UNIOESTE - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ

CECE - CENTRO DE ENGENHARIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CAMPUS DE FOZ DO IGUAÇU

GEOMETRIA FRACTAL NUMA ABORDAGEM ETNOMATEMÁTICA

PAULO CESAR FASSINI BARBOSA

FOZ DO IGUAÇU - PR

2009

UNIOESTE - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CECE - CENTRO DE ENGENHARIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE FOZ DO IGUAÇU

GEOMETRIA FRACTAL NUMA ABORDAGEM ETNOMATEMÁTICA

PAULO CESAR FASSINI BARBOSA

Monografia de Graduação apresentada na disciplina de Monografia como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientação: Prof° Ms. Marcos Lübeck.

FOZ DO IGUAÇU - PR

2009

Dedico este trabalho a Deus, aos meus familiares e em especial a minha esposa. Sempre estiveram ao meu lado dando suporte para minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter traçado este caminho para minha vida, possibilitando tamanha alegria ao frequentar este curso, fazendo amizades verdadeiras.

Agradeço aos meus pais Paulo Cesar e Elizabeth que além do exemplo de vida, sempre participaram de minha educação, mesmo agora morando distante.

Agradeço a minha esposa Fernanda pelo carinho, pelo apoio e por estar sempre ao meu lado.

Agradeço a todos os professores que contribuiram para minha formação, especialmente ao meu orientador, professor Ms. Marcos Lübeck, que para mim é um exemplo de educador a ser seguido.

Agradeço aos amigos Anderson, Fernando e Juliano pelos inúmeros momentos de alegria, pelos estímulos dados nos momentos difíceis demonstrando exemplo de companheirismo.

Este trabalho só se tornou possível com a presença de todos esses citados.

“A abordagem a distintas formas de conhecer é a essência da Etnomatemática”.

(Ubiratan D’Ambrósio).

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho tem a pretensão de apresentar a intersecção da Geometria Fractal e da Etnomatemática, tomando a cultura de determinados grupos africanos como viés. Deste modo, ao olharmos para a arquitetura nada convencional desses grupos, notaremos que há uma desordem, uma aparente confusão, ou seja, o Caos. Porém, veremos que estas formas erráticas são bem representadas por fractais. Assim, apresentando a Geometria Fractal, o Caos e a Etnomatemática, tentaremos mostrar que a Matemática pode ser expressa de várias formas, em lugares menos esperados e por pessoas comuns.

Palavras-Chave: Geometria Fractal; Caos; Etnomatemática.

INTRODUÇÃO

O termo fractal surgiu na década de 1970 com Benoit Mandelbrot. Entretanto, várias formas já se encaixavam neste padrão da autosimilaridade, como por exemplo, os fractais clássicos do início do século passado como o de Cantor, que serviram de modelo para os estudos de Mandelbrot. O mais curioso ou intrigante é que em determinados grupos do passado, estes padrões já eram ubíquos em sua cultura, podendo ser observados na arquitetura, na pintura, na escultura, na metalurgia, na religião, no design têxtil e até no penteado.

> Enquanto a geometria fractal pode realmente nos levar para longe do alcance da ciência de alta tecnologia, seus padrões são surpreendentemente comuns nos designs africanos tradicionais, e alguns de seus conceitos básicos são fundamentais para os sistemas de conhecimento africano. (EGLASH, 2005a, p. 3)[1].

Assim, a pretensão deste trabalho é apresentar uma intersecção da Geometria Fractal com a Etnomatemática tendo como referência as construções (moradias) de determinados grupos africanos. Para isto, dividiremos o trabalho em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, apresentaremos suscintamente a Geometria Fractal com seu histórico e os principais personagens. Relacionaremos ainda o Caos com os fractais e, por fim, apresentaremos as suas principais características pelas quais estes entes geométricos se definem.

No segundo capítulo, apresentaremos a Etnomatemática e após conceituá-la, veremos sua íntima relação com o conceito de cultura; terminaremos o capítulo apresentando seu criador.

No terceiro capítulo, apresentaremos através de figuras (fotografias) a interseção da Geometria Fractal e da Etnomatemática, focando as arquiteturas de alguns grupos africanos.

No quarto capítulo, falaremos sobre a metodologia adotada para a elaboração desta monografia com a utilização de imagens e a dimensão educacional

---

[1] Tradução do original pelo autor desta Monografia.

da Etnomatemática, findando o texto com as considerações finais, seguidas das referências bibliográficas sobre as quais ele está embasado e anexos.

Porém, antes de adentrarmos nos capítulos propriamente ditos, vale fazermos algumas considerações acerca do tema, sua justificativa de escolha e a sua relevância aos estudos da Matemática e da Educação Matemática.

Eis que a natureza apresenta formas irregulares que a Geometria Euclidiana não descreve bem, mas, são bem representadas no computador pela Geometria Fractal. Os fractais estabelecem uma ordem na aparente desordem, ou seja, no Caos; sendo assim, a Geometria Fractal tornou-se a linguagem do Caos.

Outro conceito que surgiu a pouco tempo é o da Etnomatemática que é definida por seu criador, Ubiratan D`Ambrosio, como ferramentas ou instrumentos materiais e intelectuais para conhecer, aprender para saber e fazer como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais. Resumindo, é a Matemática de um determinado povo, na cultura de um grupo etno.

Portanto, ao olharmos as estruturas arquitetônicas de povos africanos, notamos uma desordem (Caos), que será ordenada pelos fractais (Geometria Fractal), que refletem a Cultura de um povo (Etnomatemática). Ou seja, é a cultura estabelecendo a ordem, resolvendo problemas reais de grupos distintos.

Assim, um dos motivos de ingressar no curso de Matemática, foi o de aprofundar o conhecimento na área da Geometria e de conhecer a disciplina Cálculo que apavora a maioria e que serve também como grande ferramenta para encontrar distâncias, áreas e volumes de certas figuras. Fiquei ainda mais interessado quando soube que a Geometria Euclidiana tinha algumas inconsistências e que existiam outras Geometrias que descreviam melhor certas situações.

Já no primeiro ano de curso, fui convidado a realizar uma pesquisa sobre Geometria Fractal, o que me estimulou muito. No segundo ano de curso fui instrutor de Geometria Euclidiana, e cursei a disciplina Prática de Ensino II, ministrada pelo meu orientador, o professor Marcos Lübeck, quando fui apresentado à Etnomatemática e soube que era sua linha de pesquisa.

Ao realizar um trabalho sobre Etnomatemática, tive a idéia de unir os dois assuntos: Geometria Fractal e Etnomatemática. O professor gostou da idéia, disse que seria possível. Daí, surgiu a motivação para este trabalho, envolver a Geometria com a Matemática de grupos excluídos, mostrando que ela não é feita apenas por grandes e reconhecidos matemáticos, algo que é extremamente relevante para a educação desta ciência, pois atesta a sua diversidade, desmistificando-a.

CAPÍTULO I – GEOMETRIA FRACTAL

1.1. HISTÓRICO e PRINCIPAIS PERSONAGENS

Formas geométricas com propriedades especiais foram estudadas nos séculos XIX e XX. Estas formas foram denominadas Fractais em 1975 por Benoit Mandelbrot por possuírem a característica da auto-similaridade, ou seja, qualquer de suas partes é semelhante ao todo, ao conjunto. Segundo Barbosa (2005), Mandelbrot denominou essas formas de fractais, baseando-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar. O estudo desses fractais é objetivo da Geometria Fractal.

Antes da definição apresentada de fractais, alguns objetos matemáticos já possuíam tais características, dentre eles o Conjunto de Cantor; a Curva de Peano; a Curva de Hilbert; a Curva de Koch; a Curva, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski; e finalmente o de Fatou e Julia. Estes objetos eram conhecidos como “demônios” e acreditava-se que não teriam grande valor científico. Os fractais só se desenvolveram a partir da década de 1960 com o auxílio dos computadores, concedendo a Mandelbrot o título de pioneiro da Geometria Fractal.

Benoit Mandelbrot, de família judia, nasceu em Varsóvia no ano de 1924. Em 1936 sua família se mudou para Paris. Antecipando-se ao nazismo, deslocaram-se para Tulle. Mais tarde, submeteu-se aos exames de admissão da Escola Normal e da Escola Politécnica, sendo aprovado em ambas. Iniciou pela Escola Normal, permanecendo por pouco tempo, passando à Escola Politécnica. Não suportando as idéias do clube Bourbaki, grupo de jovens matemáticos que visavam uma Matemática formal e pura à qual predominava a abstração, que tinha como membro seu tio Szolem Mandelbrot, Benoit deixou a França em 1948, indo estudar Ciência Aerospacial nos Estados Unidos. Logo em seguida, conseguiu um cargo na IBM – Centro de pesquisas Thomas Watson, que na época prestigiava projetos de pesquisa, onde iniciou seus estudos com problemas de economia. Na IBM, ao deparar-se com um problema que tinha como características a aleatoriedade e a irregularidade de ruídos, resolveu-o empregando um trabalho de Georg Cantor. Ele sabia que esses padrões não podiam ser descritos por métodos estatísticos existentes, e constatou que todas estas formas e padrões, possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza. Com o passar dos anos e com o auxílio de computadores, encontrou aplicações de suas idéias em diversas áreas. Passou a ocupar vários cargos acadêmicos, dentre eles o de professor em Harvard e de Fisiologia na Faculdade Einstein de Medicina. Dentre vários livros publicados, sua obra reformulada e mais famosa foi *The Fractal Geometry of Nature* (1977). O Conjunto de Mandelbrot é um dos fractais mais conhecidos, sendo feito com recursos computacionais, como na figura 1.

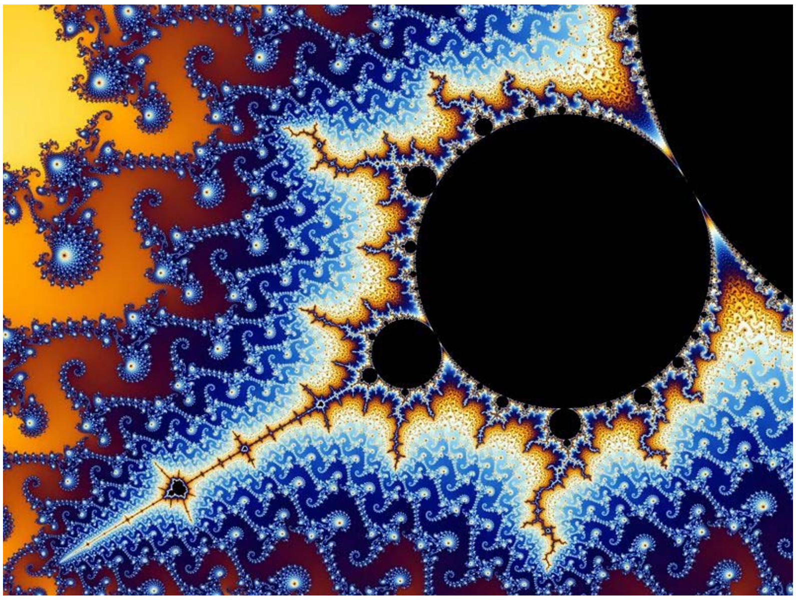


FIGURA 1: Conjunto de Mandelbrot[2].

Georg Cantor descendente de portugueses nasceu na Rússia no ano de 1845 e morreu em 1918. Adotou nacionalidade alemã e foi professor da Universidade de Hale. Cantor é considerado o fundador da Teoria dos Conjuntos, pois seu desenvolvimento se deu por volta de 1870 quando pesquisava a teoria das séries infinitas e tópicos de análise; ele dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da Matemática. Dentre suas contribuições

[2] <(http://www.wikieducator.org/Digital_art_timeline#1978:_Mandelbrot_Set)>. Acessado em 29/10/2009.

temos a *Contribution to the founding of the Theory of Transfinite Numbers*, traduzida em 1915; um paradoxo conhecido como “Conjunto de todos conjuntos” e o “Conjunto de Cantor ” ou “Poeira de Cantor”, em que considerou um segmento de reta, dividiu o segmento em três partes iguais eliminando o central; então repetiu esta construção em cada segmento, sucessivamente e indefinidamente.

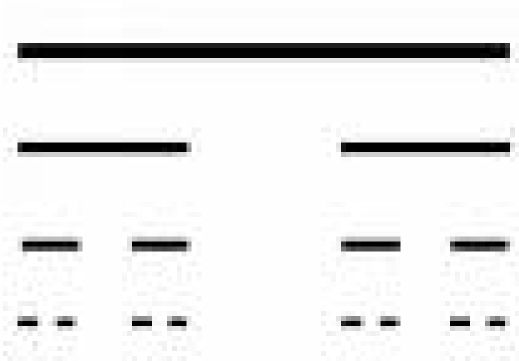


FIGURA 2: Poeira de Cantor[3].

Giusepe Peano nasceu na Itália no ano 1858 em Cuneo e morreu no ano 1932 em Turim onde foi professor da Academia Militar (onde Lagrande também trabalhou por volta de 1755). Peano trouxe inúmeras contribuições para a Matemática. Segundo Barbosa (2005), a parte primeira da Enciclopédia de Matemática italiana traz cerca de quatro dezenas de referências e na parte segunda, traz aproximadamente uma centena. Sem contar o seu alto nível de precisão e rigor lógico, introduziu símbolos utilizados ainda hoje; e parece que foi um dos primeiros a dar uma definição formal de espaço vetorial. Em 1890, aprofundando as noções de continuidade e dimensionamento, publicou uma curva que cobria totalmente uma superfície plana quadrangular, a “Curva de Peano”. Esta curva inicia-se com um segmento de reta, substitui-se por uma curva de nove segmentos (escala 1/3) e em seguida, substitui-se cada segmento anterior pela curva de nove segmentos e assim sucessivamente. Mandelbrot disse que sua obra foi importante para o relacionamento de uma nova geometria com a natureza.

[3] <(http://www.ced.ufsc.br/men5185/trabalhos/28_fractal/dimfract.html)>. Acessado em 29/10/2009.

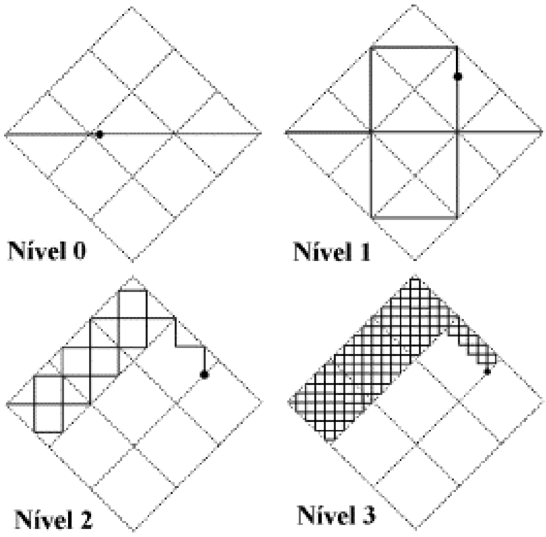


FIGURA 3: Construção da Curva de Peano[4].

David Hilbert nasceu na antiga Prússia em 1862 próximo a Königsberg e faleceu em 1943. Em 1885 obteve seu doutorado e transferiu-se para Göttingen. Segundo Barbosa (2005), a maior contribuição de Hilbert para a Matemática foi relativa à abordagem axiomática da Geometria Euclidiana, tornando-se o principal representante do formalismo que procurou retirar da Matemática qualquer conotação intuitiva. Dentre suas obras, detaca-se *Grund lagen (fundamentos) der Geometrie* (1899). Em 1891 apresentou sua curva de cobertura da superfície de um quadrado num encontro em Bremen. Nesta apresentação, inicia com a citação da Curva de Peano, sendo que "Hilbert é considerado um dos maiores matemáticos do século XX; no ano de 1900 apresentou no congresso Internacional de Matemática em Paris uma famosa lista contendo 23 problemas, alguns destes ainda não foram resolvidos"[5].

A curva de Hilbert dá-se num quadrado dividido em quatro quadrados, dos centros dos quadrados menores inicia-se a curva ligando-os, substitui-se cada quadrado por novos quatro quadrados com a mesma construção da curva iniciadora, ligando cada curva parcial com um segmento na mesma ordem dos anteriores, e assim procede-se sucessivamente.

---

4 <(www.inf.ufsc.br/~visao/2000/fractais/index.html)>. Acessado em 29/10/2009.
5 <(http://pt.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert)>. Acessado em 29/10/2009.

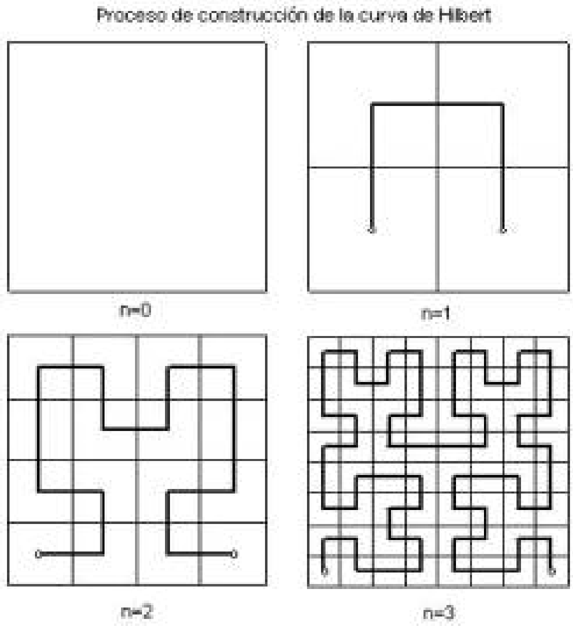


FIGURA 4: Construção da Curva de Hilbert[6].

Helge Von Koch, matemático polonês que em 1904 e 1906 introduziu uma curva que é conhecida por “Curva de Koch”. Esta curva é um bom exemplo de curva sem tangente, podendo ser modificada com outras construções análogas e deve ter influenciado Benoit Mandelbrot por lembrar uma linha costeira. Para obter a Curva de Koch, considera-se um segmento de reta (nível 0), dividindo-o em três segmentos iguais, troca-se o segmento intermediário por um triângulo equilátero sem a base (nível 1), aplica-se então este processo em cada um dos segmentos (nível 2) e assim sucessivamente e iterativamente.

[6] <(http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/ExpoHistoria/caricaturas/Catala/Caricatura24.asp)>. Acessado em 29/10/2009.

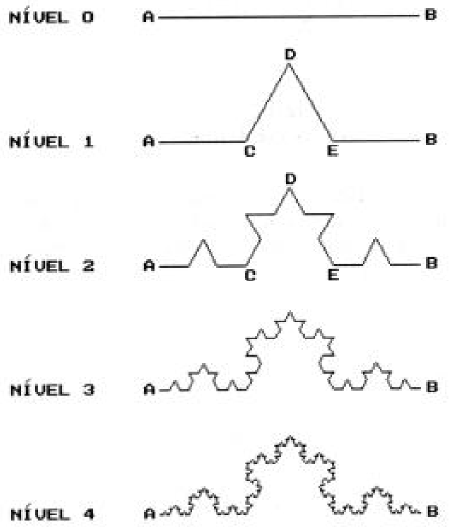


FIGURA 5: Curva de Koch[7].

Waclaw Sierpinski, matemático polonês, nasceu em 1882 e morreu em 1969, foi professor em Lvov e Wariaw. Uma das crateras da lua leva seu nome devido sua grande reputação na década de 1920. Seus famosos fractais, ou melhor, por sua época, seus famosos "monstros" são o "Triângulo" e o "Tapete de Sierpinski". A construção do triângulo consiste inicialmente num triângulo equilátero, marca-se os pontos médios deste formando quatro triângulos equiláteros, elimina-se o central, atribuindo-lhe uma outra cor; aplica-se esta construção nos demais triângulos sucessivamente.

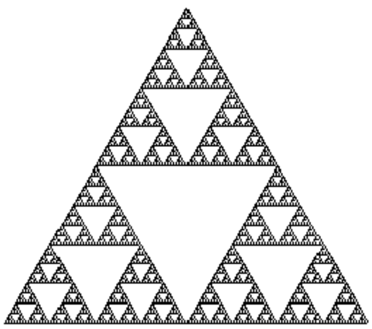


FIGURA 6: Triângulo de Sierpinski[8].

7 <(www.inf.ufsc.br/~visao/2000/fractais/index.html)>. Acessado em 29/10/2009.
8 <(http://omnis.if.ufrj.br/~carlos/infoenci/projetos/fractais/fractais.html)>. Acessado em 29/10/2009.

A construção do Tapete de Sierpinski se dá de forma análoga ao triângulo, porém considera-se um quadrado, dividindo-o em nove outros quadrados evidenciando o central, repete-se o processo sucessivamente nos outros quadrados.

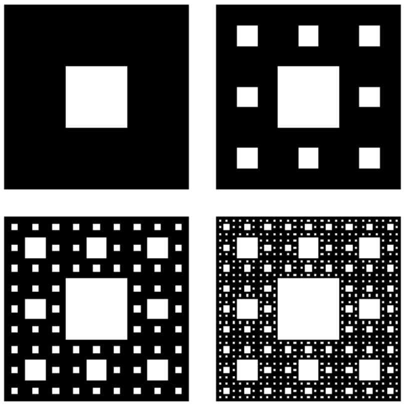


FIGURA 7: Tapete de Sierpinski[9].

Pierre Fatou, nasceu em 1878 e morreu em 1929, e Gaston Julia, nasceu em 1893 e morreu em 1978, ambos franceses. Estes matemáticos, do período da primeira guerra mundial, tiveram seus trabalhos aproveitados e desenvolvidos computacionalmente por Mandelbrot, hoje conhecidos por Conjunto de Mandelbrot e Conjuntos de Julia. Gaston Julia, serviu como soldado na guerra e infelizmente foi gravemente ferido, perdendo seu nariz. Seu principal trabalho foi feito enquanto se recuperava no hospital, uma publicação de 199 páginas aos 25 anos de idade.

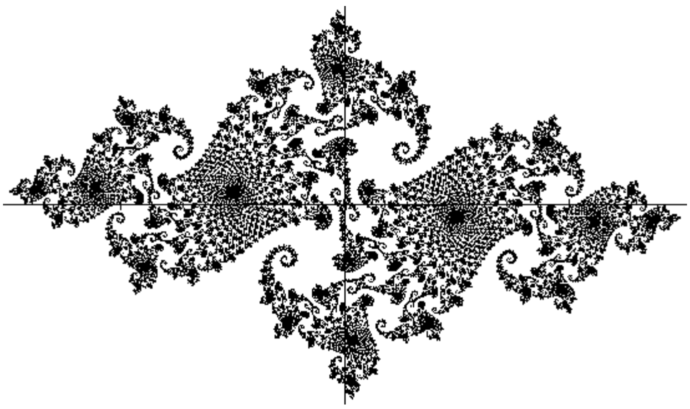


FIGURA 8: Conjunto de Julia[10].

[9] <(http://mathforum.org/advanced/robertd/carpet.html)>. Acessado em 29/10/2009.
[10] <(http://scienceblogs.com/goodmath/2007/08/the_julia_set_fractals.php)>. Acessado em 29/10/2009.

1.2. CAOS e FRACTAL

Com a evolução da computação, outra ciência obteve grande desenvolvimento, o Caos. Pelo dicionário Aurélio (2004), caos significa:

> Grande confusão ou desordem; comportamento praticamente imprevisível exibido em sistemas regidos por leis deterministas, e que se deve ao fato de as condições não-lineares que regem a evolução desses sistemas serem extremamente sensíveis a variações, em suas condições iniciais; assim, uma pequena alteração no valor de um parâmetro pode gerar grandes mudanças no estado do sistema, à medida que este tem uma evolução temporal.

Um simples exemplo disso é a formação de uma nuvem que se desenvolve com base em vários fatores, como o calor, o frio, ventos, eventos sobre a superfície e inúmeros outros. A identificação de um comportamento caótico, pode auxiliar à compreensão do comportamento de um sistema ao longo do tempo.

Muitos fenômenos caóticos exibem estruturas fractais, sendo assim, a Geometria Fractal com suas formas complexas e belas, tornou-se a linguagem do Caos, fornecendo certa ordem à desordem e interligando temas não relacionados pelos padrões de "irregularidades".

Segundo Mandelbrot, "o mundo que nos cerca é caótico, mas podemos tentar limitá-lo no computador. A geometria fractal é uma imagem muito versátil que nos ajuda a lidar com os fenômenos caóticos e imprevisíveis."

> Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones, etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (BARBOSA, 2005, p.10).

A Geometria Euclidiana foi eficiente para demonstrar as formas do mundo derivadas do ser humano. Mas, deficiente para descrever as complexas formas derivadas da natureza. Sendo assim, as

> [...] deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios,

> pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes. (BARBOSA, 2005, p. 19).

Diríamos quase sempre eficiente, uma vez que as construções africanas, por exemplo, são feitas pelo homem e descritas pela Geometria Fractal e não pela Euclidiana. Talvez, por motivos como este, Barbosa (2005) utilizou o termo “em geral” na segunda linha da citação supracitada.

Podemos então ver os fractais como representações computacionais de formas complexas, ou melhor, de formas que apresentam padrões de “irregularidades” sejam de origem natural como nos rios, plantas, nuvens, interligações microscópicas de vasos sanguíneos ou de origem humana como nas construções de edifícios, nas artes, em cotações da bolsa.

> São inumeras as formas que se explicam pela geometria fractal – essas curvas invariantes, qualquer que seja a escala de observação: um detalhe aumentado é idêntico ao conjunto do qual ele se originou. O formato das nuvens ou as flutuações das bolsas de valores são hoje em dia resolvidos com essa ferramenta matemática, usada também para decifrar a arquitetura e o urbanismo africanos. (EGLASH, 2005b, p. 66).

É comum encontrarmos textos tratando nuvens ou plantas como fractais naturais, porém, na verdade, não temos fractais na natureza e sim estruturas fractais. Veremos que uma das características dos fractais é o “infinito” ou a “complexidade infinita”, sendo que esta não aparece na natureza. Assim como edifícios também não são fractais, os arquitetos se utilizam de estruturas fractais. As figuras 9 e 10 ilustram bem essa idéia.

FIGURA 9: Brócolis Romanesco[11].

A figura seguinte é uma configuração de bolhas de água utilizando um padrão fractal, usado nas olimplíadas de 2008 em Pequim.

FIGURA 10: Watercube[12].

1.3. CARACTERÍSTICAS e DEFINIÇÃO

As características essenciais da Geometria Fractal, segundo Eglash (2005a), são: recursão, escala, auto-similaridade, infinito e dimensão fracionária. Ao final

[11] <(http://www.fourmilab.ch/images/Romanesco/)>. Acessado em 29/10/2009.
[12] <(http://gizmodo.com/tag/watercube/)>. Acessado em 29/10/2009.

deste capítulo, veremos que para fins educacionais, adotaremos o conceito da auto-similaridade para conceituar os fractais. Entretanto, para uma conceituação mais rigorosa, consideraremos as cinco características citadas acima por Eglash (2005a).

Os fractais são gerados por um processo circular, um ciclo em que a saída de um estágio torna-se a entrada para um novo estágio. Os resultados são repetidos várias vezes de modo que a mesma operação possa ser realizada novamente. Isso é referido como "recursividade", um conceito muito poderoso. Existem três tipos diferentes de recursão mas, consideremos recursão como "ciclo de realimentação iterativo". Podemos criar uma abstração matemática em que a recursão continue para sempre mas, nas curvas de Koch por exemplo, podemos parar em uma das linhas para que não fique muito pequeno para a impressão. Na verdade, qualquer objeto fisicamente existente somente será fractal dentro de um determinado intervalo de escalas.

Ao olharmos para a costa de um continente, veremos uma forma irregular, e se olharmos para um pequeno pedaço do litoral, continuaremos a ver irregularidades semelhantes. Estas semelhanças podem ser observadas mesmo de pé sobre a terra à procura de uma rocha. Na verdade são aproximadamente semelhantes, sendo bom só para um determinado intervalo de escalas, mas é surpreendente para perceber bem como funciona para muitas das suas características naturais. É esta "escala" de propriedade da natureza que permite a Geometria Fractal ser tão eficaz para a modelagem.

Ter uma forma de "escala" significa que existem padrões semelhantes em diferentes escalas dentro do intervalo considerado. Ampliando uma pequena seção será produzido um padrão parecido com o quadro todo, e diminuir o todo nos dará algo que se parece com uma pequena parte.

Para que padrões semelhantes qualifiquem-se como um fractal, matemáticos definiram a "auto-similaridade estatística", por exemplo, o caso do litoral, e "auto-similaridade exata", como no caso da Curva de Koch. Na auto-similaridade exata precisamos ser capazes de mostrar uma réplica exata do todo, pelo menos em algumas de suas partes. Na Curva de Koch, uma réplica exata do seu conjunto, pode ser encontrada em qualquer seção do fractal ("estritamente auto-semelhante"), mas isso não é verdade para todos os fractais.

Os fractais de ramificação usados para modelar os pulmões e a acácia, (figura 11 e figura 12, por exemplo), tem partes que não contêm uma pequena imagem do todo. Ao contrário da Curva de Koch, que não foram gerados substituindo todas as linhas em forma de semente com uma versão em miniatura da semente, em vez disso, usamos algumas linhas passivas onde foram realizadas as iterações, embora sem alteração, além de linhas ativas, que criou uma ponta crescente pela substituição usual recursiva (figura 12).

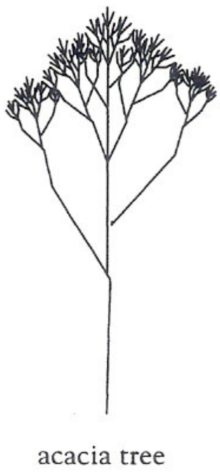


FIGURA 11: Acácia[13].

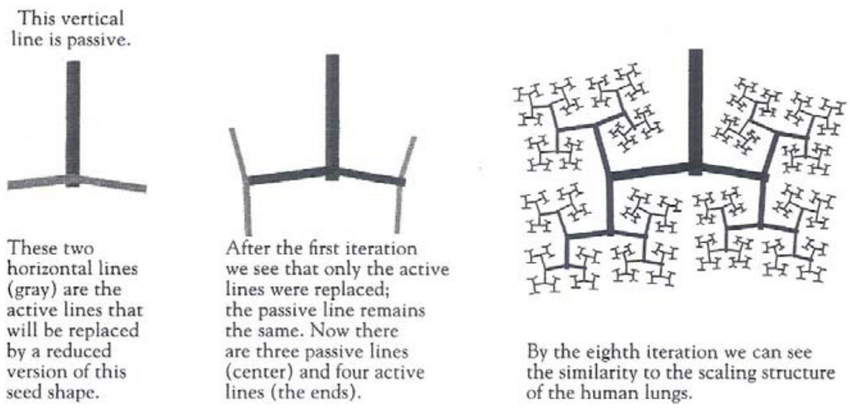


FIGURA 12: Construção Recursiva de Forma Natural[14].

[13] Eglash (2005a, p. 16).
[14] Eglash (2005a, p. 16).

O “infinito” ou “complexidade infinita” é uma característica dos fractais que significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores. Não há nenhuma maneira de conectar a idéia da dimensão sem usar o infinito, e para muitos matemáticos este é o seu papel crucial.

A Curva de Koch, ou qualquer membro de sua família fractal, tem comprimento infinito em um limite finito. Estamos acostumados a pensar na dimensão como apenas números inteiros, mas na Geometria Fractal temos dimensões fracionárias. Considere, por exemplo, a dimensão crescente das Curvas de Koch (figura 13). Acima do topo, podemos ir tão perto quanto quisermos de uma linha de dimensão. Abaixo da base, poderíamos fazer a curva tão incomum que ela começaria a dividir em duas áreas dimensionais do plano. No meio, precisamos de uma dimensão quebrada, fracionária.

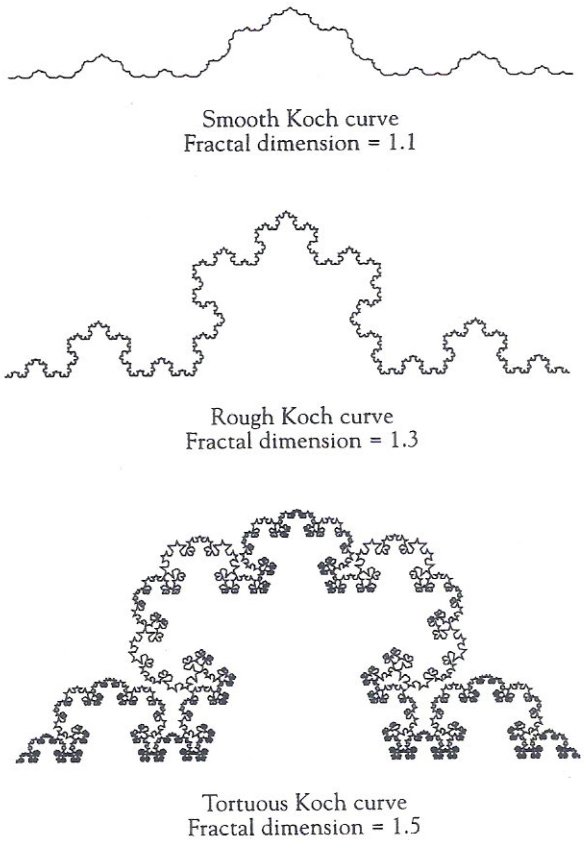


FIGURA 13: Dimensões Crescentes da Curva de Koch[15].

---

[15] Eglash (2005a, p. 15).

Várias autores já tentaram expressar uma definição formal para a Geometria Fractal, dentre eles, o próprio Mandelbrot: “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica”. (*apud* BARBOSA, 2005, p. 18).

Outro exemplo foi o de K. J. Falconer que sugeriu o entendimento de fractal por caracterizações:

> Um confunto F é fractal se, por exemplo:
> - F possui alguma forma de “auto-similaridade” ainda que aproximada ou estatística;
> - A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
> - O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo. (*apud* BARBOSA, 2005, p. 18).

Houve inúmeras tentativas para conceituar a Geometria Fractal contudo, ainda não temos a definição. A apresentada por Mandelbrot por exemplo, não satisfez nem a ele próprio.

> Nota-se do exposto que o conceito de fractal ainda tem muito a desejar, principalmente no caso de se querer uma definição formal, que caiba ao ser e só ao ser. Entretanto, essa dificuldade não deve ser obstáculo na Educação, à qual pode simplesmente convir uma conceituação simples e de fácil compreensão e entendimento. Bastará considerarmos a auto-similaridade. (BARBOSA, 2005, p. 19).

CAPÍTULO II – ETNOMATEMÁTICA

Conhecemos uma Matemática eurocêntrica, que foi difundida pelo mundo a partir das grandes navegações, sendo que, os avanços desta ciência até o início do século XX, são atribuídos aos europeus.

> A matemática tem sido conceituada como a ciência dos números e das formas, das relações e das medidas, das inferências, e as suas características apontam para precisão, rigor, exatidão. Os grandes heróis da matemática, isto é, aqueles indivíduos historicamente apontados como responsáveis pelo avanço e consolidação dessa ciência, são identificados na antiguidade grega e, posteriormente, na Idade Moderna, nos países centrais da Europa, sobretudo Inglaterra, França, Itália, Alemanha. Os nomes mais lembrados são Tales, Pitágoras, Euclides, Descartes, Galileu, Newton, Leibniz, Hilbert, Einstein, Hawkings. São idéias e homens originários da Europa, ao norte Mediterrâneo. (D`AMBROSIO, 2002, p. 113).

Como citado no exposto acima, ilustres matemáticos como Hilbert fizeram a Matemática axiomática e “perfeita” que conhecemos. Outros como Mandelbrot, com o auxílio de novas tecnologias, aperfeiçoaram conceitos que ainda não tinham aplicação. Mas a Matemática é feita ou refeita a todo instante e em lugares menos esperados. É daí que surge a Etnomatemática.

> Indivíduos e povos têm ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos materiais e intelectuais (que chamo *ticas*) para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer (que chamo de *matema*) como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais (que chamo de *etnos*). Daí chamar o exposto acima de Programa Etnomatemática. (D`AMBROSIO, 2002, p. 60).

Após lermos o conceito de Etnomatemática, podemos notar que lembra o conceito de cultura, pois trata de povos, sobrevivência, conhecimento, enfim, caracteres que estão intimamente ligados. De fato, pois, segundo o dicionário Aurélio (2004), cultura é:

> A parte ou o aspecto da vida coletiva, relacionados à produção e transmissão de conhecimentos, à criação intelectual e artística, etc.
> O processo ou estado de desenvolvimento social de um grupo, um povo, uma nação, que resulta do aprimoramento de seus valores, instituições, criações, etc.
> O conjunto complexo dos códigos e padrões que regulam a ação humana individual e coletiva, tal como se desenvolvem em uma

> sociedade ou grupo específico, e que se manifestam em praticamente todos os aspectos da vida: modos de sobrevivência, normas de comportamento, crenças, instituições, valores espirituais, criações materiais, etc.

E ainda,

> ao reconhecer que os indivíduos de uma nação, de uma comunidade, de um grupo compartilham seus conhecimentos, tais como a linguagem, os sistemas de explicações, os mitos e cultos, a culinária e os costumes, e têm seus comportamentos compatibilizados e subordinados a sistemas de valores acordados pelo grupo, dizemos que esses indivíduos pertencem a uma cultura. (D`AMBROSIO, 2002, p. 18).

Ao lermos a definição de Etnomatemática e logo após a de cultura do dicionário Aurélio (2004) e a de D`Ambrosio (2002), podemos notar que realmente tratamos do mesmo assunto. Os dois abordam a cultura como as formas de conhecimento de grupos, de sociedades. Isto não é coincidência, pois:

> O grande motivador do programa de pesquisa que denomino Etnomatemática é procurar entender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade, contextualizado em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações. (D`AMBROSIO, 2002, p. 17).

Portanto, podemos ver a Matemática como um produto cultural, e que está relacionada a grupos específicos. Com isso, percebemos que a nossa Matemática é uma Etnomatemática, uma vez que veio de um grupo bem definido. E para que sua divulgação seja efetivada, devemos contextualizá-la, respeitando a cultura de outros povos e procurando as várias formas de conhecer para que possamos compreendê-la de forma mais ampla; este é o objetivo da Etnomatemática.

Ubiratan D’Ambrosio é um dos pioneiros no estudo da Etnomatemática, sendo que em 1985 utilizou pela primeira vez este termo em seu livro *Etnomathematics and its Place in the History of Mathematic*, onde o tema está inserido dentro da História da Matemática. Ubiratan diz que já havia utilizado este termo em 1978 numa conferência, que pronunciou na Reunião Anual da Associação Americana para o Progresso da Ciência, a qual infelizmente não foi publicada.

Ubiratan D’Ambrosio nasceu em São Paulo no ano de 1932, é Bacharel e Licenciado em Matemática USP, doutor em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos (USP) e pós-doutorado pela Brown University, nos Estados Unidos. É professor Emérito de Matemática da Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP.

Orienta pós-graduação e leciona em várias universidades do país e do exterior. É fundador do ISGEm/International Study Group on Ethnomathematics; ex-presidente da Sociedade Brasileira de História da Matemática e membro do Conselho Científico do Museu de Astronomia e Ciências Afins/MAST do Ministério de Ciência e Tecnologia. Em 2006 ganhou a medalha Felix Klein, a maior condecoração mundial da Matemática, do ICMI (International Comission on Mathematics Instruction).

Este autor e pesquisador sempre preocupado em relacionar teoria e prática em Educação Matemática, com um olhar Etnomatemático, afirmou que:

> [...] o verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em um outro contexto, novo. Isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para uma situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da Matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino. (D'AMBROSIO, 1986, p. 44).

É com esta perspectiva que procuramos estudar algumas produções culturais sob a égide da Etnomatemática, inclusive neste trabalho investigativo.

CAPÍTULO III - A INTERSEÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL COM A ETNOMATEMÁTICA

Mesmo sem saber o significado de fractais, e sem mesmo nunca ter ouvido falar de grandes matemáticos, alguns grupos africanos sem a pretensão de inovar o mundo com novas tendências, têm a Geometria Fractal amplamente difundida em seu meio. Os fractais desses grupos, são observados na arquitetura, na pintura, na escultura, na metalurgia, na religião, no design têxtil e até no penteado[16]. Vejamos alguns exemplos de construções fractais africanos que possuem uma grande variedade de associações culturais, como parentesco, práticas de trabalho, política e religião.

A figura 14 mostra uma foto aérea da cidade de Logone-Birni na região nordeste de Camarões. Esta cidade foi fundada há séculos pelo povo Kotoko. Eles utilizaram argila para criar enormes complexos de construções retangulares. Cada complexo foi criado por um processo chamado arquitetura por acreção, ou seja, um processo de aglomeração de elementos naturais, neste caso a argila. Os kotokos acrescentaram compartimentos retangulares em retângulos pré existentes. Estes compartimentos ou recintos, frequentemente incorporaram as paredes de duas ou mais das mais antigas, tendendo a ficar cada vez maiores conforme nos afastamos do centro. Como resultado final temos os retângulos dentro de retângulos.

O povo kotoko explica essa formação como uma expansão do agregado familiar, ou seja, eles aumentavam para que os filhos morassem próximo, além da necessidade histórica de defesa, onde os muros mais externos são mais altos. Podemos observar a auto-similaridade e as escalas nas figuras 14 e 15, portanto, uma estrura de um fractal retangular, como mostra a figura 16 com suas três primeiras iterações.

Segundo Eglash (2005a), a escala não é simplesmente resultado de uma dinâmica social inconsciente, é também uma técnica prática aplicada como

[16] Veja alguns exemplos em Anexo.

classificação social. Como mostra a figura 15, o maior complexo, que é o palácio do chefe.

FIGURA 14: Vista Aérea da Cidade de Logone-Birni em Camarões[17].

O maior complexo de construção, no centro, configura o palácio do chefe da cidade.

> Da entrada do palácio à sala do trono, o visitante percorre uma espiral retangular, chamada “caminho de luz”, cujos lados diminuem regularmente após cada ângulo. À medida que progride (em cada alteração de escala), o visitante adota uma linguagem mais polida e respeitosa. Uma vez na sala do trono, ele já não está usando seus calçados, e seu linguajar é particularmente preciso e codificado. (EGLASH, 2005b, p. 66).

Na próxima figura, os retângulos menores no centro são as câmaras reais.

[17] <(http://viajeaitacaconmanoli.blogspot.com/2009/06/etnomatematica.html)>. Acessado em 29/10/2009.

FIGURA 15: Palácio do Chefe[18].

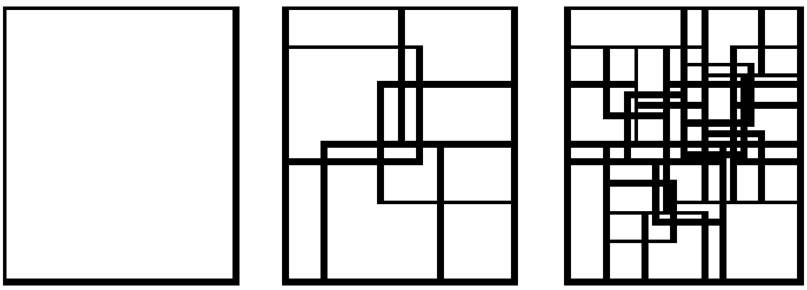


FIGURA 16: Três Primeiras Iterações da Simulação Fractal de Logone-Birni[19].

Na parte oeste da África, perto da fronteira da Nigéria, a paisagem de Camarões se torna muito mais verde, esta é a fértil região dos altos campos de Bamileke. Eles também têm uma arquitetura fractal baseada em retângulos como mostra a figura 17, mas não tem nenhuma relação cultural com a de Kotoko. Mais do que a argila grossa de Logone-Birni, as casas e os recintos são construídos a partir de bambu, que é muito forte e amplamente disponível. Em relação a arquitetura, o motivo do padrão fractal é a produção agrícola, e não defesa, política ou parentesco.

[18] <(http://csdt.rpi.edu/african/archi/afractal/afarch.htm)>. Acessado em 29/10/2009.
[19] Eglash (2005a, p. 22).

O solo para pastagem e o clima são excelentes para a agricultura, e nos jardins perto das casas Bamileke, normalmente crescem cerca de uma dúzia de plantas diferentes, todos em um único espaço. Mas isto é fruto de um trabalho intensivo, assim como as plantações mais dispersas (fileiras de milho e amendoim), que são realizadas em espaços mais distantes da casa.

A mesma malha de bambu que é usada na construção de casas, e é também utilizada nos compartimentos das casas e nos compartimentos de compartimentos anexos. O resultado é uma arquitetura auto-semelhante. Ao contrário do labirinto defensivo da arquitetura Kotoko, onde havia apenas poucos caminhos amplos, as atividades agrícolas exigem uma grande quantidade de circulação entre os compartimentos, por isso em todas as escalas vemos amplas aberturas. A simulação fractal na figura 18 mostra como essa estrutura de escala pode ser modelada usando uma praça aberta como a forma base ou primeira iteração.

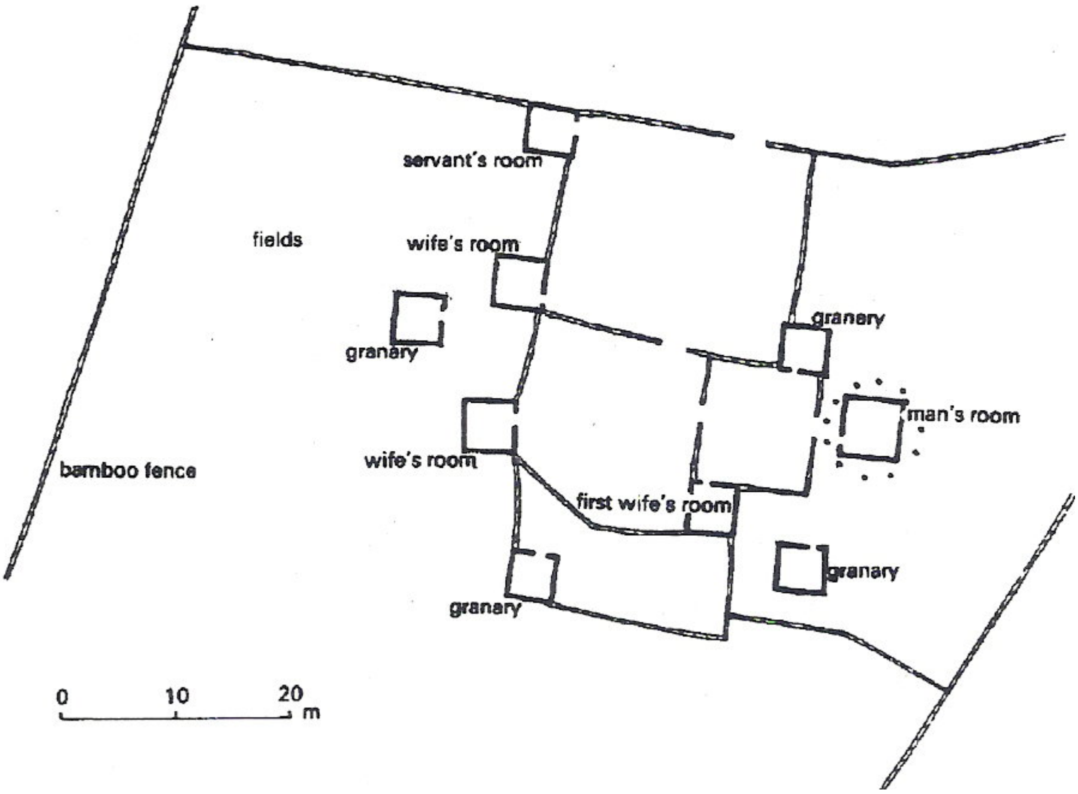


FIGURA 17: Planta da Colônia Bamileke por volta de 1960[20].

[20] Eglash (2005a, p. 25).

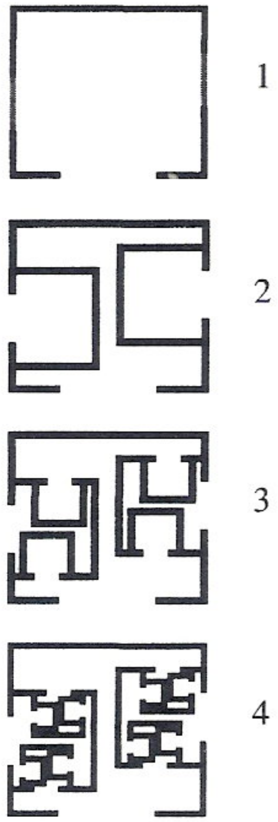


FIGURA 18: Simulação Fractal da Arquitetura Bamileke[21].

Grande parte da África meridional é constituída por planícies áridas onde rebanhos de gado e outros animais são criados. Estes animais estão confinados em cercas no formato de anéis, um para cada família, detalhe que pode ser visto na foto aérea da figura 19, que retrata uma aldeia no sul da Zâmbia, chamada Ba-ila. Na parte traseira de cada anel, encontramos a habitação da família, e na parte da frente, temos a entrada bloqueada para deixar o gado confinado. Por esta razão, a entrada principal está associada a um status baixo (imundos, os animais), e a parte de trás por um status elevado (limpa, as pessoas). Este gradiente de status é refletido pelo gradiente de tamanho na arquitetura. Os dois elementos geométricos desta estrutura são um anel de forma global, e um gradiente crescente da frente para trás, sendo que isto ecoa ao longo de toda a aldeia Ba-ila.

O assentamento como um todo tem a mesma forma: é um anel de anéis. Na parte de trás, no interior da aldeia, vemos um anel, este é o anel das casas dos

---

[21] Eglash (2005a, p. 25).

familiares do chefe. Este tem sua própria casa e fica no anel interior deste anel. Na casa mais ao fundo de cada anel fica um altar religioso. Estas são chamadas *manda a mizhimo* (cabanas manes) onde são feitas oferendas aos espíritos ancestrais. Nesta aldeia existem cerca de 250 barracos, construídos principalmente à beira de um círculo de 400 metros de diâmetro.

> O motivo inicial é, aqui, uma curva circular não fechada, na qual se inscreve um segmento retilíneo. Ele é recortado em zonas “ativas”, que serão substituídas por um motivo idêntico ao inicial, mas mais reduzido. A mesma operação é repetida em cada uma das zonas “ativas” do novo modelo. O resultado dá conta da estrutura global da aldeia. (EGLASH, 2005b, p. 66).

Notamos nesta aldeia uma estrutura semelhante em todas as escalas, sendo essa arquitetura fácil de modelar, ou melhor, representar com fractais, como podemos observar na figura 20 que traz as três primeiras iterações. A terceira iteração retrata a aldeia em sua forma real.

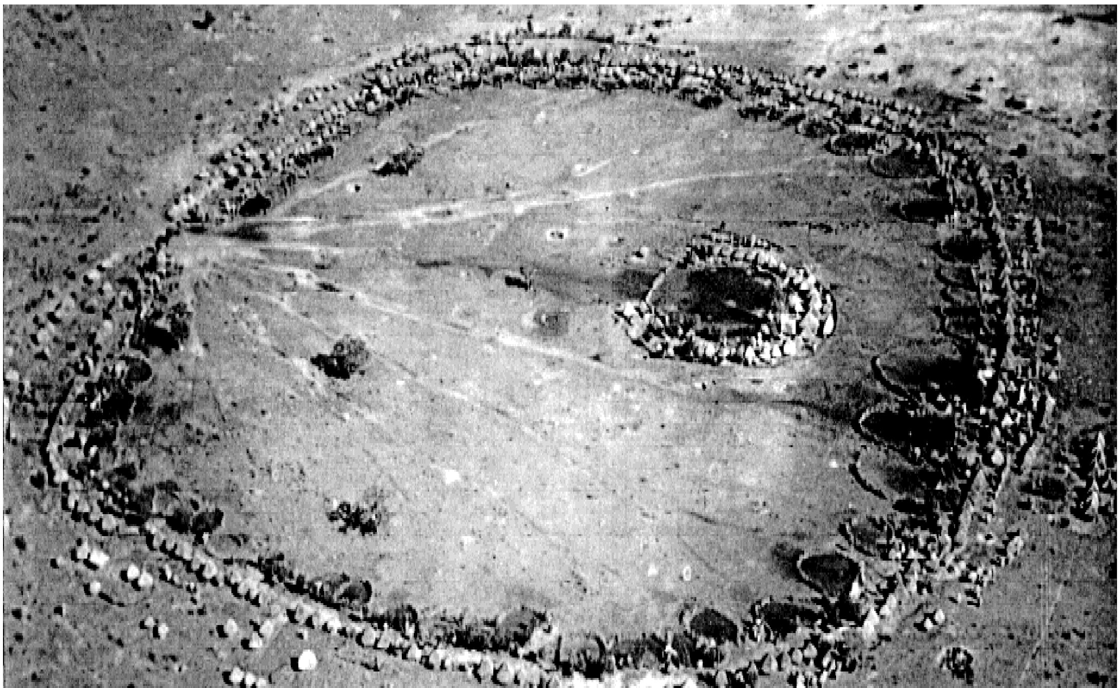


FIGURA 19: Foto Aérea da Colônia Ba-ila na Zâmbia antes de 1944[22].

[22] Eglash (2005a, p. 27).

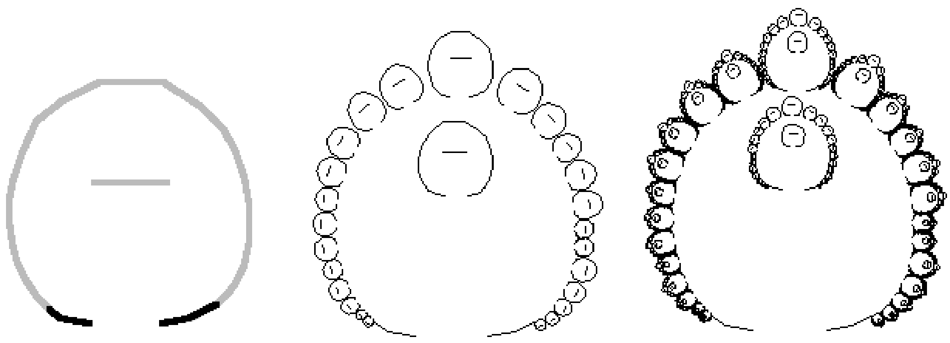


FIGURA 20: Três Primeiras Iterações da Simulação Fractal de Ba-ila[23].

A figura 21 mostra um diagrama arquitetônico do complexo de edifícios do chefe do Mokoulek, um dos assentamentos Mofou. É basicamente composto por três recintos de pedra (grandes círculos), cada uma das quais envolve os celeiros espirais (pequenos círculos). À esta simulação fractal precisamos de um círculo, feito de linhas passivas e dois diferentes conjuntos de linhas ativas como mostra a figura 22. Dentro do círculo temos uma seqüência de dimensionamento de pequenas linhas ativas, sendo que estas se tornarão os celeiros. Fora do círculo há uma grande linha ativa, e isto irá duplicar o recinto cheio de celeiros. O diagrama real de Mokoulek mostra vários círculos vazios, isto ocorre porque nem tudo na estrutura arquitetônica pode ser explicada por fractais. No entanto, uma característica importante é sugerida pela simulação.

Ao seguirmos as iterações, veremos que a construção dinâmica do complexo tem um padrão em espiral, e as repetições seguem sobre uma localização central. A construção da espiral virtual torna bem evidente este padrão. A semelhança entre as espirais dos pequenos celeiros no interior dos compartimentos e dos grandes círculos formam o padrão espiral do complexo como um todo, indicando que o aspecto fractal da arquitetura não é apenas devido a uma acumulação aleatória de vários tamanhos e formas circulares. A idéia de círculos de tamanho crescente, em espiral a partir de um ponto central, foi aplicada em duas escalas diferentes, e esta coerência estrutural é confirmada por conceitos arquitetônicos.

[23] Eglash (2005a, p. 27).

O padrão espiral tomando a linha ativa como centro não se deu por acaso, sendo que neste centro, temos um altar sagrado. Esta área do complexo é a moradia da autoridade religiosa e política, e é o local para os rituais que geram ciclos de fertilidade agrícola e sucessão ancestral. Esse mapeamento geométrico entre os círculos da arquitetura e os ciclos de vida espiritual é representado em seu ritual, no qual o sacerdote cria círculos concêntricos de pedras e coloca-se no centro.

Uma explicação do chefe do Mokoulek para o desenho dessa arquitetura, diz que tudo começou com um conhecimento exato do rendimento agrícola. Esta medida de volume foi convertida em um número de celeiros, e estes foram dispostos em espiral.

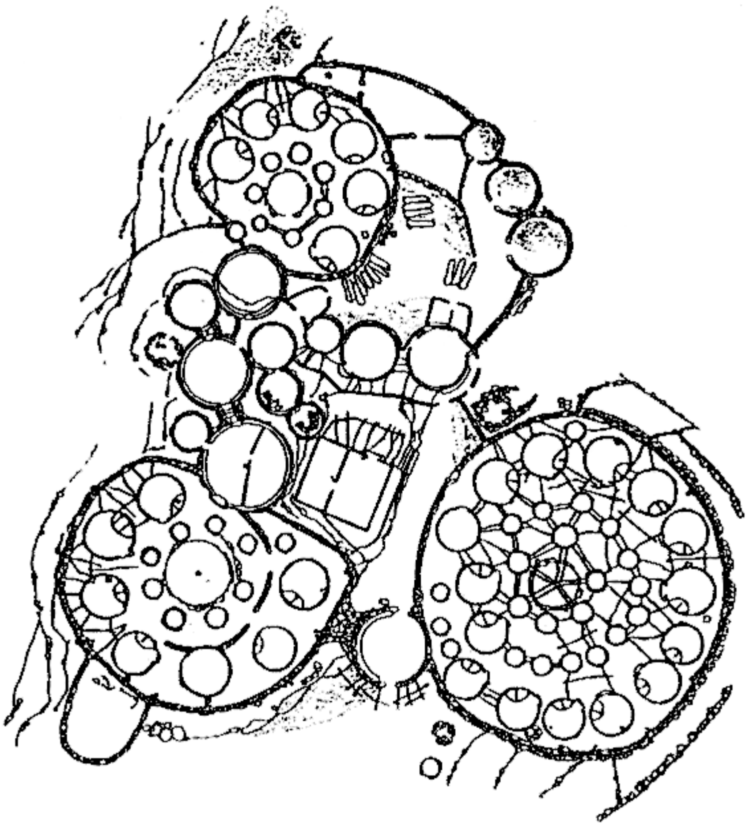


FIGURA 21: Diagrama da Arquitetura de Mokoulek - Camarões[24].

[24] Eglash (2005a, p. 30).

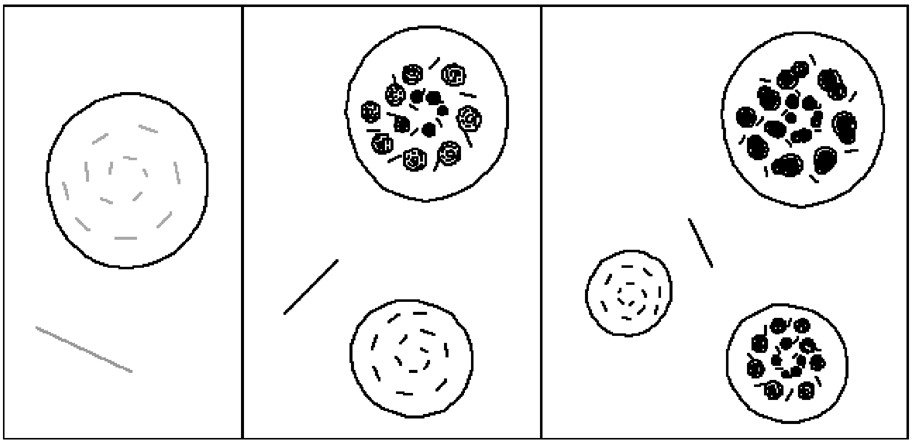


FIGURA 22: Três Primeiras Iterações da Simulação Fractal de Mokoulek[25].

Nem todas as arquiteturas circulares da África têm o tipo de localização central como vimos no caso de Mokoulek. A aldeia de Songhai Labbezanga no Mali, como mostra a figura 23, apresenta redemoinhos circulares de casas circulares, sem qualquer foco único. Mas, comparando com a imagem fractal da figura 24, vemos que a falta de foco central não significa uma falta de auto-similaridade.

É importante lembrar que apesar de que na Geometria Euclidiana simetria significa similaridade dentro de uma escala (exemplo: semelhança entre lados opostos na simetria bilateral), a Geometria Fractal é baseada em simetria entre as diferentes escalas. Até mesmo estes redemoinhos descentralizados de edifícios circulares mostram uma simetria de escala.

Edifícios retangulares que podem ser vistos na figura 23 são devidos a influência islâmica, onde a estrutura original teria sido completamente circular. A arquitetura Songhai pode ser caracterizada por uma dimensão semelhante ao fractal da figura 24.

[25] Eglash (2005a, p. 30).

FIGURA 23: Foto Aérea do Vilarejo de Labbezanga em Mali[26].

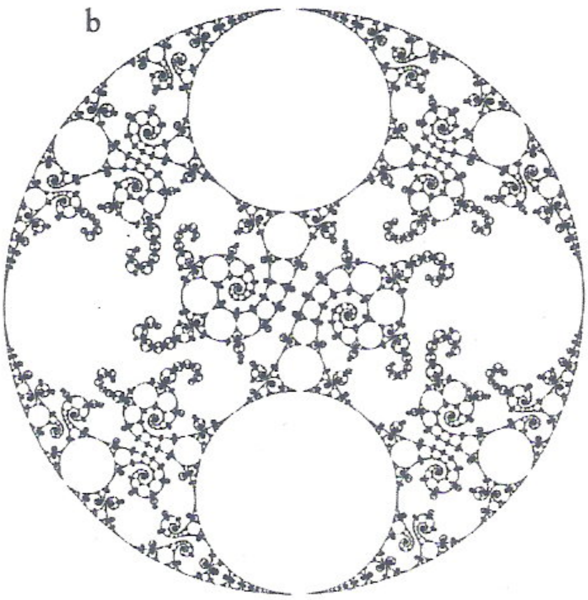


FIGURA 24: Representação Fractal de Labbezanga[27].

[26] <(http://punkt.files.wordpress.com/2006/11/dorfinnigeriakl4.jpg)>. Acessado em 29/10/2009.
[27] Eglash (2005a, p. 32).

Enquanto as construções circulares africanas normalmente são organizadas em conjuntos com outras construções com mesma característica, os caminhos que levam através dessas edificações não são tipicamente circulares. Como os brônquios que oxigenam os alvéolos dos pulmões, as rotas que alimentam as edificações circulares muitas vezes tomam a forma de ramificações, como mostra a figura 25.

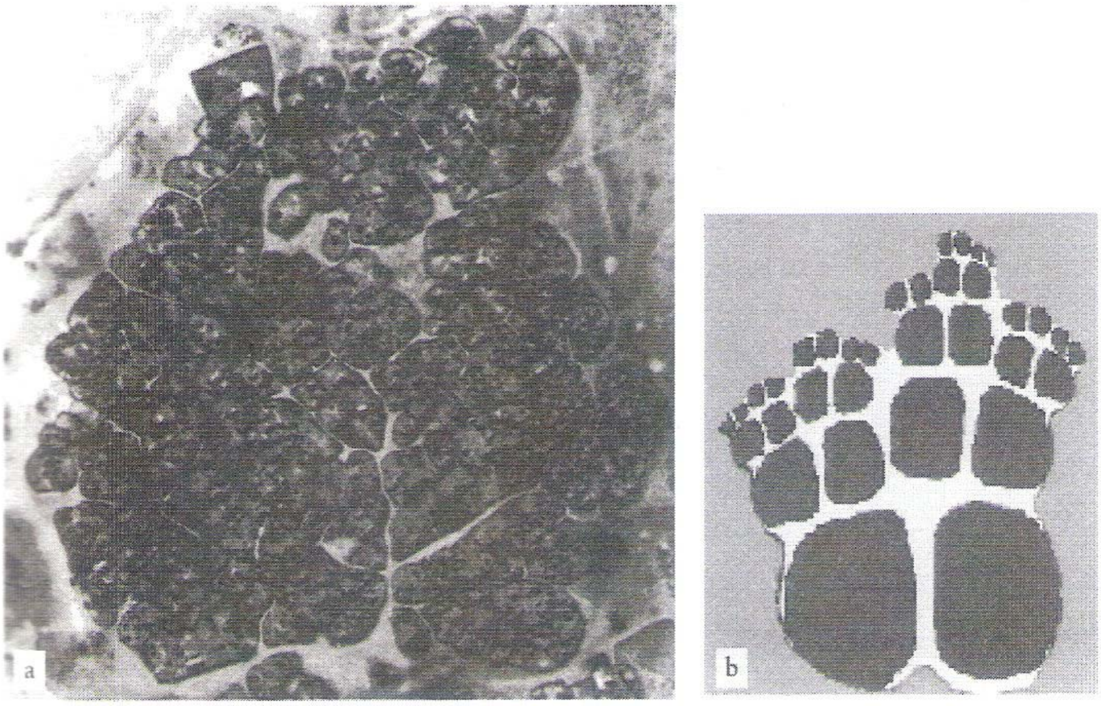


FIGURA 25: (a) Foto Aérea de uma Colônia Tradicional no Nordeste do Senegal. (b) Fractal Ramificação Criado por um Fundo Definido por Formas Circulares[28].

Observe que o espaço entre as paredes das edificações servem como estradas e caminhos, criando um padrão.

A figura 26 é uma foto aérea da cidade de Banyo, Camarões. Podemos notar nesta figura um fractal ramificação parecido com as veias de uma folha, e no lado superior esquerdo, vemos uma parte da grade euclidiana que cobre o resto da cidade, embora a maior parte da cidade seja fractal. Na parte central, temos a transição da Geometria Euclidiana para Fractal. Neste ponto, temos uma grande praça, o palácio do Sultão e uma grande Mesquita.

---

[28] Eglash (2005a, p. 32).

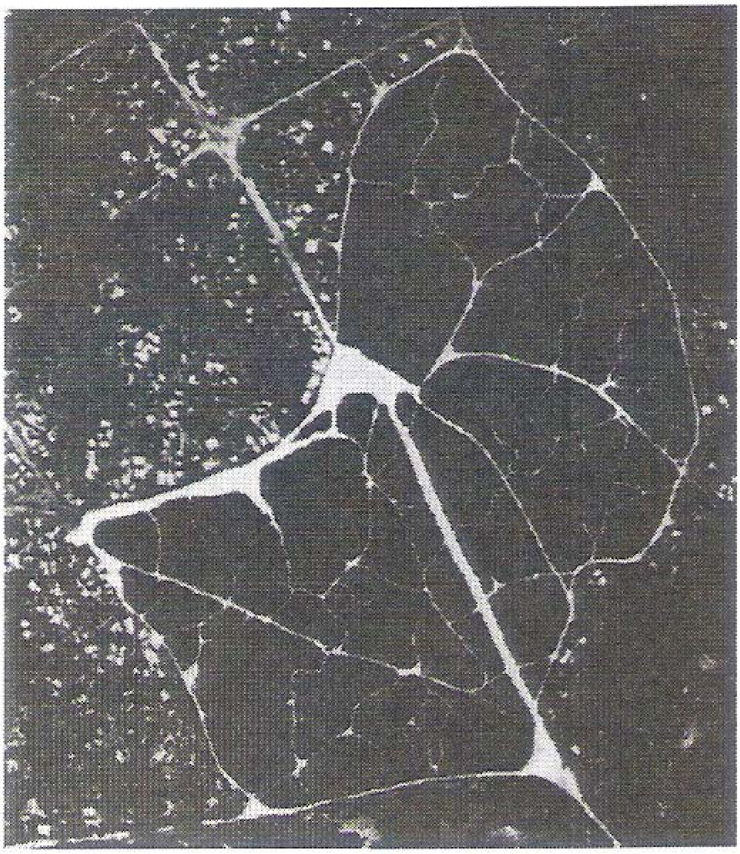


FIGURA 26: Foto Aérea da Cidade de Banyo - Camarões[29].

A figura 27 mostra o mapa da cidade do Cairo no Egito em 1898. Notamos que esta é mais um exemplo de fractal ramificação. A figura 28 mostra as quatro primeiras iterações da simulação fractal das ruas do Cairo. A primeira forma consiste em uma mesquita conectada a um mercado por uma avenida larga, e as iterações sucessivas desta construção dão forma à cidade.

[29] Eglash (2005a, p. 36).

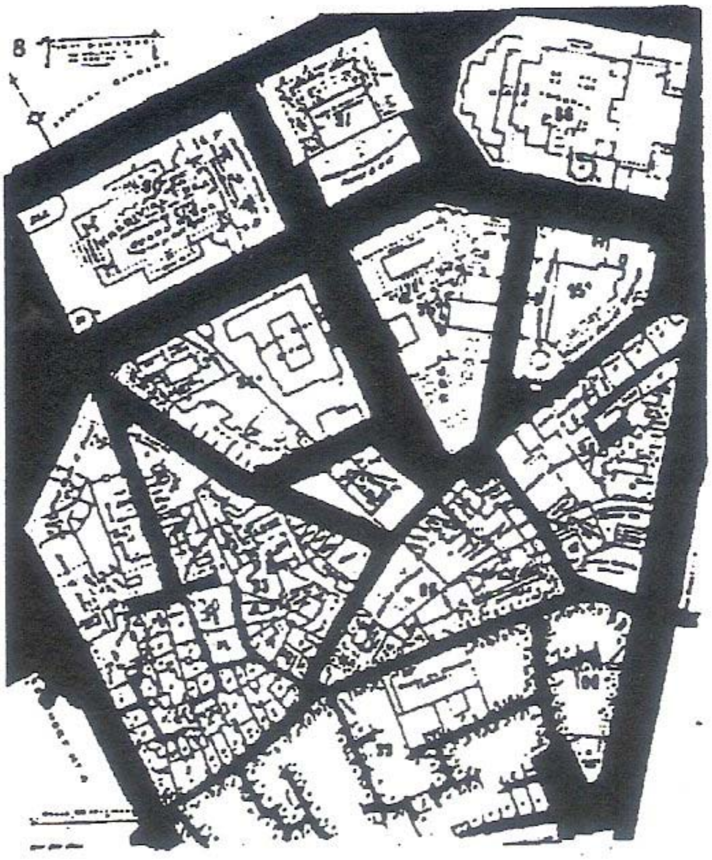


FIGURA 27: Mapa das Ruas do Cairo - 1898[30].

FIGURA 28: Quatro Primeiras Iterações da Simulação Fractal das Ruas do Cairo[31].

[30] Eglash (2005a, p. 37).
[31] Eglash (2005a, p. 37).

Com isso, vimos que uma ampla variedade de arquiteturas de colônias africanas pode ser caracterizada como construção fractal. Elas fazem uso de características fractais como escalas e iterações, além da auto-semelhança ou auto-similaridade, que é bem evidente observando as fotos e seus respectivos fractais. Vimos exemplos de fractais retangulares nas figuras 16 e 18, fractais circulares nas figuras 20, 22 e 24, e fractais ramificação nas figuras 25, 26 e 28.

A arquitetura fractal não se apresenta apenas em aldeias africanas, também temos esta estrutura em nossa arquitetura contemporânea como mostra a figura 10. Mas, ressaltamos que os arquitetos contemporâneos conhecem a Geometria Fractal, diferentemente dos povos africanos citados, que não tiveram um estudo prévio do assunto e muito menos contavam com auxílio da computação. Por isso, segundo D'Ambrosio (2002), "a abordagem a distintas formas de conhecer é a essência da Etnomatemática". E mais:

> A arquitetura não é o único domínio em que encontramos fractais. Eles existem, por exemplo, também nos têxteis, no artesanato e nos penteados tradicionais africanos. Até hoje em dia, a matemática dos fractais explica em especial os fenômenos naturais; agora, eles são detectados na construção do homem. (EGLASH, 2005b, p. 66).

Poderíamos pensar ainda que as estruturas dessas construções africanas pudessem ser apenas coincidências, mas temos que:

> [...] determinados padrões fractais na África, como nas artes decorativas, são apenas o resultado de uma estética intuitiva. Mas, como já vimos, os fractais na arquitetura africana são muito mais que isso. A sua concepção está ligada aos sistemas de conhecimento consciente que sugerem conceitos básicos de geometria fractal. (EGLASH, 2005a, p. 38)[32].

[32] Tradução do original pelo autor desta Monografia.

CAPÍTULO IV – METODOLOGIA DE PESQUISA E A DIMENSÃO EDUCACIONAL DA ETNOMATEMÁTICA

A metodologia adotada para a elaboração desta monografia foi orientada por estudos teóricos acerca da Geometria Fractal de algumas culturas africanas, numa abordagem qualitativa em Etnomatemática.

> A etnomatemática privilegia o raciocínio qualititativo. Um enfoque etnomatemáico sempre está ligado a uma questão maior, de natureza ambiental ou de produção, e a etnomatemática raramente se apresenta desvinculadas de outras manifestações culturais, tais como arte e religião. (D'AMBROSIO, 2002, p. 44).

Para tanto, foram escolhidas para este trabalho algumas imagens e/ou fotografias de construções fractais de alguns grupos culturais para servirem de fonte de dados. Nesse sentido, "a fotografia está intimamente ligada à investigação qualitativa e [...], (as fotos) dão-nos fortes dados descritivos, e são muitas vezes utilizadas para compreender o subjetivo e são frequentemente analisadas indutivamente" (BOGDAN; BIKLEN, 2006, p. 183), e mais, "permite que os investigadores compreendam e estudem aspectos da vida que não podem ser investigados através de outras abordagens" (BOGDAN; BIKLEN, 2006, 184), como é o nosso caso que, por ora, não podemos nos deslocar para a África para realizar nosso estudo *in loco*. Além disso, cremos na premissa de que as imagens podem dizer mais do que as palavras, quando bem colocadas num discurso.

As fotografias também dão uma percepção geral do objeto de estudo e podem ser usadas para oferecer-nos informações específicas, que podem ser congregadas com outras fontes, como as bibliografias, que também servem de fontes para nós neste estudo.

> Desta forma, uma fotografia é como todas as outras formas de dados qualitativos. Para utilizá-la temos de a colocar no seu contexto próprio e compreender o que ela é capaz de nos dizer antes de extrairmos informação e compreensão. (BOGDAN; BIKLEN, 2006, p. 185).

Para os estudos dos fractais africanos em questão, as fotografias (aéreas) ajudam-nos a entender um pouco de sua cultura, pois elas nos axiliam a "[...] investigar acerca de como as pessoas definem o seu mundo; podem revelar aquilo que as pessoas têm como adquirido, o que elas assumem que é inquestionável." (BOGDAN; BIKLEN, 2006, p. 186).

Enquanto instrumento de análise, as fotografias deste trabalho são uma ferramenta do investigador etnomatemático (educacional e cultural), e que é "[...] entendida como um produto cultural e como uma produtora de cultura". (BOGDAN; BIKLEN, 2006, p. 191).

Em termos educacionais e de pesquisa, a metodologia adotada pelas investigações em Etnomatemática baseiam-se, geralmente, em:

> Uma abordagem aberta à educação matemática, com atividades orientadas, motivadas e induzidas a partir do meio, e, consequentemente, refletindo conhecimentos anteriores. Isso nos leva ao que chamamos de *etnomatemática* e que restabelece a matemática como uma prática natural e espontânea. (D'AMBROSIO, 1998, p. 31).

Isso é o que chamamos de pesquisa qualitativa em Educação Matemática. No entanto,

> pode parecer contraditório falarmos em uma matemática tão sofisticada quanto *fuzzies* e fractais quando fazemos a proposta da etnomatemática. Mas justamente o essencial da etnomatemática é incorporar a matemática do momento cultural, contextualizada, na educação matemática. Os fractais são, hoje, parte do imaginário e da curiosidade popular. Despertam, portanto, interesse de crianças, jovens e adultos. (D'AMBROSIO, 2002, p. 44).

Assim, esse proceder qualitativo permite chegar à uma melhor organização educacional, incorporando novos fatos aos velhos sistemas educacionais, melhorando o mundo em que vivemos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após termos apresentado a Geometria Fractal, o Caos e a Etnomatemática, acreditamos ter alcançado o objetivo de mostrar uma ligação entre eles. Uma vez que as estruturas arquitetônicas de povos africanos denotam certa desordem (Caos) à primeira vista, mas, que é ordenada pelos fractais (Geometria Fractal), que por sua vez, refletem na Cultura, as formas de conhecimento de um povo (Etnomatemática). Ou seja, é a cultura estabelecendo uma ordem numa aparente desorganização, que nada mais é do que uma expressão sociocultural de grupos que tentam sobreviver e transcender seu conhecimento ao longo do tempo.

> O conhecimento é criado e organizado intelectualmente pelo indivíduo em resposta a um ambiente natural, cultural e social; depois de ter sido difundido pela comunicação, ele é organizado socialmente, tornando-se assim, parte integrante de uma comunidade (uma cultura), essencialmente por reconhecer e explicar fatos e fenômenos. Observadores, cronistas, teóricos, sábios, universitários e “guardiões do poder” se apropriam desses conhecimentos, classificam-nos e dão-lhes uma etiqueta, antes de transmití-los e difundí-los. Assim nascem as formas estruturadas de conhecimento: a língua, a religião, a culinária, a medicina, as vestimentas, os valores, a ciência, a matemática, todas interdependentes e em resposta à percepção da realidade desse ambiente. Esse conhecimento, “congelado” em estruturas coerentes, é transmitido e difundido pelos agentes, em particular os professores. Ao reconhecer “mais de uma matemática”, aceitamos que existem diversas respostas a ambientes diferentes. (D’Ambrosio, 2005, p. 8).

Assim, fica a sugestão com este trabalho, da adoção de uma postura Etnomatemática, de atribuir à educação valores culturais africanos, mostrando diferentes modos de conhecimento, exemplificando também com suas formas (africanas) o estudo da Geometria Fractal, não adotando somente exemplos da cultura européia. Sem contar que, além disso tudo, a África é considerada o berço das civilizações, é muito estranho não valorizar a nossa origem, o nosso “berço”, a nossa história, a nossa cultura revisitada e reinterpretada, inclusive com novos recursos tecnológicos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.** 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em educação matemática, 6).

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 2006.

D'AMBROSIO, U. **Da Realidade À Ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo/Campinas: Summus/EDUNICAMP, 1986.

______. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 14ª edição. Campinas: Papirus, 2007. (Perspectivas em Educação Matemática).

______. **Etnomatemática – arte ou técnica de explicar e conhecer**. 5ª edição. São Paulo: Ática, 1998.

______. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade**. 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. (Tendências em educação matemática, 1).

______. Volta ao Mundo em 80 Matemáticas. **Scientific American Brasil**, São Paulo, Edição Especial, n. 11, p. 6-9, 2005.

EGLASH, R. **African Fractals – modern computing and indigenous design**. 3ª edição. New Jersey: Rutgers University Press, 2005a.

______. Fractais Africanos. **Scientific American Brasil**, São Paulo, Edição Especial, n. 11, p. 66-67, 2005.

FERREIRA, A. B. H. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 3ª edição. Curitiba: positivo, 2004. CD-ROM.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. Twentieth Printing. New York: W. H. Freman and Company, 2004.

MUNIZ, M. M. **A Arte e a Matemática Através da Geometria dos Fractais**. (Monografia de Especialização em Educação Matemática). UNIOESTE, Foz do Iguaçu, 2009.

<(http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/caos.htm)>. Acessado em 02/10/2009.

<(http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php)>. Acessado em 04/10/2009.

<(http://www.ufrrj.br/leptrans/arquivos/etno.pdf)>. Acessado em 06/10/2009.

<(http://www.bdtd.ufpe.br/tedeSimplificado//tde_arquivos/7/TDE-2007-01-19T113859Z-669/Publico/FJAS.pdf)>. Acessado em 02/11/2009.

<(http://www.rpi.edu/~eglash/eglash.htm)>. Acessado em 02/11/2009.

<(http://en.wikipedia.org/wiki/Kotoko_kingdom)>. Acessado em 02/11/2009.

ANEXOS

ANEXO 1 - EXEMPLOS DE FRACTAIS DA CULTURA AFRICANA

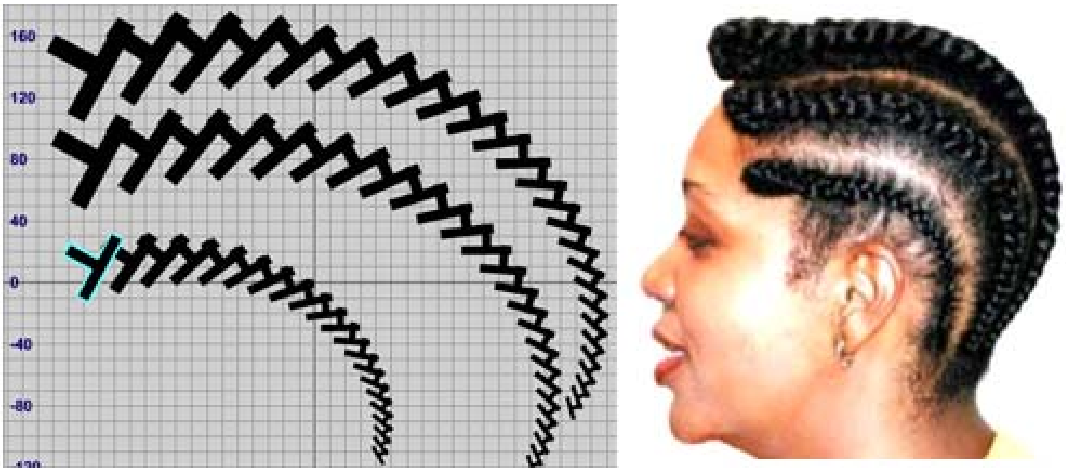


FIGURA 01: Exemplo de Fractal em Penteado Africano[33].

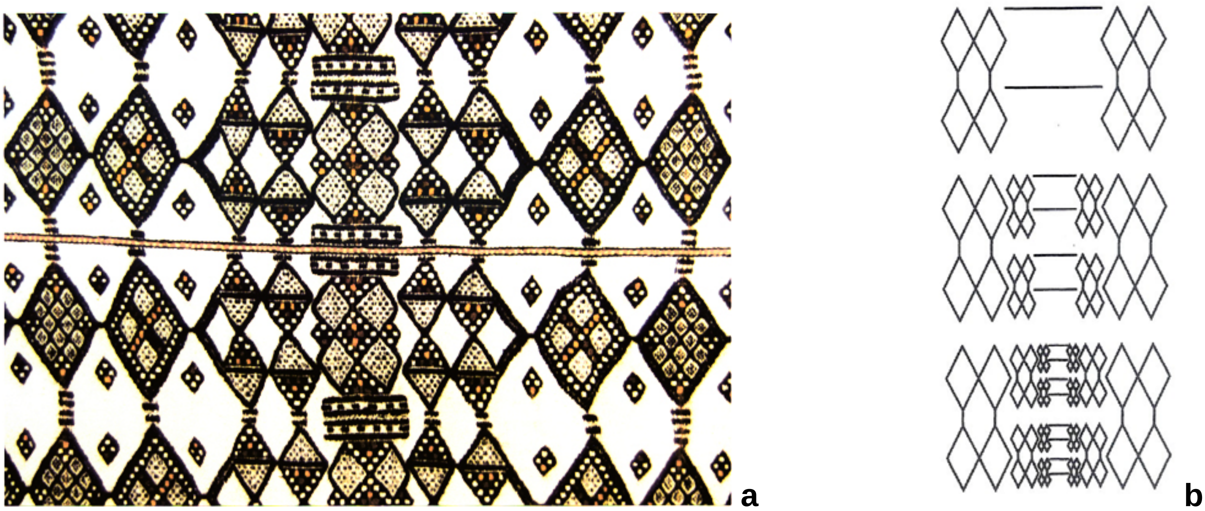


FIGURA 02: (a) Manta de Casamento Fulani de Mali. (b) Três Primeiras Iterações da Simulação Fractal da Manta[34].

---

[33] <(www.ccd.rpi.edu/Eglash/csdt/african/denise.jpg)>. Acessado em 20/11/2209.

[34] (a) <(http://csdt.rpi.edu/african/African_Fractals/index.html)>. Acessado em 20/11/2009. (b) Eglash (2005a, p. 119).

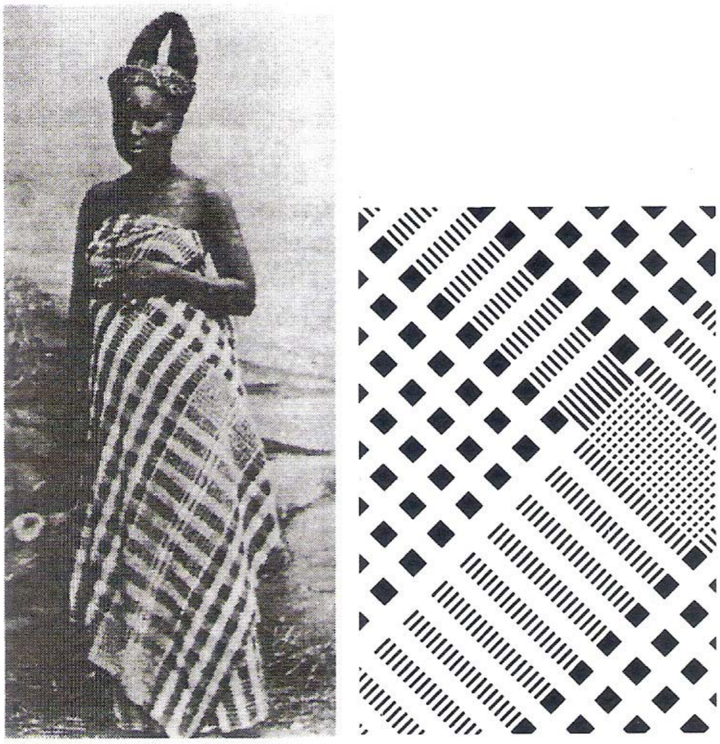
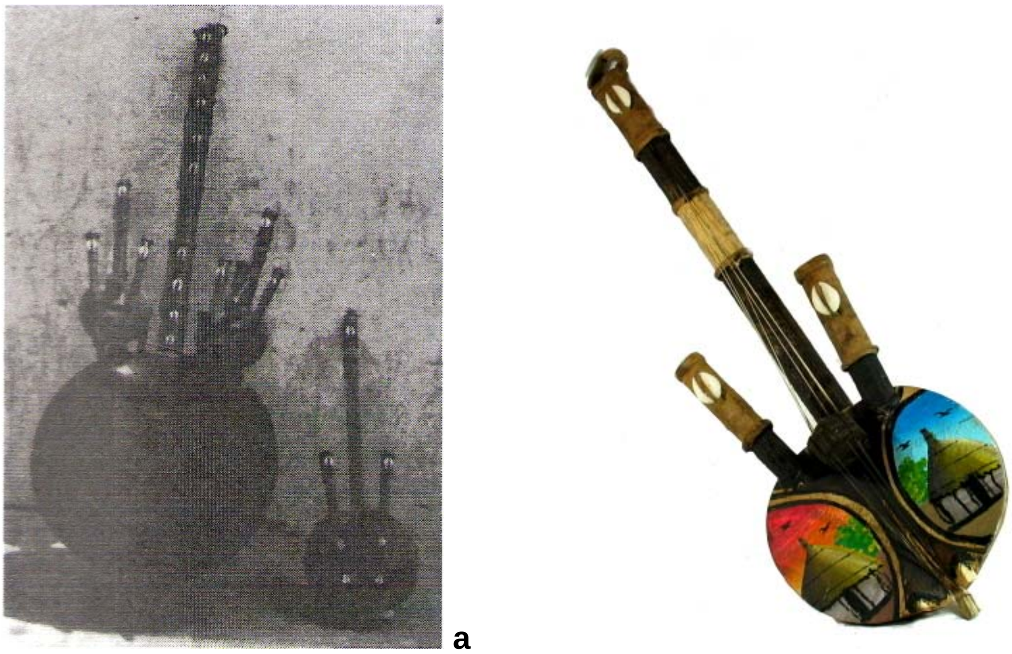


FIGURA 03: Exemplo de Fractal no Design Têxtil, Gana, 1860[35].



a b

FIGURA 04: Kora, um Instrumento Musical Senegalês[36].

[35] Eglash (2005a, p. 116).
[36] (a) Eglash (2005a, p. 218). (b) <(http://cgi.ebay.co.uk/ws/eBayISAPI.dll?ViewItem&item=110432575047)>. Acessado em 20/11/2009.