MAT1514 – A Matemática na Educação Básica

IME-USP

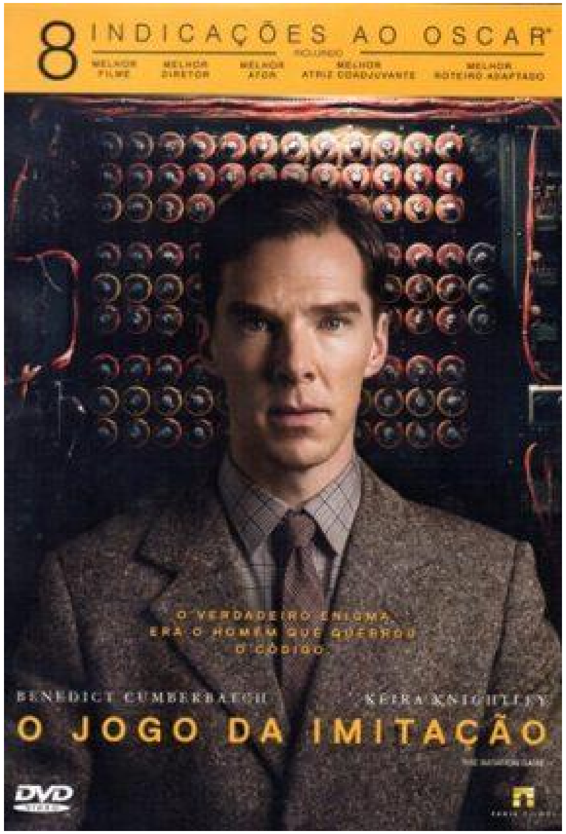
Prof. Dr. Júlio César Augusto do Valle

Segunda aula - 10/09

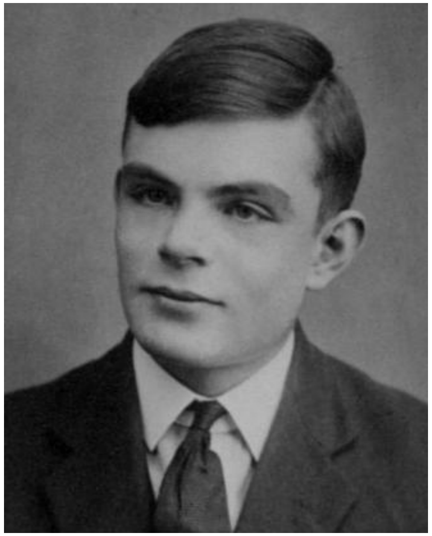
Em nossa segunda semana, teremos:

- Conversa sobre o filme "O jogo da imitação", o matemático Alan Turing e o contexto de sua produção;
- A ideia de criptografia e as matrizes - uma introdução;
- Apresentação da próxima atividade: O que será necessário para criptografar?

Que aspectos chamaram a atenção durante o filme?



Quem foi Alan Turing?

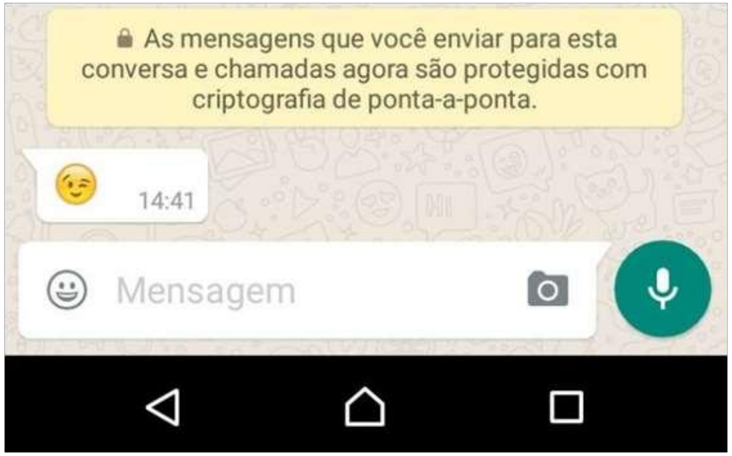


Para saber mais:
https://revistagalileu.globo.com/Cultura/noticia/2018/06/17-fatos-e-curiosidades-sobre-vida-do-ala

Criptografia e sua história

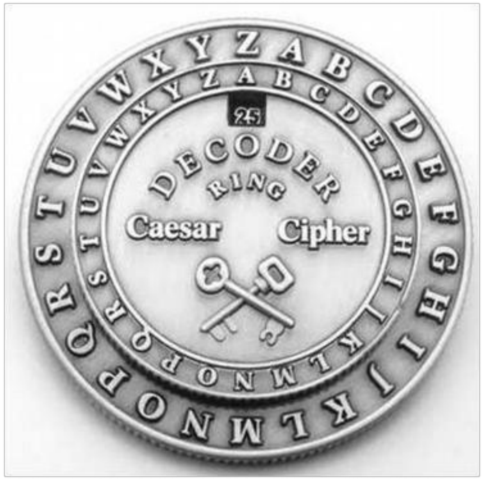
- A palavra criptografia vem do grego, *cryptos*, que significa oculto;

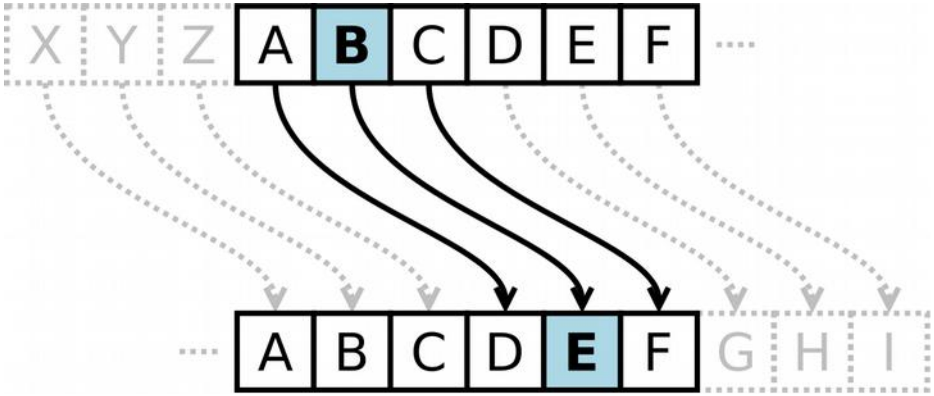
- A criptografia estuda modos de se comunicar em segurança, isto é, modos de transmitir uma mensagem de modo que apenas o seu destinatário consiga decifrá-la.



Cifra de César

- O general Júlio César (100-44 a.C) foi um ditador romano a quem é atribuída a criação de um código para comunicar-se com as legiões romanas em combate.
- Este código consistia na substituição das letras seguindo uma ordem determinada.



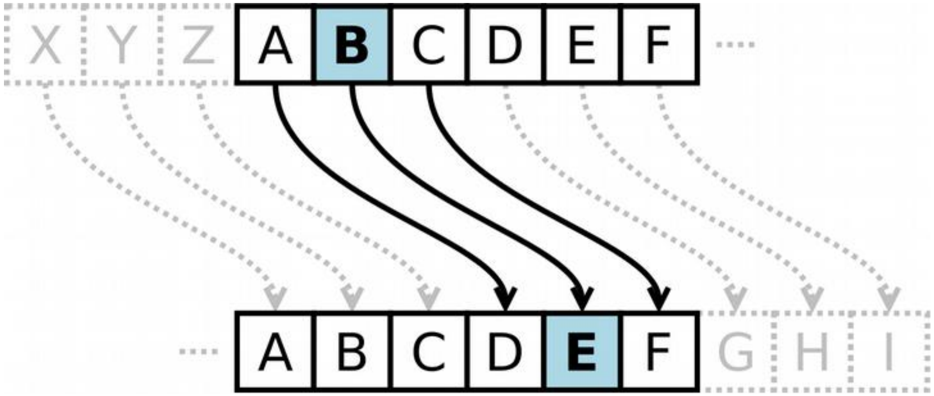


Cifra de César

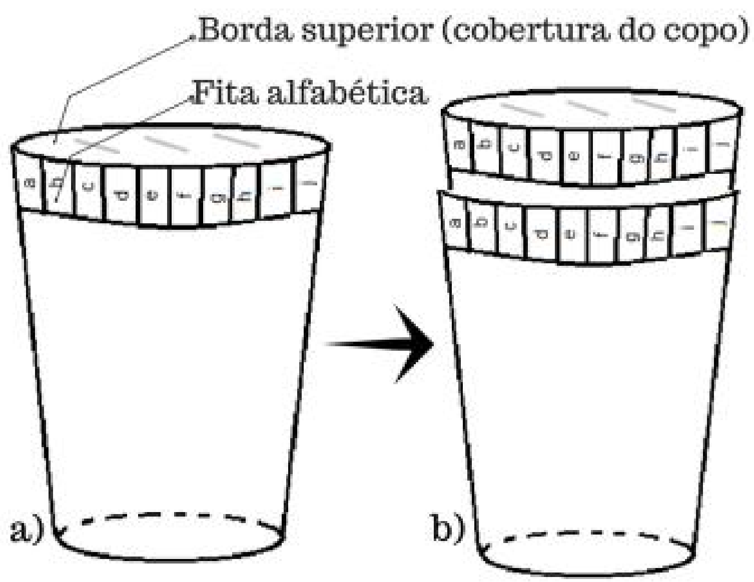
- Exemplo de código para ser decifrado:

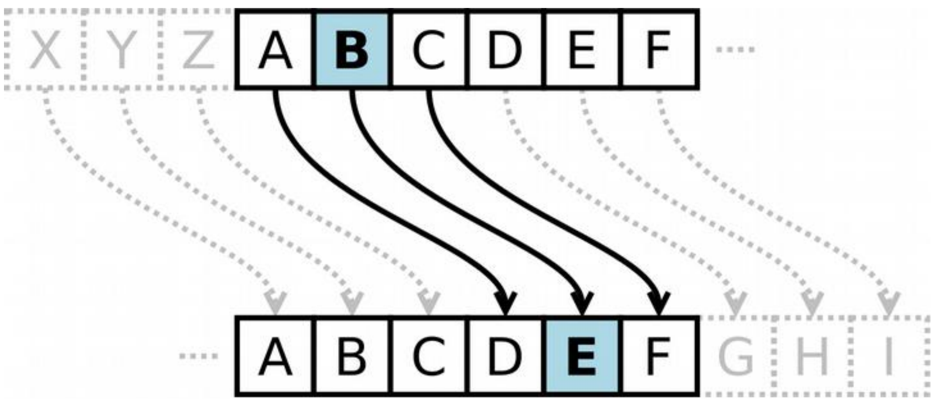
- Mensagem: PDWHPDWLFD

  Chave = 3



Exemplo para se trabalhar na escola





História dos usos Matrizes

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

	Fábrica A	*Fábrica B*	*Fábrica C*	*Fábrica D*
Produto 1	560	360	380	0
Produto 2	340	450	420	80
Produto 3	280	270	210	380

- Quadrados mágicos na antiga China;
- Sistematização e apresentação de informações;
- Resolução de sistemas lineares;
- Criptografia;

Introdução às Matrizes

	Altura (m)	*Peso (kg)*	*Idade (anos)*
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

$$A = \begin{pmatrix} 1,70 & 70 & 23 \\ 1,75 & 60 & 45 \\ 1,60 & 52 & 25 \\ 1,81 & 72 & 30 \end{pmatrix}$$

Introdução às Matrizes

$$A=\left[a_{i\,j}\right]_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Assim, por exemplo, a_{21} representa o elemento de A que se encontra na segunda linha e primeira coluna.

Alguns exemplos

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz de tipo 2×3, isto é, uma matriz com duas linhas e três colunas.

2. $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz de tipo 2×2, isto é, uma matriz com duas linhas e duas colunas.

Tipos de matrizes

Matriz Rectangular, quando o número de linhas for diferente do número de colunas

(m $\neq$ n). Por exemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz rectangular, de tipo } (2\times 4).$$

Matriz Quadrada, quando o número de linhas for igual ao número de colunas (m = n).

Por exemplo:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada de ordem 3}$$

Tipos de matrizes

Matriz Linha, quando for constituída por uma só linha (1 × *n*) (vector linha). Por exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz linha, de tipo } (1 \times 4).$$

Matriz Coluna, quando for constituída por uma só coluna (*m* × 1) (vector coluna). Por exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz coluna, de tipo } 3 \times 1.$$

Matriz Nula, se todos os seus elementos forem nulos. Simbolicamente representa-se por

$$O = [\ a_{ij}\ ] \ : \ a_{ij} = 0, \qquad \forall i, j$$

Diagonal principal de uma matriz e a matriz identidade

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Operações com matrizes - adição

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 0 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Quando é possível realizar a adição entre matrizes?

Propriedades da Adição de matrizes

- **Comutativa:** $A + B = B + A$
- **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + \mathrm{C})$
- **Existência de elemento neutro:** $A + O = O + A = A$

  (O - matriz nula é o elemento neutro)
- **Existência de elemento simétrico:** $A + (-A) = (-A) + A = O$

Operações com matrizes – Multiplicação por escalar

A ***multiplicação de número real*** λ ***por uma matriz*** $A_{(m\times n)}$ é uma matriz cujos elementos são iguais aos elementos de A multiplicados por λ, ou seja, $\lambda A = \left[\lambda a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\dots,m\\ j=1,2,\dots,n}}$.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $\lambda = 3$. Calcule λA.

Resolução

$$3\times\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -3 & 3 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação de matrizes por escalar

- **Distributividade**: $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- **Distributividade**: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- **Associatividade**: $(\beta\alpha)A = \alpha(\beta A)$

Operações com matrizes – produto de duas matrizes

$$A_{(m\times n)}.B_{(n\times p)} = C_{(m\times p)}$$

Reparem que não é sempre possível calcular o produto de duas matrizes!

$$\begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + \cdots + a_{ik}.b_{kj} + \cdots a_{in}.b_{nj}$$

Operações com matrizes – produto de duas matrizes

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule se possível $A \times B$.

1) É possível calcular esse produto entre a matriz A_{3x2} e a matriz B_{2x2}?

2) Lembrem-se de verificar se o número de colunas da primeira matriz coincide com o número de linhas da segunda.

3) Quais são as dimensões da matriz C = A x B?

Operações com matrizes – produto de duas matrizes

Resolução

$$A_{(3\times 2)}\times B_{(2\times 2)}=C_{(3\times 2)}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 9 & 7\\ 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times 1+6\times 3 & 5\times 2+6\times 4\\ 9\times 1+7\times 3 & 9\times 2+7\times 4\\ 8\times 1+0\times 3 & 8\times 2+0\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 24\\ 30 & 46\\ 8 & 16\end{bmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação entre matrizes

- **Associativa**: $(AB)C = A(BC)$
- **Distributiva em relação à adição**
  - **à esquerda**: $A(B + C) = AB + AC$
  - **à direita**: $(B + C)A = BA + CA$
- I_n **é o elemento neutro da multiplicação** de matrizes quadradas

A multiplicação de matrizes não é comutativa $AB \neq BA$.

Se $AB = BA$ então A e B dizem-se **matrizes permutáveis** ou **comutáveis.**

Matrizes e criptografia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$