vendedor da loja e a própria loja recebem uma gorda comissão pela venda financiada? Alguém tem de pagar por essas comissões e esse alguém é você. As financeiras têm, inclusive, uma tabela de retorno. Quanto mais alta for a taxa de juros que o vendedor da loja conseguir aplicar no cliente, maior será a comissão do vendedor e da própria loja... Qual é a saída? Evite cair em financiamentos para suas compras, procurando juntar o dinheiro até conseguir comprar o bem à vista."*

Por qual preço? Quanto se deve pedir de desconto para a compra à vista de um computador, por exemplo? É este cálculo que esperamos que o aluno seja capaz de realizar neste exercício, chegando ao seguinte resultado:

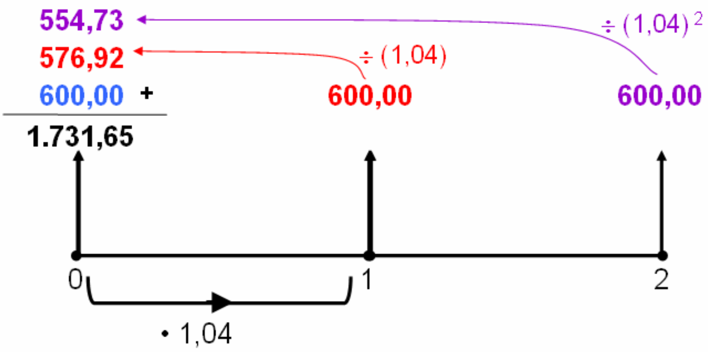
5. (PROJETO FUNDÃO) A diretora da escola juntou dinheiro para comprar um computador. Comparando os preços de mercado, encontrou a seguinte oferta numa loja:

Computador: R$ 1 800,00 à vista ou em 3 x iguais sem juros (entrada + 2)

A diretora pediu um desconto para o pagamento à vista, mas o vendedor respondeu que o preço a prazo sem juros era igual ao preço à vista e, portanto, não era possível dar desconto.

a) Considerando que o dinheiro pode render 4% ao mês, qual seria o preço justo para o pagamento à vista?

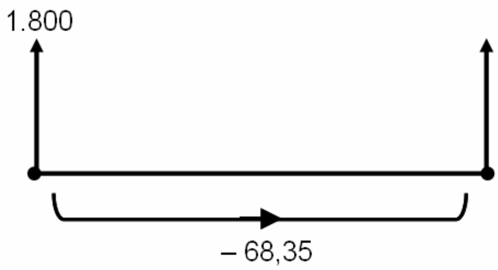
Resolução:



*Resposta: O preço justo para o pagamento à vista seria de **R$ 1.731,65**.*

b) Qual é a porcentagem referente a esse desconto?

Resolução:



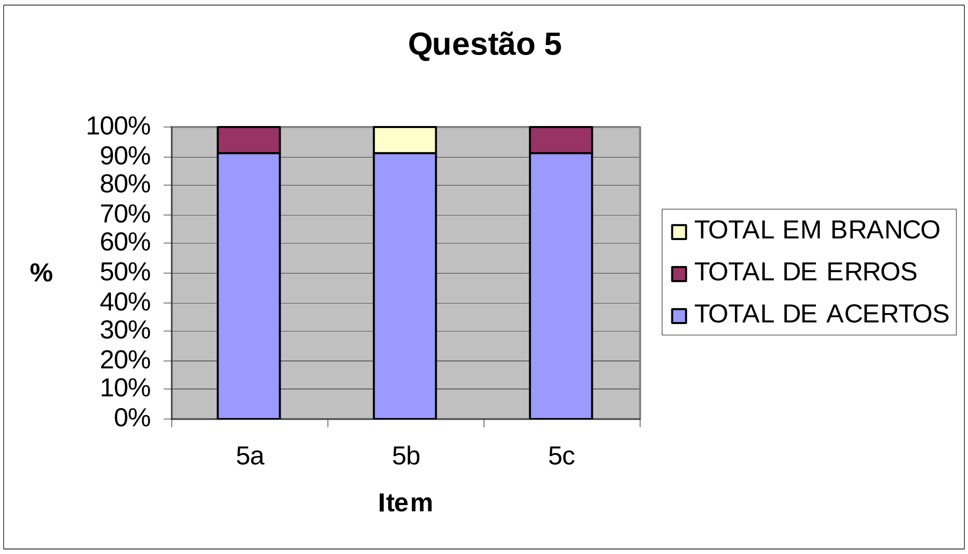
$$\mathbf{i} = \frac{68{,}35}{1.800} = 0{,}038 \quad \text{ou } 3{,}8\%$$

*Resposta: A porcentagem referente a esse desconto é **3,8%**.*

c) Se o número de prestações for maior, o desconto para a compra à vista deve ser maior, menor ou o mesmo?

*Resposta: **Maior**, pois o dinheiro ficaria mais tempo rendendo juros em alguma aplicação.*

Análise *a posteriori* e validação da questão 5



Apenas a dupla C errou o item a, pois interpretou que as parcelas eram de R$ 1.800,00 e somou-as na data 2, como mostra a figura a seguir:

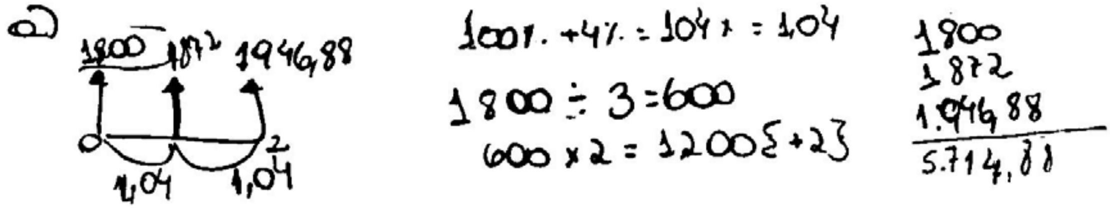


Figura 74 – Resolução incorreta da dupla C

Já o item b apenas a dupla C não fez a questão, deixando-a em branco. No item c, apenas a dupla errou a questão ao responder menor no lugar de maior, mas não justificou a resposta.

Conclusão dessa sessão:

Somar ou comparar quantias em datas diferentes, foi a principal causa dos problemas observados, o que já era esperado conforme indica a análise *a priori* da sessão. Sugerimos que a correção dos problemas seja realizada um a um, isto é, que só se peça ao aluno para fazer uma questão após a correção da questão anterior, e que a cada questão se exponha uma resolução errada para que a turma encontre o erro.

CAPÍTULO 5. CONCLUSÃO

5.1 Análise dos resultados

As pesquisas que recorrem à experimentação em sala de aula, muitas vezes, incluem análises comparativas, para verificar sua validade. Na Engenharia Didática, a validação é essencialmente interna, utilizando como fundamento básico o confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori. Este confronto consiste na investigação daquilo que foi considerado nas hipóteses e que, na prática, sofreu distorções, deixando de ser válido.

Iremos agora comparar as hipóteses com os dados extraídos da realidade. Vale a pena ressaltar que entendemos que o objetivo da engenharia didática é estruturar o ensino, articulando a construção do saber matemático a uma prática investigativa reflexiva. No trabalho com a engenharia didática o professor faz da sua ação pedagógica um objeto de investigação, onde a validação não é um fim em si. A meta não é validar e sim depurar a teoria, pois a seqüência didática inicialmente preparada passará por evoluções decorrentes de sua aplicação e das trocas entre professor e aluno. Desta forma, a engenharia didática pode ser encarada como uma forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática, visando torná-lo "ótimo" após um processo contínuo de reflexão que redireciona e atribui novo significado ao trabalho.

Ao colocarmos à prova as hipóteses, erros ou problemas não previstos podem ocorrer e, neste caso, mesmo que não dê tempo de refazer a seqüência de aulas preparadas, deve-se reconhecê-los, como forma de legitimar o trabalho de pesquisa para outras instâncias.

Durante a experimentação, coletamos e organizamos um material de pesquisa variado, composto pela produção dos alunos, gravação em áudio de duas duplas, debate com os alunos e relatórios preenchidos pelos observadores. Esse acompanhamento foi importante no controle das variáveis da pesquisa, e na etapa de validação. No entanto, as conclusões se basearam na produção escrita de toda a amostra.

Em particular, os observadores gostaram do trabalho desenvolvido e se sentiram acolhidos pela turma. Com certeza, essa experiência contribui muito para a sua formação.

Quanto à viabilidade da seqüência didática enquanto proposta de ensino da matemática financeira, constatamos pelos resultados obtidos na fase de experimentação que as atividades são significativas para uma proposta de ensino-aprendizagem deste assunto.

Entretanto, para que essa proposta atinja seu pleno objetivo, alterações devem ser feitas em alguns exercícios. Tais alterações se encontram na conclusão de cada sessão, no capítulo 4.

Sugerimos ainda que o professor, quando observar um grau elevado de dificuldade dos alunos, reforce o conteúdo com explicações e exercícios para fixação.

Apresentamos a seguir uma tabela com as porcentagens das médias de acertos, erros e questões em branco de cada sessão:

	ACERTOS	ERROS	EM BRANCO
1ª SESSÃO	82,7%	10,9%	6,4%
2ª SESSÃO	83,6%	16,4%	0,0%
3ª SESSÃO	79,2%	17,2%	3,5%
4ª SESSÃO	63,0%	24,6%	12,4%
5ª SESSÃO	69,0%	28,0%	3,0%

Tabela 04 – Porcentagens das médias de acertos, erros e questões em branco de cada sessão

Pode-se observar, em todas as sessões, a predominância do índice de acertos, mesmo nas duas últimas sessões, que envolviam situações financeiras mais complexas.

Validação

Consideramos válida a nossa hipótese de que a abordagem para o ensino da matemática financeira por intermédio da visualização das operações financeiras utilizando como recurso o eixo das setas é adequada.

Consideramos também que a visualização das operações financeiras potencializa uma postura crítica no aluno. Através da abordagem de problemas do cotidiano, como os propostos na 5ª sessão de nossa seqüência didática, torna-se mais difícil para o aluno aceitar tais operações sem questionamento.

Na nossa interpretação, os resultados da experimentação permitiram que chegássemos às seguintes conclusões, que são indícios de que atingimos o nosso objetivo:

- Percebemos que os alunos se empenharam em resolver as questões, visto que a porcentagem de questões em branco foi baixa em relação ao número de alunos que realizaram as atividades.
- Em todas as atividades, considerando a complexidade de cada uma, o índice de acertos foi significativo.
- Os alunos compreenderam que o eixo das setas pode representar os dados de uma situação problema, facilitando a sua interpretação;
- Os alunos conseguiram fazer a passagem da linguagem escrita (enunciado do problema) para o eixo das setas e deste para uma expressão algébrica ou aritmética.

Devido às considerações acima, concluímos que a abordagem visual seguida pela seqüência didática cumpriu seu papel de facilitar o ensino dos principais conceitos da matemática financeira.

5.2 Considerações finais

Ao concluirmos este trabalho, faz-se necessário tecermos um breve resumo sobre os principais pontos tratados. Este capítulo tem como finalidade apresentar as conclusões obtidas no estudo de uma metodologia para o ensino da matemática financeira no ensino médio segundo uma abordagem visual, suas limitações e recomendações para trabalhos futuros.

Esta pesquisa teve como objetivo verificar se um modelo que utiliza a visualização por meio do eixo das setas facilita a compreensão da matemática financeira por alunos do ensino médio. Consideramos que através desta abordagem o aluno seja capaz de construir seus próprios métodos para resolver, sem o uso de fórmulas, problemas que envolvam operações financeiras.

A escassez de pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de matemática financeira e o fato deste assunto ainda ser novo na grade curricular do ensino médio nos levou a escolhê-lo como tema desta pesquisa. Além disso, acreditamos ser importante para o aluno ter uma atitude crítica frente aos discursos que lhe são apresentados como verdades inquestionáveis.

Pretendíamos responder a duas perguntas: Uma abordagem visual pode facilitar a aprendizagem da matemática financeira no ensino médio? Diante da crescente popularidade das operações financeiras no dia-a-dia do indivíduo comum, como a matemática financeira poderia estar potencializando uma postura crítica no aluno, para que não aceite tais operações sem questionamento, tomando-as como naturais?

Na tentativa de responder a estas duas perguntas procuramos confirmar a hipótese de que a abordagem mais adequada para o ensino da matemática financeira se daria por intermédio da visualização das operações financeiras utilizando como recurso o eixo das setas, por potencializar a diversidade de raciocínio, pela sua simplicidade e não utilização de fórmulas.

Tendo por objetivo verificar a hipótese levantada acima, utilizamos a metodologia denominada engenharia didática, da escola francesa. Buscamos investigar como se desenvolve o raciocínio do aluno no decorrer da resolução de problemas propostos sobre os conceitos fundamentais da matemática financeira. Para isto, elaboramos uma seqüência de aulas organizada em cinco sessões: porcentagem, juros simples, fator de aumento e de desconto, juros compostos e o valor do dinheiro no tempo.

Antes da elaboração da seqüência, realizamos uma análise preliminar com o intuito de investigar como os conteúdos da matemática financeira que pretendíamos desenvolver junto aos alunos são trabalhados nas propostas curriculares e nos livros didáticos. Constatamos que o ensino usual está centrado no ensino da matemática financeira através de fórmulas.

Nossa preocupação na elaboração e aplicação da seqüência didática sempre foi a de propor ao aluno situações significativas, que favorecessem a construção do conhecimento. Para isto privilegiamos atividades de observação e reflexão, para que o aluno pudesse tirar suas próprias conclusões.

A análise a posteriori de nossa seqüência didática permitiu que chegássemos às seguintes conclusões, que são indícios de que atingimos o nosso objetivo:

- Percebemos que os alunos estavam motivados e procuraram resolver as questões, visto que a porcentagem de questões em branco foi baixa em relação ao número de alunos que realizaram as atividades;
- O índice de acertos por atividade foi significativo.
- Reconhecemos que a abordagem visual através do eixo das setas, levou os alunos à compreensão dos principais conceitos da matemática financeira, já que estes conseguiram resolver os problemas propostos sem a necessidade de se apoiar em fórmulas.

Quanto aos efeitos positivos que esperávamos, parece que os seguintes foram alcançados, com a maior parte dos alunos:

- Trabalhando em duplas, eles participaram mais ativamente na resolução das atividades propostas, discutindo com seus parceiros e entre duplas;

- Compreenderam que o eixo das setas pode representar os dados de uma situação problema;
- Conseguiram identificar e representar as variáveis dos problemas propostos no eixo das setas e através da visualização, traçar uma estratégia para resolver os problemas;

Realizando uma avaliação crítica do nosso estudo, notamos que poderíamos aperfeiçoá-lo. Reconhecemos que:

- A realização de um trabalho de campo, com aplicação na vida prática, proposto ao término da quinta sessão, seria muito proveitosa no processo de ensino-aprendizagem dos alunos;
- Poderíamos ter fechado cada sessão com exposição oral, em grande grupo, abrindo espaço para as duplas resumirem suas descobertas, explicitando as dificuldades encontradas. Infelizmente, por falta de tempo, só fizemos isto na primeira sessão;
- Deveríamos ter devolvido e comentado no início de cada aula a produção dos alunos na aula anterior, expondo alguns erros encontrados (sem identificar a dupla) e pedindo às duplas para encontrar esses erros, a título de exercício.

Ao final de nossos estudos gostaríamos de evidenciar a necessidade de melhor capacitar o professor para trabalhar a matemática financeira, para que o mesmo consiga trabalhar com segurança este assunto, além de diversificar estratégias para garantir uma apreensão mais concreta dos alunos.

Enfim, esperamos que este trabalho tenha contribuído para os conhecimentos sobre o tema e que, além disso, possa contribuir para a sensibilização dos professores do ensino médio da necessidade de trabalhar com situações problemas que envolvam a matemática financeira.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Adriana Correa. “Trabalhando matemática financeira em uma sala de aula do ensino médio da escola pública”. Dissertação de Mestrado: Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Orientadora: Carvalho, Dione Lucchesi de. 2004. 124 p. (fotocópia).

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle e FIDELIS, Reginaldo. “Modelagem matemática na sala de aula: contribuições para a competência de refletir na ação”. **Anais do VII EPEM**, São Paulo, 2004.

ALMOULOUD, Saddo Ag e COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho. “Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd”. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, V3.6, p. 62-77, UFSC, 2008.

ARCAVI , Abraham. “The role of visual representations in the learning of mathematics”. **Education Studies in Mathematics**, 52(3): 215–241, 2003.

BEZERRA, Jairo M. **Série Parâmetros: Matemática para o Ensino Médio**. São Paulo: Ed. Scipione, 2002.

BORGES, Josias Gamero. “Gestão empresarial e marketing”. Lins,SP: Faculdades Salesianas de Lins, 2003 (Apostila).

BOTELHO, Manoel Henrique Campos. “Quanto perco com a inflação?”. **Revista do professor de matemática**, 20, p.25, 1992.

BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

BRASIL/MEC. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, volume 2, 2006. Disponível no site http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume 2_internet.pdf

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contextos e Aplicações** – Vol.1. 3ª Ed. São Paulo: Ed. Ática, 2003.

CABRAL, Rodrigo Becke. “Mercados financeiros: uma metodologia de ensino de estratégias de investimento”. Tese de doutorado: Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Orientador: Barcia, Ricardo Miranda. 2002. 97 p. (fotocópia).

CARNEIRO, Vera Clotilde GARCIA. “Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática”. **Zetetikè**, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, pp. 85-118.

CARVALHO, Valéria de. “Educação matemática: matemática & educação para o consumo”. Dissertação de Mestrado: Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Orientadora: Mendonça, Maria do Carmo Domite. 1999. 169 p. (fotocópia).

CASA DA MOEDA. **Casa da moeda do Brasil**. Disponível em: <http://www.casadamoeda.com.br/historic/origem.htm>. Acesso em: ago.2007.

CERBASI, Gustavo Petrasunas, **Dinheiro: os segredos de quem tem**. São Paulo: Editora Gente, 2005. 169p..

CESAR, Benjamin, **Matemática financeira: teoria e 840 questões**. Rio de Janeiro: Impetus, 2002. 362 p..

COLLI, Eduardo. “Imposto progressivo”. **Revista do professor de matemática**, 54, 10–15, 2004.

COSTA, Conceição. “Visualização, veículo para a educação em geometria”. **Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação**, pp. 157-184, Fundão, Portugal, 2000.

__________________ “Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização”. **Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação**, p. 257-273, Coimbra, Portugal, 2002.

DeBELLIS , Valerie A. & GOLDIN, Gerald A.. “Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective”. **Education Studies in Mathematics**, 63(2): 113–234, 2006.

FEIJÓ, Adriano Brandão. “O ensino de matemática financeira na graduação com a utilização da planilha e da calculadora: uma investigação comparativa”. Dissertação de Mestrado: Pontifícia Universidade Católica do Rio grande do Sul, Faculdade de Física, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Orientador: Viali, Lori. 2007. 189 p. (fotocópia).

FIEL, Mercedes Villar. “Um olhar para o elo entre educação matemática e cidadania: a matemática financeira sob a perspectiva da etnomatemática”. Dissertação de Mestrado: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Orientadora: Frant, Janete Bolite. 2005. 165 p. (fotocópia).

FIESP/Fundação Roberto Marinho. **Telecurso 2000**. Matemática, Ensino Médio, vol. 2, Aula 37.

FRAENKEL, Renato. “Logaritmos – um curso alternativo”. **Revista do professor de matemática**, 04, 16-20, 1984.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. “Uma abordagem histórica da equação do 2º grau”. **Revista do professor de matemática**, 43, 20-25, 2000.

FREITAS, José Luiz Magalhães de, et al. Situações didáticas in: **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 2002, p. 65-87.

GARCIA, João Calixto. “À vista com desconto ou a prazo sem juros?”. **Revista do professor de matemática**, 20, 23-24, 1992.

GONÇALVES, Jean Piton. A história da matemática comercial e financeira. Disponível no site http://somatematica.com.br/história/matematicafinanceira4.php.

GUZMÁN, Miguel de. “The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis”. **Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics** (at the Undergraduate Level) Hersonissos, Creta, Grécia, 2002.

HAZZAN, Samuel. “Poupando para a aposentadoria”. **Revista do professor de matemática**, 33, 7-9, 1997.

IMENES, Luiz Márcio. “O editor e a média”. **Revista do professor de matemática**, 08, 9-12, 1986.

IMENES, Luiz Márcio e LELLIS, Marcelo. “A matemática e o novo ensino médio”. **Educação Matemática em Revista**, 8(9): 40-48, 2001.

KUMAYAMA, Hideo. “Pagamento parcelado”. **Revista do professor de matemática**, 22, 13-15, 1992.

LEME, Nelson Dias. “O ensino-aprendizagem de matemática financeira utilizando ferramentas computacionais: uma abordagem construcionista”. Dissertação de Mestrado: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Mestrado em educação matemática, Orientadora: Healy, J Siobhan Victoria. 2007. 199 p. (cópia).

LIMA, EL, CARVALHO, PCP, WAGNER, E, MORGADO, AC: A Matemática do Ensino Médio, vol. 2, **Coleção do Professor de Matemática**, SBM, 2000.

MACHADO, Mardem de Almeida. “Ensino de matemática financeira por CBT - uma abordagem metodológica”. Tese de Doutorado: Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Orientador: Kopittke, Bruno Hartmut. 1997. Disponível no site http://www.eps.ufsc.br/teses98/mardem/index.htm

MACHADO, Silvia Dias Alcântara, et al. Engenharia didática in: **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 2002, p. 197-208.

MATOS, Manuel João. “Estudando juros em diversos momentos da história”. **Educação e Matemática**, APM, 27(3): 43–45, 1993.

MORGADO, Augusto César, WAGNER, Eduardo e ZANI, Sheila. Progressões e Matemática financeira. **Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2005. 121p.

MOISÉS, Roberto Perides. “Dívida na vida: uma dúvida”. **Revista Carta na Escola**, 16, 30-33, 2007.

MORGADO, Augusto César, WAGNER, Eduardo e ZANI, Sheila. Progressões e Matemática financeira. **Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2005. 121p.

MUNIZ, Ivail Jr.. “Quer pagar quanto? Introdução à matemática financeira no ensino médio”, Macaé. **4º Encontro Estadual de Educação Matemática**, 2006 (Apostila).

NASCIMENTO, Pedro Lopes do. “A formação do aluno e a visão do professor do ensino médio em relação à matemática financeira”. Dissertação de Mestrado: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Orientadora: Pires, Célia Maria Carolino. 2004. 187 p. (fotocópia).

NASSER, Lilian & Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ. “Matemática financeira: uma abordagem visual”, Macaé. **4º Encontro Estadual de Educação Matemática**, 2006 (Apostila).

NETO, Ernesto Rosa. “Caixa econômica”. **Revista do professor de matemática**, 27, 10-12, 1995.

NOVELLINO, Eduardo e NOVAES, Rosa (a aparecer), **Matemática Financeira:um método visual**.

PONTE, João Pedro. “O desenvolvimento profissional do professor de matemática”. **Educação e Matemática**, APM, 31: 9–12, 1994.

__________________ “Álgebra no currículo escolar”. **Educação e Matemática**, APM, 85: 36–42, 2005.

PRESMEG , Norma C.. “Visualization and mathematical giftedness”. **Education Studies in Mathematics**, 17(3): 297-311, 1986.

PRESMEG , Norma C.. “Visualization in high school mathematics”. **For the Learning of Mathematics**, 6(3): 42-46, 1986.

SÁ, Ilydio Pereira de. **Matemática comercial e financeira (na educação básica) para Educadores Matemáticos**, Rio de Janeiro: Editora Sotese, 2005.

SEE-RJ. Avaliação de desempenho Nova Escola 2003 – Resultados – 3ª Série do Ensino Médio. Fundação Cesgranrio. Rio de Janeiro.

SERRA, Edgar Vieira Machado. UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE MERCADO DE CAPITAIS NA ABORDAGEM DE JOGOS DE EMPRESAS. 1998. Disponível em: <http://www.eps.ufsc.br/disserta98/serra/cap2.htm>. Acesso em: abr.2006.

SILVEIRA, Karla Beatriz. "O educando da EJA: dificuldades e superações na aprendizagem de matemática financeira". Dissertação de Mestrado: Centro Universitário Franciscano, Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, Orientadora: Pereira, Maria Arleth. 2007. 143 p. (fotocópia).

SISTEMA NACIONAL DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA: SAEB 2009. Relatório técnico. Rio de Janeiro: Fundação Cesgranrio/Fundação Carlos Chagas, 2002

PDE : Plano de Desenvolvimento da Educação : SAEB : ensino médio : matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008.

STIELER, Eugênio Carlos. "Uso da tecnologia da informática mo ensino superior: um estudo da aplicação da planilha eletrônica excel na disciplina de matemática financeira". Dissertação de Mestrado: Centro Universitário Franciscano, Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, Orientador: Ferreira, Marcio Violante. 2007. 94 p. (fotocópia).

TORRES, Guillermo Zamalloa. "Calcular prestações de uma dívida, como?". **Revista do professor de matemática**, 66, 9-12, 2008.

VIDOTTO, Sandra Mara Neri. "Análise da utilização de um software no ensino de matemática financeira". Dissertação de Mestrado: Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Orientador: Kopittke, Bruno Hartmut. 2002. 94 p. (fotocópia).

VEIGA, Rafael Paschoarelli, **A regra do jogo – Descubra o que não querem que você saiba no jogo do dinheiro**. São Paulo: Editora Saraiva, 2007. 181p..

VEIGA, Rafael Paschoarelli, **Como comprar mais gastando menos**. São Paulo: Editora Saraiva, 2006. 181p..

ZOT, Wili Dal, **Matemática financeira**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006. 190p..

ANEXOS

ANEXO 1 - Atividades da sessão 1

CEAN – CENTRO EDUCACIONAL "Alexis Novellino"

Cabo Frio, 22 de agosto de 2008.

Professora: Rosa C. N. de Novaes **Série:** 2º ano

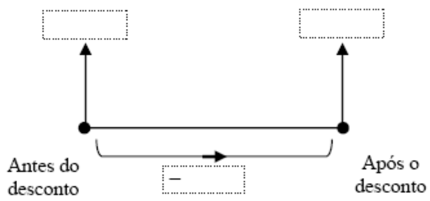
Alunos: ______________________________ **N^{os}.:** ___________

PRIMEIRA SESSÃO: PORCENTAGEM

QUESTÃO 1

Na venda de uma mercadoria de R$ 100,00, o dono da loja concedeu um desconto de R$ 5,00.

a) Complete o eixo das setas:



b) Dizemos que foi dado um desconto de R$ 5,00 **sobre** o valor de R$ 100,00. Reescreva esta frase com símbolos usado na matemática.

Podemos dizer que o desconto é de R$ 5,00 sobre R$ 100,00 ou ainda: o desconto é de 5 por cento. Escrevemos assim: o desconto é de 5%.

c) Que fração do total representa o valor de venda?

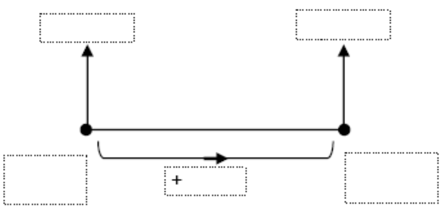
d) O valor inicial da mercadoria corresponde à fração: ______ + ______ ou a ______% + ______% = ______%

↓ desconto ↓ valor da venda

QUESTÃO 2

Na venda de um produto de R$ 100,00, Ana recebeu uma comissão de R$ 12,00.

a) Represente este problema no eixo das setas.



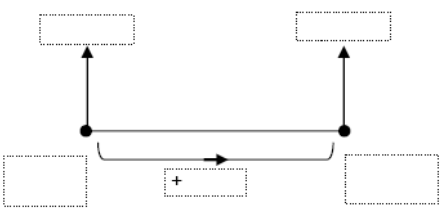
b) Qual o foi o percentual da comissão?

Você deve estar se perguntando: e quando o denominador não for 100?
Vamos pensar sobre isto resolvendo o seguinte problema:

QUESTÃO 3

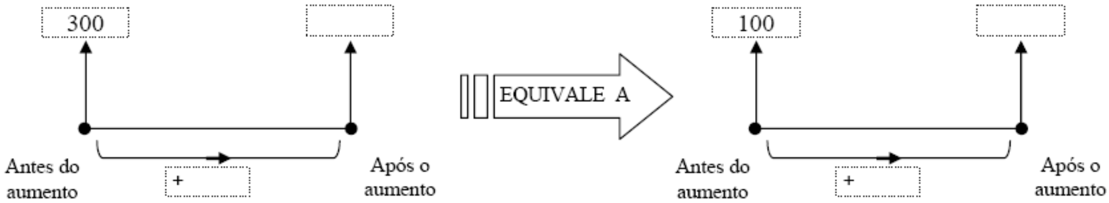
O preço de certa mercadoria era R$ 300,00. Após sofrer um aumento, passou a valer R$ 360,00.

a) Represente este problema no eixo das setas.



- 1 -

b) Complete o esquema a seguir?



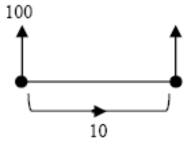
c) Complete: $\frac{60}{300} = \frac{\quad}{100}$

d) Qual o percentual de aumento?

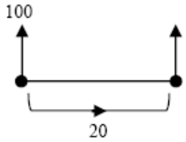
> Observação:
> Quando dizemos que uma mercadoria sofreu um aumento de 20%, não estamos dizendo que o aumento foi de 20 reais. O que se sabe é que, em cada grupo de 100 reais, serão acrescidos 20 reais.

QUESTÃO 4

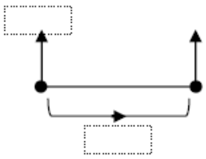
Uma taxa de porcentagem pode ser representada por um número decimal, ou por fração. Assim:

a) 

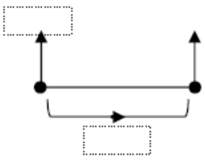
$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}10$

b) 

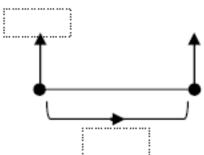
$20\% = \frac{\quad}{100} = \frac{1}{\quad} =$

c) 

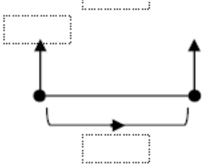
25% =

d) 

40% =

e) 

50% =

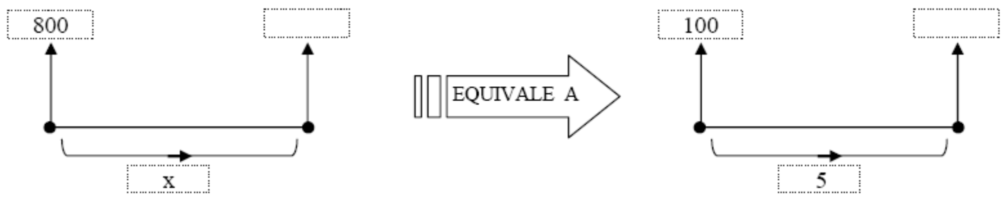
f) 

75% =

Existem vários modos de resolver problemas envolvendo porcentagem. Vejamos alguns:

Problema: Na venda de um produto de R$ 800,00, Ana recebeu uma comissão de 5%. Quantos reais Ana ganhou com esta venda?

<u>1º modo</u>: regra de três



800 – 100%
x – 5%

100x =

ou ainda: $\dfrac{x}{800} = \dfrac{5}{100}$

<u>2º modo</u>: redução

100% – 800
10% –
5% –

ou

100% – 800
1% –
5% –

<u>3º modo</u>: notação decimal ou fração

$$5\% \text{ de } 800 = 0{,}05 \;.\; 800 =$$

$$5\% \text{ de } 800 = \frac{5}{100} \;.\; 800 = \frac{1}{20} \;.\; 800 =$$

Observação: Daremos preferência ao 3º modo de resolução por facilitar a resolução de alguns problemas.   Em alguns casos é mais fácil trabalhar com as frações irredutíveis, mas em outros pode ser conveniente trabalhar com a notação decimal. O bom senso dirá.

QUESTÃO 5

Oferecendo um desconto de 8% para pagamento à vista, a quanto sairia um artigo cujo preço é R$ 200,00?

QUESTÃO 6

O salário de uma pessoa passou de R$ 500,00 para R$ 600,00. Qual o foi o percentual do aumento?

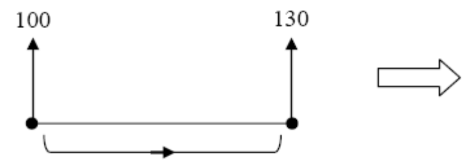
QUESTÃO 7

Após um desconto de 5% um produto passou a custar R$ 19,00. Qual o preço do produto antes do desconto?

QUESTÃO 8

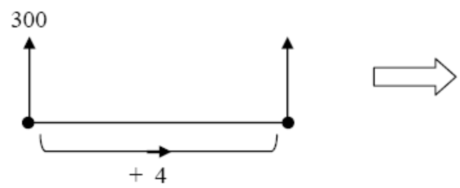
Encontre a taxa de aumento (ou taxa de juro **i**) em cada situação.

a)



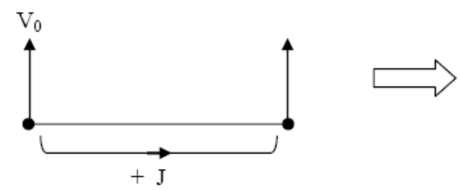
i =

b)



i =

c)



i =

ANEXO 2 - Atividades de casa da sessão 1

PARA CASA (PORCENTAGEM)

QUESTÃO 1

Uma mercadoria de R$ 150,00 teve um aumento de 20%. Qual o valor da mercadoria após o aumento?

QUESTÃO 2

O número de alunos de uma turma passou de 20 alunos para 15. Qual foi o percentual de redução?

QUESTÃO 3

Após um aumento de 30%, o salário de Carlos sofreu um aumento de R$ 120,00. Qual o salário de Carlos antes do aumento?

QUESTÃO 4

Vera comprou um creme hidratante por R$ 40,00 em janeiro. Em julho, voltou à mesma loja e encontrou o produto com um desconto de 14%. Qual o novo preço do produto?

QUESTÃO 5

O preço a vista de uma televisão é de R$ 900,00. O pagamento pode se parcelado em três prestações iguais com acréscimo de 9% no seu preço a vista. Qual é o valor de cada prestação?

QUESTÃO 6

Uma loja de roupas anunciou seus produtos com um desconto de 20%. Ao término da promoção, em quanto por cento deve aumentar o preço dos artigos para voltar ao preço normal?

QUESTÃO 7

(PROJETO FUNDÃO) Em um ano o preço de uma mercadoria triplicou. Qual a porcentagem de aumento?

QUESTÃO 8

(UFRJ – 2000) A comissão de um corretor de imóveis é igual a 5% do valor de cada venda efetuada.

a) Um apartamento foi vendido por R$ 62.400,00. Determine a comissão recebida pelo corretor.
b) Um proprietário recebe, pela venda de uma casa, R$ 79.800,00, já descontada a comissão do corretor. Determine o valor da comissão.

QUESTÃO 9

(FGV – 2006) O gerente de uma loja aumentou o preço de um artigo em 25%. Decorrido um certo tempo, ele percebeu que não foi vendida 1 unidade sequer desse artigo. Resolveu, então, anunciar um desconto de tal modo que o preço voltasse a ser igual ao anterior. O desconto anunciado foi de:

(A) 20%.
(B) 22%.
(C) 25%.
(D) 28%.
(E) 30%.

QUESTÃO 10

Pequenos cálculos:

a) Qual a porcentagem de 180 é igual a 126?
b) Qual o valor de um desconto de 22% de um sapato que custa R$ 65,00?
c) Um produto de R$ 54,00 teve acréscimo de R$ 12,00. Quanto aumentou percentualmente?
d) 17% de um número é 15,3. Qual é o número?
e) Qual o valor de 1,7% de R$ 400,00?
f) R$ 146,00 correspondem a quanto por cento de R$ 500,00?
g) R$ 192,00 correspondem a 30% de qual valor?

ANEXO 3 - Atividades da sessão 2

CEAN – CENTRO EDUCACIONAL "Alexis Novellino"

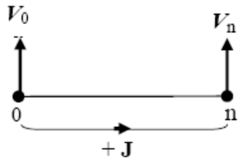
Cabo Frio, 29 de agosto de 2008.

Professora: Rosa C. N. de Novaes **Série:** 2º ano

Alunos: ______________________________ **Nº.:** __________

SEGUNDA SESSÃO: JUROS SIMPLES

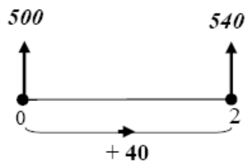
NOÇÕES FUNDAMENTAIS



A operação de investimento é realizada quando alguém que dispõe de um capital V_0, intitulado de ***principal***, e aplica este capital por um prazo definido. Ao término de um período n, ele recebe o seu capital V_0 de volta, acrescido de uma remuneração **J** pelo investimento. Esse rendimento é conhecido como ***juro***. A soma V_0 **+ J** é chamada de ***montante*** e será representada por V_n.

Como já vimos na questão 8c, da página 4, a razão $\frac{J}{V_0}$, que é a taxa de crescimento do capital, está sempre relacionada ao período da operação, chamada de ***taxa de juro***, tendo a notação i.

<u>Obs</u>.: Assim como o dono de imóvel pode alugá-lo, aquele que tem dinheiro para negócios, mas não possui a necessária habilidade para administrá-lo ou quer evitar o aborrecimento de fazê-lo, "aluga" seu dinheiro. Eis aí o que se chama de **<u>juro</u>**, que é apenas o aluguel pago pelo uso do dinheiro. Ser dono de imóvel ou dono de dinheiro é, portanto, a mesma coisa. O risco do dono de imóvel é menor. Por isso o imóvel produz um juro menor que o dinheiro.



<u>Exemplo</u>: Carlos investiu R$ 500,00. Dois meses após, recebeu R$ 540,00. Neste exemplo, observamos que:

- principal (V_0) = R$ 500,00
- montante (V_n) = R$ 540,00
- período de tempo (**n**) = 2 meses
- juro (**J**) = R$ 40,00
- taxa de juros do período(i) = $\frac{40}{500} = \frac{8}{100}$ = 8% ou 0,08

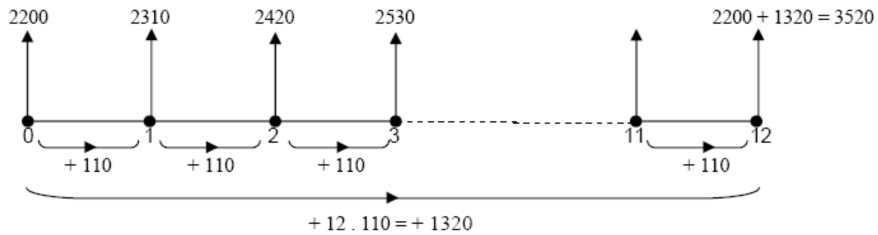
JUROS SIMPLES

Em algumas situações (prazos pequenos, juros de mora) são usados **juros simples**. No regime de juros simples, os juros são calculados sempre sobre o capital inicial (V_0).

<u>Exemplo</u>: Augusta investiu R$ 2.200,00 em um fundo de investimento durante um ano com taxa de juros simples de 5% ao mês. Qual o valor final da aplicação?

Resolução:

Primeiro vamos encontrar o valor do juro mensal → *J = 5% de R$ 2200,00 = 0,05 . 2200 = R$ 110,00*



Resposta: O valor final da aplicação será de R$ 3520,00.

QUESTÃO 1

Fernanda investiu R$ 3.500,00 em um fundo de investimento durante dois anos à taxa de juros simples de 2% ao mês. Qual o valor final da aplicação?

- 7 -

QUESTÃO 2

Qual o valor do capital aplicado pelo prazo de oito meses e taxa de juro simples de 1,5% a.m. cujo valor final atingiu R$ 3.800,00?

QUESTÃO 3

Pedro investiu R$ 800,00 em uma aplicação cuja taxa de juro simples mensal é de 1,7%. Qual será o valor do juro ao fim de 24 meses?

QUESTÃO 4

Qual a taxa de juro simples mensal de um investimento de R$ 2.500,00 pelo prazo de 18 meses cujo montante atingiu o valor de R$ 3.490,00?

QUESTÃO 5

Qual a taxa mensal de juros simples de um investimento de R$ 2000,00 pelo prazo de 8 meses cujo montante atingiu R$ 2400,00? E qual a taxa do período?

ANEXO 4 - Atividades de casa da sessão 2

PARA CASA (JUROS SIMPLES)

QUESTÃO 1
O capital de R$ 620,00 foi aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês. Qual o valor do montante após 10 meses?

QUESTÃO 2
Thiara aplicou R$ 800,00 à taxa de juro simples de 15% ao ano. Após um certo tempo, o principal gerou um montante de R$ 1520,00. Qual foi esse tempo?

QUESTÃO 3
Se o capital de R$ 1500,00 rende mensalmente R$ 18,00, qual é a taxa anual de juros simples?

QUESTÃO 4
Determine o principal que, aplicado à taxa de juro simples de 3% ao mês, rendeu R$ 270,00 em um semestre.

QUESTÃO 5
(UNI-RIO-adaptado) Para comprar um tênis de R$ 70,00, Renato deu um cheque pré-datado de 30 dias no valor de R$ 74,20. Qual a taxa de juros cobrada?

QUESTÃO 6
(TRT) Se uma pessoa deseja obter um rendimento de R$ 27.000,00, dispondo de R$ 90.000,00 de capital, a que taxa de juros simples quinzenal o dinheiro deverá ser aplicado no prazo de cinco meses?

QUESTÃO 7
Qual a diferença entre juro e taxa de juro?

QUESTÃO 8
Qual a relação existente entre juros simples, P.A. e função afim?

QUESTÃO 9
(Banco do Brasil) Que quantia aplicada a 2,5% a.m., durante três meses e dez dias, rende R$ 28.000,00?

QUESTÃO 10
(BEMGE) Qual o tempo necessário para que um capital qualquer, aplicado a juros simples e à taxa de 40% ao bimestre, triplique o seu valor?

QUESTÃO 11
(CEF-adaptado) Um capital foi aplicado a juros simples e, ao completar um período de um ano e quatro meses, produziu um montante equivalente a $\frac{7}{5}$ de seu valor. Qual a taxa mensal dessa aplicação?

QUESTÃO 12
Marcos investiu um capital $\mathbf{C}_0$ em um fundo de investimento durante **n** meses à taxa de juros simples **i** ao mês. Qual o valor final da aplicação ($\mathbf{C}_n$)?

ANEXO 5 - Atividades da sessão 3

CEAN – CENTRO EDUCACIONAL "Alexis Novellino"
Cabo Frio, 5 de setembro de 2008.

Professora: Rosa C. N. de Novaes **Série:** 2º ano

Alunos: ______________________________ **Nº.:** ___________

TERCEIRA SESSÃO: FATOR DE AUMENTO E FATOR DE DESCONTO

QUESTÃO 1

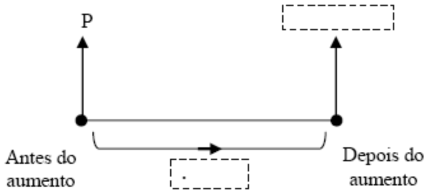
O preço P de uma roupa sofreu um aumento de 30%.

a) Qual a porcentagem que representa o preço da roupa antes do aumento?
b) Qual a porcentagem que representa o preço da roupa após o aumento?
c) Para calcular o valor da roupa com aumento, um vendedor usa a sua máquina de calcular do seguinte modo:

preço total (P)	x	30	%	+

Um outro modo de calcular o valor da roupa com aumento seria multiplicar o preço (P) pelo número decimal ________.

d) Preencha o eixo das setas:

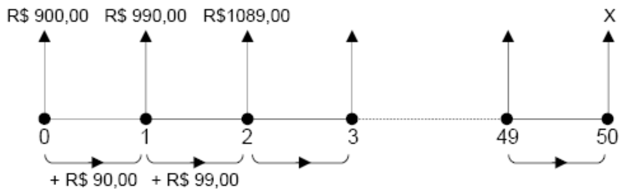


QUESTÃO 2

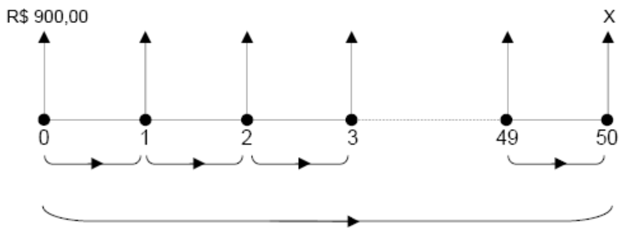
Augusto obteve um empréstimo bancário de R$ 900,00 para ser pago ao final de 50 meses com taxa mensal de 10%. Qual o valor a ser pago ao final do empréstimo, sabendo que os juros de cada período serão calculados sobre o saldo devedor?

Vamos pensar um pouco antes de resolver ...

- Será que teremos que calcular os juros mês a mês (são 50 meses!!) ?
- A dificuldade aqui é que os juros não são constantes, como nos juros simples. Observe:

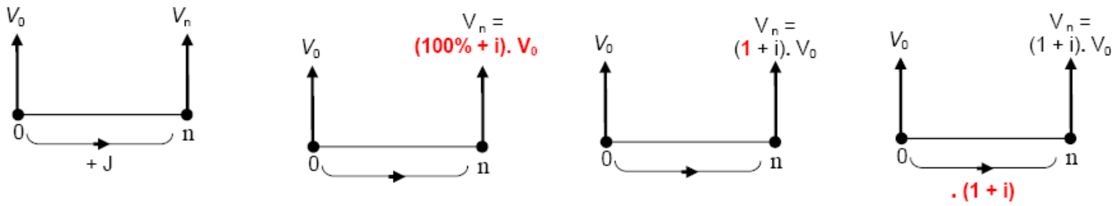


- Será que existe alguma forma de calcular, de tal modo que possamos cortar caminho e calcular direto o valor final?
- Tente encontrar uma idéia para resolver este desafio. Procure um valor constante nas pequenas etapas ("pulinhos"). Depois use este valor para calcular direto o valor a ser pago ao fim do empréstimo.



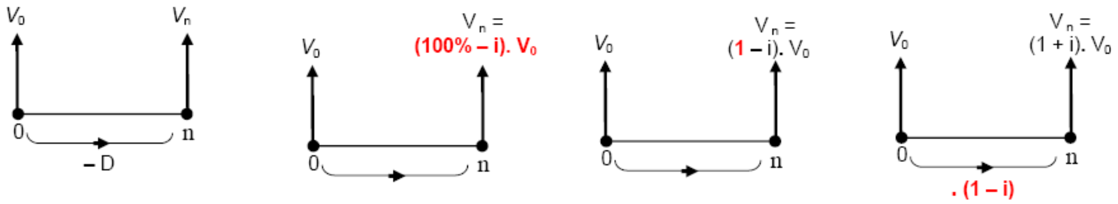
Há questões que necessitam utilizar a operação de produto do capital com um fator. Podemos encontrar este fator a partir de uma taxa ***i*** e um capital $\boldsymbol{V_0}$, da seguinte forma:

Fator de Aumento



Observe que no eixo horizontal, ao invés de somarmos **J**, multiplicamos por (1+***i***), que é o **fator de aumento**.

Fator de Desconto



Observe que no eixo horizontal, ao invés de diminuirmos **D**, multiplicamos por (1 – ***i***), que é o **fator de desconto**.

A matemática financeira tem por objetivo a compreensão das operações financeiras, facilitando as tomadas de decisões diante de opções distintas tanto para o aplicador optar pelo melhor investimento de um recurso financeiro disponível, quanto para o tomador escolher o financiamento que esteja mais adequado às suas necessidades.

É preciso ter cuidado ao comparar valores. É um erro considerar que o valor não se altera ao longo do tempo, R$ 100,00 hoje valem mais que R$ 100,00 daqui a um mês.

Pode-se dizer que, na prática, a matemática financeira é o estudo do valor do dinheiro ao longo de um determinado período. Para isto, precisamos saber deslocar quantias ao longo do tempo, e é o procedimento encontrado acima que nos permite realizar isto.

Esse é o procedimento de equivalência de capitais:

Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1 + i)^n$. → " leva do presente para o futuro "
Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1 + i)^n$. → " traz do futuro para o passado "

QUESTÃO 3
(PROJETO FUNDÃO) O dono de uma empresa resolveu dar um aumento de 5% para todos os funcionários. Que fator deve ser multiplicado pelos salários atuais para obter os novos salários?

QUESTÃO 4
Calcule o fator e a taxa de aumento na alteração do salário mínimo de R$ 150,00 para R$ 180,00?.

QUESTÃO 5
Louise obteve um empréstimo bancário de R$ 900,00 para ser pago em 90 dias com taxa trimestral de 14%. Qual valor a ser pago ao fim do empréstimo?

QUESTÃO 6

Felipe tomou um empréstimo de R$ 300,00 a juros compostos mensais de 15%. Dois meses após, Felipe pagou R$ 150,00 e um mês após esse pagamento liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

QUESTÃO 7

(UFRJ – 94) Uma pessoa alugou um apartamento por CR$ 20.000,00 mensais durante três meses. Após esse período, o aluguel foi reajustado em 105%.

a) Calcule o valor do aluguel mensal após o aumento.

b) A inflação, naqueles três meses, foi de 30% ao mês. Determine qual deveria ter sido o percentual de reajuste para que esse tivesse correspondido à inflação do período.

ANEXO 6 - Atividades de casa da sessão 3

PARA CASA (FATOR DE AUMENTO E DE DESCONTO)

QUESTÃO 1

Anna Clara tem na carteira de trabalho um salário de R$ 1.250,00. No fim do mês é creditado em sua conta bancária R$ 1.087,50. Qual o fator de desconto do seu salário?

QUESTÃO 2

O carnaval do ano passado gerou R$ 1,35 bilhões de receita com o turismo. Este ano a receita foi estimada em R$ 1,62 bilhões. Qual a expectativa da taxa de aumento?

QUESTÃO 3

A produção de automóveis atingiu 1.539,7 mil unidades em 2001. Qual a quantidade fabricada em 2002 sabendo que o fator de crescimento foi de 1,0351?

QUESTÃO 4

Acumulando aumentos sucessivos de 8%, 12% e de 25% vão equivaler a um acréscimo de quanto? E descontos consecutivos de 8%, 12% e de 25% equivalem a um desconto único de quanto?

QUESTÃO 5

Juros de 2,1% a.m., equivalem a juros de 28,32% a.a.? Por quê?

QUESTÃO 6

(PROJETO FUNDÃO) Uma bolsa era vendida em duas lojas, sendo que na loja A o preço era R$ 30,00 mais caro que na loja B. A loja A resolveu fazer um desconto de 15%, e a bolsa passou a custar o mesmo que na loja B. Qual o preço da bolsa na loja B?

QUESTÃO 7

(UFF-98) Na reprodução de uma figura, a primeira cópia obtida reduziu em 30% a área desta figura. A seguir, esta cópia foi reproduzida com ampliação de 40%.
A área da figura obtida na segunda cópia, comparada com a área da figura original, é:
(A) 98% menor
(B) 90% maior
(C) exatamente igual
(D) 2% menor
(E) 10% maior

QUESTÃO 8

(FUVEST – 94) Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: à vista com 30% de desconto sobre o preço de tabela ou no cartão de crédito com 10% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um artigo que à vista sai por CR$ 7.000,00 no cartão sairá por:
(A) CR$ 13.000,00
(B) CR$ 11.000,00
(C) CR$ 10.010,00
(D) CR$ 9.800,00
(E) CR$ 7.700,00

QUESTÃO 9

(FUVEST – 95) Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Porém ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra.
Qual é o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo a não ter prejuízo?
(A) 10%
(B) 15%
(C) 20%
(D) 25%
(E) 36%

QUESTÃO 10

(UFF – 2000) A empresa ACME concedeu a seus funcionários mensalmente, durante dois meses, um reajuste fixo de x% ao mês. Se ao final desses dois meses o reajuste acumulado foi de 21%, o valor de x é:
(A) 10
(B) 10,5
(C) 11
(D) 11,5
(E) 21

ANEXO 7 - Atividades da sessão 4

CEAN – CENTRO EDUCACIONAL "Alexis Novellino"

Cabo Frio, 18 de setembro de 2008.

Professora: Rosa C. N. de Novaes **Série:** 2° ano

Alunos: ______________________________ **N°.:** ___________

QUARTA SESSÃO: JUROS COMPOSTOS

O juro composto é utilizado na grande maioria das operações financeiras realizadas no Brasil. No **juro composto** calcula-se o valor do juro a cada intervalo de tempo, incorporando-se este valor ao saldo, passando a render juro. O processo é chamado de **capitalização de juros**, também conhecido como **juros sobre juros**.

QUESTÃO 1

(PROJETO FUNDÃO) Marta tomou um empréstimo de R$ 200,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Marta 4 meses depois?

QUESTÃO 2

(PROJETO FUNDÃO) João aplicou R$1 200,00 numa caderneta de poupança. No primeiro mês a taxa de juros foi de 0,4%, no segundo foi de 0,5% e no terceiro foi de 0,3%.

Represente essa situação no "eixo das setas", e calcule o rendimento total de João ao final desse período. Qual a taxa no período?

QUESTÃO 3

Édipo obteve R$ 2.200,00 emprestados da sua mãe à taxa 3% ao mês pelo prazo de quatro anos capitalizado pelo sistema de juro simples. Nesse mesmo período ele aplicou esta mesma quantia com a mesma taxa, também com capitalização mensal porém a juro composto. Quanto Édipo lucrou neste empréstimo de mãe para filho?

QUESTÃO 4

Um banco paga o montante de R$ 2 500,00 a quem aplicar em um de seus títulos durante um ano. Sabendo que a taxa de juros é de 3% a. m., qual o valor do capital necessário neste investimento?

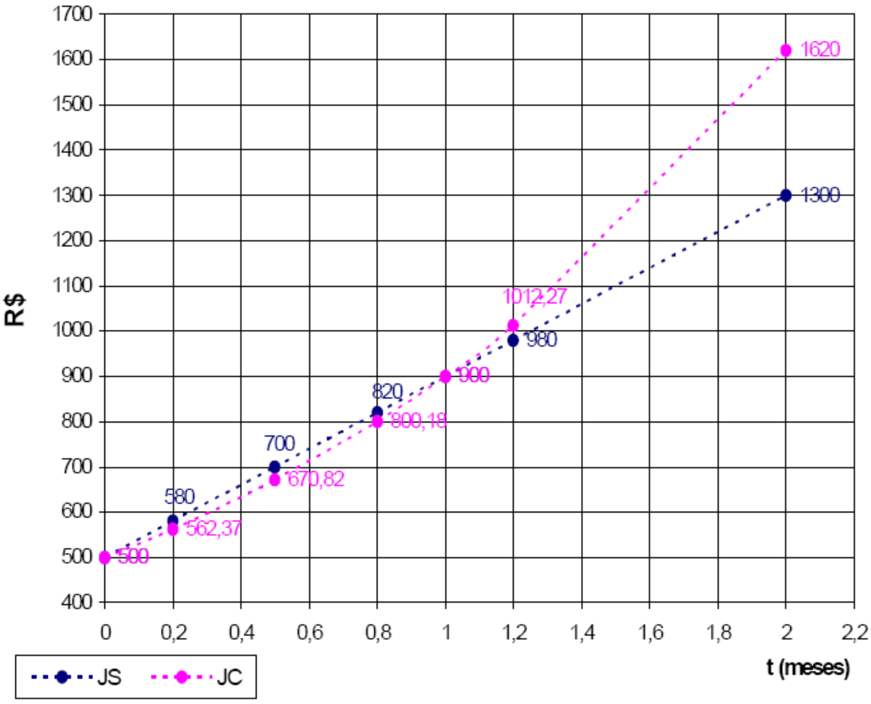
QUESTÃO 5

(PROJETO FUNDÃO) Ana investiu R$1 000,00 a juros compostos pelo período de três meses, e resgatou a quantia de R$ 1 728,00. Qual foi a taxa mensal de juros?

QUESTÃO 6

(PROJETO FUNDÃO) Comparando Juros Simples e Compostos:

Observe os gráficos abaixo que representam a evolução do dinheiro no tempo em dois regimes diferentes: juros simples (JS) e juros compostos(JC).



Com base nas informações contidas nos gráficos, responda:

a) Qual o valor do capital inicial?
b) Qual o montante após 2 meses no regime de juros simples?
c) O tempo $t = 0,2$ equivale a quantos dias?
d) Qual o valor de t equivalente a 10 dias?
e) Qual a taxa mensal de juros simples?
f) Qual a taxa mensal de juros compostos?
g) Pode-se afirmar que o montante no regime de juros compostos é sempre maior que o montante no regime de juros simples? Justifique sua resposta.
h) Qual a taxa diária de juros simples?
i) Qual a taxa diária de juros compostos?

ANEXO 8 - Atividades de casa da sessão 4

PARA CASA (JUROS COMPOSTOS)

QUESTÃO 1

Édipo obteve R$ 2.200,00 emprestados da sua mãe à taxa 3% ao mês pelo prazo de vinte dias capitalizado pelo sistema de juro simples. Nesse mesmo período ele aplicou esta mesma quantia com a mesma taxa, também com capitalização mensal, porém a juro composto. Quanto Édipo lucrou neste empréstimo de mãe para filho?

QUESTÃO 2

Qual a relação existente entre juros compostos, P.G. e função exponencial?

QUESTÃO 3

Vamos supor que estamos em um país cuja estimativa da inflação para os próximos meses é da ordem de 10% ao mês. Calcule:

a) uma expressão que relacione o preço inicial aos preços dos próximos meses.
b) o preço, daqui a 30 dias, sabendo que um artigo custa hoje R$ 200,00?
c) o preço, daqui a três meses, de um artigo que hoje custa R$ 100,00?
d) Comprando em abril, por R$ 130,00 um artigo que em janeiro custava R$ 90,00, estaremos fazendo um bom negócio? Por quê?

QUESTÃO 4

Alexandre e Aníbal são irmãos. Alexandre recebeu uma gratificação de R$ 1.000,00 e investiu em títulos com capitalização mensal e taxa de juro de 3,5% a. m. Na mesma data o seu irmão precisou da mesma quantia e solicitou empréstimo em uma financeira, obtendo-o com juro de 8% a. m. e prazo de vencimento em 3 meses.

a) Qual o montante do investimento de Alexandre ao fim de 3 meses?
b) Quanto Aníbal teria evitado desembolsar se o seu irmão lhe emprestasse o dinheiro nas mesmas condições do investimento?

QUESTÃO 5

Carol investiu um capital $\mathbf{C}_0$ em um fundo de investimento durante **n** meses à taxa **i** de juros compostos ao mês. Qual o valor final da aplicação ($\mathbf{C}_n$)?

QUESTÃO 6

O sr. Ágio Otto empresta dinheiro a taxa de juro composto de 9% a.m. Oto Ário obteve um empréstimo no valor de R$ 800,00, por oito meses. Ário disse ao sr. Ágio que não concordava com a cobrança de juro composto, somente aceitando a incidência de juro simples sobre o empréstimo. Qual a taxa mensal de juro simples que o sr. Ágio Otto deve cobrar ao Oto Ário e manter o seu rendimento?

QUESTÃO 7

Pedro prometeu pagar a João R$ 200 reais no dia 1º de setembro. Mas, um mês antes, no dia 1º de agosto, resolveu saldar sua dívida. Se o combinado tinha sido um juro de 6% ao mês, quanto Pedro deverá pagar?

QUESTÃO 8

Dentro de oito meses Marta pretende trocar de automóvel e precisará de R$ 12.000,00. Quanto ela precisa aplicar agora, sabendo-se que sua taxa de rendimento mensal é de 2,5%?

QUESTÃO 9

(FUVEST – 81) O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja Cr$ 100,00, daqui a três anos será:

(A) Cr$ 300,00
(B) Cr$ 400,00
(C) Cr$ 600,00
(D) Cr$ 800,00
(E) Cr$ 1.000,00

QUESTÃO 10

(ENEM – 2000) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses.

Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar:

(A) dois meses, e terá a quantia exata.
(B) três meses, e terá a quantia exata.
(C) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.
(D) quatro meses, e terá a quantia exata.
(E) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

QUESTÃO 11

(UFRJ – 2005) O Sr. Feliciano contraiu, em um banco, um empréstimo de R$ 10.000,00, com juros de 3% ao mês; ou seja, o saldo devedor é recalculado, a cada mês, acrescentando-se 3% ao antigo. Começou a pagar a dívida exatamente um mês após tê-la contraído. Pagou, religiosamente, R$ 250,00 por mês, durante 10 anos.

a) Calcule o saldo devedor após o primeiro pagamento.
b) Indique, das opções a seguir, a que representa a situação do Sr. Feliciano decorridos os 10 anos.

I - A dívida foi quitada.
II - O Sr. Feliciano deve ao banco menos de R$ 10.000,00.
III - O Sr. Feliciano deve ao banco algo entre R$ 10.000,00 e R$ 16.000,00.
IV - O Sr. Feliciano deve ao banco mais de R$ 16.000,00.
V - O banco deve dinheiro ao Sr. Feliciano.

QUESTÃO 12

(FGV – 2003) Fábio recebeu um empréstimo bancário de R$ 10.000,00, para ser pago em duas parcelas anuais, a serem pagas respectivamente no final do primeiro ano e do segundo ano, sendo cobrados juros compostos à taxa de 20% ao ano. Sabendo que o valor da 1ª parcela foi R$ 4.000,00, podemos concluir que o valor da 2ª foi de:

(A) R$8.800,00
(B) R$9.000,00
(C) R$9.200,00
(D) R$9.400,00
(E) R$9.600,00

QUESTÃO 13

(FGV – 2003) Uma máquina de lavar roupa é vendida à vista por R$ 1.200,00, ou então a prazo com R$ 300,00 de entrada mais uma parcela de R$ 1.089,00 dois meses após a compra. A taxa mensal de juros compostos do financiamento é:

(A) 10%
(B) 11%
(C) 12%
(D) 13%
(E) 14%

QUESTÃO 14

(FGV – 2003) No regime de juros compostos, a taxa de juro anual que produz um montante 44% superior ao capital inicial, no prazo de aplicação de 2 anos é:

(A) 20%
(B) 21,5%
(C) 21%
(D) 20,5%
(E) 22%

ANEXO 9 - Atividades da sessão 5

CEAN – CENTRO EDUCACIONAL "Alexis Novellino"

Cabo Frio, 25 de setembro de 2008.

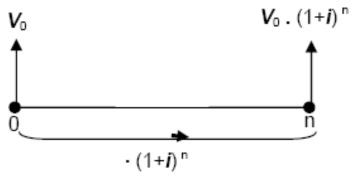
Professora: Rosa C. N. de Novaes **Série:** 2° ano

Alunos: ______________________________ **N°.:** ___________

QUINTA SESSÃO: O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

A tomada de decisões em matemática financeira implica em deslocar valores ao longo do tempo.

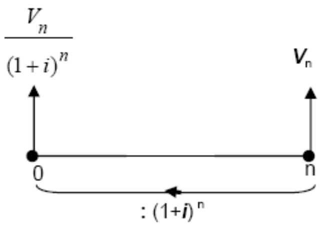
Valor Futuro



Para obter o **Valor Futuro**, basta multiplicar o valor atual por $(1 + \boldsymbol{i})^n$

$\underbrace{\longrightarrow}_{.\,(1+i)}$ *leva do presente para o futuro.*

Valor Atual



Para obter o **Valor Atual**, basta efetuar a operação inversa, ou seja, dividir o valor futuro por $(1 + \boldsymbol{i})^n$

$\underbrace{\longleftarrow}_{:\,(1+i)}$ *traz do futuro para o presente.*

Observação:
Não é obrigatório levar os valores sempre para a data zero, o importante é que todos os valores estejam na **<u>mesma data</u>**, pois só assim a comparação é possível.

É preciso ter cuidado ao comparar valores em análise financeira, senão podem acontecer erros graves. Como exemplo vejamos a compra de um aparelho de TV, que é vendido por R$ 1.000,00 à vista ou em 2 prestações iguais e mensais de R$ 500,00.

a) <u>Erro:</u> considerar que parcelas iguais em datas distintas tenham o mesmo valor.
Ex. do erro: considerar as 2 prestações como sendo de igual valor.
<u>Correto:</u> entender que a 1ª parcela de R$ 500,00 vale mais que a 2ª, pois a 1ª parcela colocada em uma caderneta de poupança a uma taxa de 0,6% a.m. valeria 500 . 1,006 = R$ 503,00, na data de pagamento da 2ª parcela.

b) <u>Erro</u>: somar valores em datas diferentes.
Ex. do erro: somar as 2 prestações e dizer que comprou a TV por R$ 1.000,00.
<u>Correto</u>: entender que só utilizando o instrumental da matemática financeira para obter as prestações numa mesma data, é possível realizar a soma das parcelas.

c) <u>Erro</u>: considerar que o valor não se altera ao longo do tempo.
Ex. do erro: achar que a 1ª parcela de R$ 500,00 levada para a data 2 continua valendo R$ 500,00.
<u>Correto</u>: entender que a taxa de juro altera quaisquer valores ao longo do tempo.

- 19 -

QUESTÃO 1

Andressa usou R$ 500,00 do cheque especial, mesmo possuindo R$ 2.000,00 aplicados na poupança. Ao tomar esta atitude Andressa não percebeu que o banco estava lhe emprestando o dinheiro que já era dela e, ainda por cima estava cobrando juros por isso! Ela preferiu pagar juros de 10% a.m. no cheque especial para não perder o juro de 1% a.m. da caderneta de poupança.

a) Em um mês, quanto Andressa teria economizado se houvesse retirado o dinheiro da caderneta de poupança ao invés de usar o especial?
b) Pesquise o valor das taxas citadas no texto e verifique se o problema é realista.

QUESTÃO 2

Na hora de comprar um eletrodoméstico a prazo, Lucas só se preocupou em saber se a prestação cabia ou não em seu bolso. O que ele não imaginava é que a loja, mesmo na venda a prazo, recebe à vista da financeira.

Ao vender a prazo para Lucas, a loja receberá da financeira R$ 500,00 à vista e a financeira se encarregará de cobrar as 2 prestações de **x** reais, com juros de 10% ao mês, vencendo a primeira prestação no ato da compra. Responda:

a) Qual o valor de **x**?
b) Se a loja tem por hábito lograr o cliente anunciando "compre à vista ou em 2 vezes **sem juros**", com quais valores deve anunciar o eletrodoméstico comprado por Lucas?

QUESTÃO 3

Augusto aplicou R$ 300,00 a juros mensais de 0,61% na Caderneta de Poupança. Dois meses depois, Augusto retirou R$ 150,00 e, um mês após encerrou a aplicação. Qual o valor dessa última retirada, supondo que houve rendimento em todos os meses, inclusive no mês da primeira retirada?

QUESTÃO 4

A rede de lojas PontoCom oferece duas opções de pagamento na compra de uma televisão: três parcelas mensais de R$ 180,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 100,00 cada, ambas com entrada. Louise pretende adquirir o aparelho. Qual a sua melhor opção se ela aplica o seu dinheiro à taxa de 5% ao mês? E se a taxa for de 10% ao mês?

> Observação:
>
> *Neste exercício é preciso introduzir o conceito de* **taxa mínima de atratividade**, *bastante utilizado em análise de investimentos. É assim definida porque um investimento só é atrativo se render, no mínimo, esta taxa. Também é conhecida como* **taxa mínima de retorno**.
>
> *É a melhor taxa de rendimento de capital que uma pessoa (física ou jurídica) obtém ao realizar uma operação. Por exemplo: Louise obtém 5% a.m. em suas aplicações financeiras com um determinado agente bancário. Se um segundo operador oferece uma taxa mensal de 4% com certeza Louise recusará. Nesse exercício a taxa mínima de atratividade para Louise é de 5% a.m. Qualquer taxa inferior a esta não é atraente. As taxas que oferecem atratividade para Louise são iguais ou superiores a 5% a.m.*
>
> *A taxa mínima de atratividade pode variar de pessoas para pessoa, de empresa para empresa, etc.*

QUESTÃO 5

(PROJETO FUNDÃO) A diretora da escola juntou dinheiro para comprar um computador. Comparando os preços de mercado, encontrou a seguinte oferta numa loja:

> Computador: R$ 1 800,00 à vista
> ou em
> 3 x iguais sem juros (entrada + 2)

A diretora pediu um desconto para o pagamento à vista, mas o vendedor respondeu que o preço a prazo sem juros era igual ao preço à vista e, portanto, não era possível dar desconto.

a) Considerando que o dinheiro pode render 4% ao mês, qual seria o preço justo para o pagamento à vista?
b) Qual é a porcentagem referente a esse desconto?
c) Se o número de prestações for maior, o desconto para a compra à vista deve ser maior, menor ou o mesmo?

ANEXO 10 - Atividades de casa da sessão 5

PARA CASA (O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO)

QUESTÃO 1

A rede de lojas PontoCom oferece duas opções de pagamento na compra de um DVD: quatro parcelas mensais de R$ 160,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 90,00 cada. Dani pretende adquirir o aparelho. Qual a sua melhor opção se ela aplica o seu dinheiro à taxa de 4% ao mês?

QUESTÃO 2

Um anúncio da rede de lojas PontoCom oferece três opções de pagamento na compra de eletrodomésticos:

(A) À vista, com 10% de desconto.
(B) Em duas prestações mensais iguais, com desconto de 5%, vencendo a primeira um mês após a compra.
(C) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção, se o dinheiro pode ser investido a 2,5% ao mês?

QUESTÃO 3

Marcella quer comprar uma máquina fotográfica. O vendedor disse-lhe que o pagamento poderia ser parcelado: R$ 80,00 no ato da compra e em duas parcelas iguais de R$ 120,00, com vencimento 30 e 60 dias após a compra. A taxa de juro da loja é de 3,5% a.m. Se Marcella deseja fazer a compra à vista, quanto deve pagar pela máquina fotográfica?

QUESTÃO 4

Uma loja da PontoCom está realizando uma liquidação em artigos de sala e quarto e oferece duas opções de pagamento:

(A) À vista, com 50% de desconto.
(B) Em duas prestações mensais iguais, com desconto de 20%, vencendo a primeira no ato da compra.

a) Qual a melhor opção, se o dinheiro pode ser investido a 1% ao mês?
b) Qual a taxa mensal de juro contida na venda parcelada?

QUESTÃO 5

A loja Ponto Quente distribui um encarte onde uma geladeira no valor de R$ 600,00 poderia ser paga de duas maneiras distintas:

(A) Uma parcela com pagamento um mês após a compra;
(B) Três parcelas mensais iguais sem juros, sendo o primeiro pagamento no ato da compra.

Se você fosse adquirir um produto dessa loja e o seu dinheiro fosse aplicado a 2,5% ao mês, qual seria sua melhor opção?

QUESTÃO 6

O dono da loja XX costuma iludir seus clientes com o anúncio de pagamento a prazo "sem juros". Ele tem por hábito embutir os juros das prestações no valor à vista. Ao anunciar: R$ 400,00 à vista ou em 2 prestações com entrada e juros de apenas 2% ao mês, qual seria o valor da prestação?

QUESTÃO 7

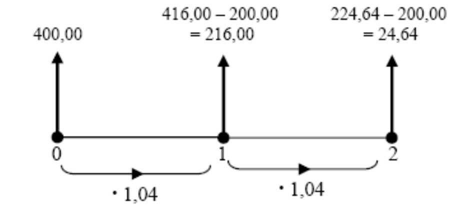
Considere o problema abaixo:

> A rede de lojas PontoCom oferece duas opções de pagamento na compra de um DVD, cujo preço anunciado é de R$ 400,00:
> (A) Em duas parcelas mensais e iguais, vencendo a primeira um mês após a compra.
> (B) Em quatro prestações mensais e iguais, vencendo a primeira no ato da compra.
> André pretende adquirir o aparelho. Qual a sua melhor opção se ele aplica o seu dinheiro à taxa de 4% ao mês?

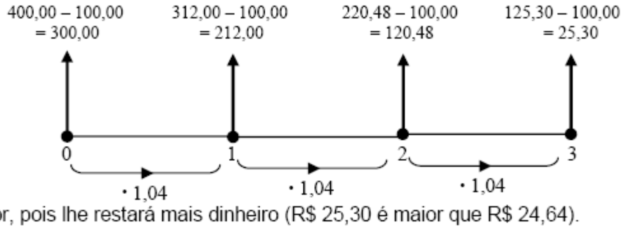
Um aluno resolveu o problema da seguinte maneira:

RESOLUÇÃO DO ALUNO

Opção A
Valor da prestação:
400 : 2 = 200



Opção B
Valor da prestação:
400 : 4 = 100



Resposta: A opção B é a melhor, pois lhe restará mais dinheiro (R$ 25,30 é maior que R$ 24,64).

A conclusão do aluno está errada. Explique por que o aluno errou e resolva o problema.

QUESTÃO 8

(PROJETO FUNDÃO) Investido todo mês R$50,00 em um fundo de capitalização que rende 4% ao mês, qual será o montante imediatamente após o 20º depósito?

QUESTÃO 9

A taxa mínima de atratividade de Diego é de 5% a.m. Ele possui aplicada a quantia necessária para comprar um fogão que tem duas opções de pagamento:

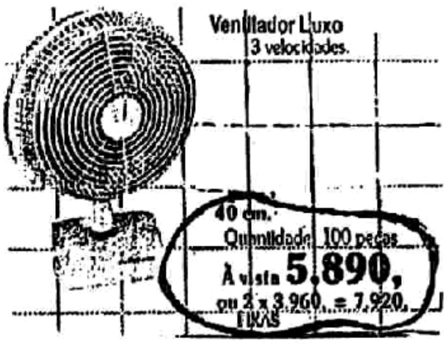
(A) à vista, com X% de desconto;

(B) em duas prestações mensais iguais, vencendo a primeira dois meses após a compra.

Considerando a taxa de atratividade a partir de que valor de X Diego escolherá a compra a prazo?

QUESTÃO 10

(UERJ-94) Leia o anúncio abaixo, publicado no jornal "O Dia" de 26/09/93.



Se um comprador dispusesse exatamente de CR$ 5.890,00 para a aquisição do ventilador, e optasse pela forma de pagamento em duas vezes, teria de quitar, no ato da compra a primeira parcela de CR$ 3.960,00. Restariam, assim, CR$ 1930,00 (CR$ 5.890,00 – CR$ 3.960,00) para pagar, 30 dias após, a segunda parcela de CR$ 3.960,00.

Suponha que os CR$ 1.930,00 restantes venham a ser aplicados no mercado financeiro até o dia do pagamento da segunda parcela de CR$ 3.960. Nesse caso, os CR$ 1.930,00 teriam de render para saldar a dívida aproximadamente, o mínimo de:

(A) 34,5 %
(B) 50,5 %
(C) 55 %
(D) 80%
(E) 105%

QUESTÃO 11

Compre à vista ou em 3 vezes sem juros, com entrada. Quanto você deveria exigir de desconto na compra à vista, se você aplica seu dinheiro na poupança cuja taxa de juro mensal é de 1,3%?

QUESTÃO 12

(UFRJ – Especialização em ensino de matemática – Seleção 2007) Um software é anunciado por uma firma com duas opções de pagamento: R$ 200,00 à vista, ou em dois pagamentos iguais, sendo o primeiro no ato da compra e o segundo um mês depois.

a) Qual a taxa dos juros embutidos no valor financiado, se cada pagamento é de R$ 120,00?

b) Qual deve ser o valor de cada pagamento na modalidade a prazo, se a taxa de juros é de 30%?

ANEXO 11 – Ficha do observador (modelo)

FICHA DO OBSERVADOR – SESSÃO 1

Observador: ____

Dupla: ____

Quanto à questão 1:

- Inicio:
- Os alunos interpretam corretamente o enunciado da questão?
- Quantas vezes e sobre o quê solicitaram ajuda?
- Obtiveram os resultados com a calculadora, no papel ou mentalmente?
- Quanto às interações sociais entre os alunos: será que só um está resolvendo? Qual é a sua atitude ao compartilhar os dados com o colega?
- Usaram o eixo das setas ou outro método para resolver a questão? Se usaram outro método, qual?
- Se usaram o eixo das setas, este foi usado no início (como um auxiliar na resolução) ou no fim (para organizar a resposta)?

Conclusão

( ) responderam com facilidade.

( ) tiveram um pouco de dificuldade em ____

( ) não conseguiram responder.

( ) não tentaram resolver.

- Comentários adicionais:

Quanto à questão 2:

- Inicio:
- Os alunos interpretam corretamente o enunciado da questão?
- Quantas vezes e sobre o quê solicitaram ajuda?
- Obtiveram os resultados com a calculadora, no papel ou mentalmente?
- Quanto às interações sociais entre os alunos: será que só um está resolvendo? Qual é a sua atitude ao compartilhar os dados com o colega?
- Usaram o eixo das setas ou outro método para resolver a questão? Se usaram outro método, qual?
- Se usaram o eixo das setas, este foi usado no início (como um auxiliar na resolução) ou no fim (para organizar a resposta)?

Conclusão

( ) responderam com facilidade.
( ) tiveram um pouco de dificuldade em ____
( ) não conseguiram responder.
( ) não tentaram resolver.

- Comentários adicionais:

Quanto à questão 3:

- Inicio:
- Os alunos interpretam corretamente o enunciado da questão?
- Quantas vezes e sobre o quê solicitaram ajuda?
- Obtiveram os resultados com a calculadora, no papel ou mentalmente?
- Quanto às interações sociais entre os alunos: será que só um está resolvendo? Qual é a sua atitude ao compartilhar os dados com o colega?
- Usaram o eixo das setas ou outro método para resolver a questão? Se usaram outro método, qual?
- Se usaram o eixo das setas, este foi usado no início (como um auxiliar na resolução) ou no fim (para organizar a resposta)?

Conclusão
(   ) responderam com facilidade.
(   ) tiveram um pouco de dificuldade em ____
(   ) não conseguiram responder.
(   ) não tentaram resolver.

- Comentários adicionais:

Quanto à questão 4:

- Inicio:
- Os alunos interpretam corretamente o enunciado da questão?
- Quantas vezes e sobre o quê solicitaram ajuda?
- Obtiveram os resultados com a calculadora, no papel ou mentalmente?
- Quanto às interações sociais entre os alunos: será que só um está resolvendo? Qual é a sua atitude ao compartilhar os dados com o colega?
- Usaram o eixo das setas ou outro método para resolver a questão? Se usaram outro método, qual?
- Se usaram o eixo das setas, este foi usado no início (como um auxiliar na resolução) ou no fim (para organizar a resposta)?

Conclusão
(   ) responderam com facilidade.
(   ) tiveram um pouco de dificuldade em ____
(   ) não conseguiram responder.
(   ) não tentaram resolver.

- Comentários adicionais:

Quanto à questão 5:

- Inicio:
- Os alunos interpretam corretamente o enunciado da questão?
- Quantas vezes e sobre o quê solicitaram ajuda?
- Obtiveram os resultados com a calculadora, no papel ou mentalmente?
- Quanto às interações sociais entre os alunos: será que só um está resolvendo? Qual é a sua atitude ao compartilhar os dados com o colega?
- Usaram o eixo das setas ou outro método para resolver a questão? Se usaram outro método, qual?
- Se usaram o eixo das setas, este foi usado no início (como um auxiliar na resolução) ou no fim (para organizar a resposta)?

Conclusão
(   ) responderam com facilidade.
(   ) tiveram um pouco de dificuldade em ____
(   ) não conseguiram responder.
(   ) não tentaram resolver.

- Comentários adicionais:

Quanto à questão 6:

- Inicio:
- Os alunos interpretam corretamente o enunciado da questão?
- Quantas vezes e sobre o quê solicitaram ajuda?
- Obtiveram os resultados com a calculadora, no papel ou mentalmente?
- Quanto às interações sociais entre os alunos: será que só um está resolvendo? Qual é a sua atitude ao compartilhar os dados com o colega?
- Usaram o eixo das setas ou outro método para resolver a questão? Se usaram outro método, qual?
- Se usaram o eixo das setas, este foi usado no início (como um auxiliar na resolução) ou no fim (para organizar a resposta)?

Conclusão

( ) responderam com facilidade.

( ) tiveram um pouco de dificuldade em ____

( ) não conseguiram responder.

( ) não tentaram resolver.

- Comentários adicionais:

Quanto à questão 7:

- Inicio:
- Os alunos interpretam corretamente o enunciado da questão?
- Quantas vezes e sobre o quê solicitaram ajuda?
- Obtiveram os resultados com a calculadora, no papel ou mentalmente?
- Quanto às interações sociais entre os alunos: será que só um está resolvendo? Qual é a sua atitude ao compartilhar os dados com o colega?
- Usaram o eixo das setas ou outro método para resolver a questão? Se usaram outro método, qual?
- Se usaram o eixo das setas, este foi usado no início (como um auxiliar na resolução) ou no fim (para organizar a resposta)?

Conclusão
(   ) responderam com facilidade.
(   ) tiveram um pouco de dificuldade em ____
(   ) não conseguiram responder.
(   ) não tentaram resolver.

- Comentários adicionais:

Quanto à questão 8:

- Inicio:
- Os alunos interpretam corretamente o enunciado da questão?
- Quantas vezes e sobre o quê solicitaram ajuda?
- Obtiveram os resultados com a calculadora, no papel ou mentalmente?
- Quanto às interações sociais entre os alunos: será que só um está resolvendo? Qual é a sua atitude ao compartilhar os dados com o colega?
- Usaram o eixo das setas ou outro método para resolver a questão? Se usaram outro método, qual?
- Se usaram o eixo das setas, este foi usado no início (como um auxiliar na resolução) ou no fim (para organizar a resposta)?

Conclusão

( ) responderam com facilidade.

( ) tiveram um pouco de dificuldade em ____

( ) não conseguiram responder.

( ) não tentaram resolver.

- Comentários adicionais:

Conclusão da 1ª sessão:

- Dos 23 alunos da turma, existem ausentes? Quantos?

- Quais as reações dos alunos frente às situações?

- Quais as principais dificuldades apresentadas?

- Colocações feitas pelos alunos: angústias, felicidades, ...

- Observações pertinentes.