MAE224 - Probabilidade II
RESOLUCÃO - LISTA 11 - CLASSE
Prof. Vanderlei C. Bueno

1. Seja $X_1, X_2, ..., X_{99}$ uma amostra aleatória da distribuição de Weibull $F(x) = 1 - \exp[-(\lambda x)^2], x \geq 0$ para um parâmetro $\lambda > 0$ e seja ξ_M a mediana de F.

   Baseado na mediana amostral $\widehat{\xi_M}$, encontre um intervalo de confiança com $0,95$ de confiança para λ.

   Solução

   Aplicaremos o Teorema

   Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$ com função de distribuição F e função densidade de probabilidade $f(x)$ tal que $f(\zeta_p) > 0$. Então

   $$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \zeta_p)}{\gamma} \leq x) = P(Z \leq x)$$

   onde $\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{f(\zeta_p)^2}$.

   A mediana de X_1 é o número ξ tal que $F(\xi) = 0,5$, isto é

   $$1 - \exp[-(\lambda\xi)^2] = 0,5 \leftrightarrow \exp[-(\lambda\xi)^2] = 0,5 \leftrightarrow (\lambda.\xi)^2 = 0,7 \leftrightarrow \xi = \frac{\sqrt{0,7}}{\lambda}.$$

   A função densidade de probabilida de X_1 é $f(x) = 2\lambda^2 x \exp[-(\lambda\xi)^2]$ e $f(\xi) = f(\frac{\sqrt{0,7}}{\lambda}) = \sqrt{0,7}.\lambda$.

   O parâmetro $\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{f(\xi)^2} = \frac{0,25}{0,7.\lambda^2} = \frac{0,36}{\lambda^2}$.

   Concluimos, pelo Teorema que

   $$\sqrt{99}(X_{(99;50)} - \frac{0,85}{\lambda})\frac{\lambda}{0,6} \rightarrow^D N(0,1).$$

   Portanto

   $$P(-1,96 \leq 10(\frac{\lambda.X_{(99;50)}}{0,6} - 1,42) \leq 1,96) = 0,95 \leftrightarrow$$

   $$P([\frac{-1,96}{10} + 1,42]\frac{0,6}{X_{(99;50)}} \leq \lambda \leq [\frac{-1,96}{10} + 1,42]\frac{0,6}{X_{(99;50)}}) = 0,95$$

   e

   $$(\frac{0,73}{x_{(99;50)}}; \frac{0,97}{x_{(99;50)}})$$

   é o intervalo de confiança para λ.

2. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função densidade de probabilidade

   $$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

   a) Qual o 0,75 quantil (ξ_p) de X? Calcule $f(\xi_p)$.

   b) Construir um intervalo de confiança, com coeficiente de confiança de 0,95, para o parâmetro λ.

   Solução a)O $0,75$ quantil de X é o número ξ tal que $P(X \leq \xi) = 0,75$. Como a densidade é simétrica em relação a 0, temos de resolver a equa cão

$$0,5\int_0^{\xi}\lambda e^{-\lambda x}dx = 0,25 \leftrightarrow 1-e^{-\lambda\xi} = 0,5 \leftrightarrow \xi = \frac{0,7}{\lambda}.$$

$f(\xi)$ é calculado por

$$f(\frac{0,7}{\lambda}) = 0,5.\lambda.e^{-\lambda|\frac{0,7}{\lambda}|} = 0,5.\lambda.e^{-0,7} = 0,25.\lambda.$$

b)

O parâmetro

$$\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{f(\zeta_p)^2} = \frac{0,75.0,25}{0,0625\lambda^2}$$

e $\gamma = \frac{3}{\lambda}$. Utilizando a Teorema temos

$$P(-1,96 \leq \sqrt{n}(X_{(n;k)} - \frac{0,7}{\lambda})\frac{\lambda}{3} \leq 1,96) = 0,95 \leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,96}{\sqrt{n}} \leq \frac{(\lambda.X_{(n;k)} - 0,7)}{3} \leq \frac{1,96}{\sqrt{n}}) = 0,95 \leftrightarrow$$

$$P(\frac{-5,88}{\sqrt{n}} + 0,7 \leq \lambda.X_{(n;k)} \leq \frac{-5,88}{\sqrt{n}} + 0,7) = 0,95,$$

e concluimos que

$$(\frac{1}{x_{(n;k)}}[\frac{-5,88}{\sqrt{n}} + 0,7]; \frac{1}{x_{(n;k)}}[\frac{5,88}{\sqrt{n}} + 0,7])$$

é um intervalo ao nível de $0,95$ de confiança para λ.

3. No exercício anterior, qual a mediana ξ_M de X? Usando o mesmo resultado assintótico para a mediana, voce rejeitaria a hipótese de $\lambda = 1$ contra a alternativa $\lambda \neq 1$ ao nível de $0,05$ de significância baseado em uma amostra aleatória de tamanho 21, a saber

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21.$$

Solução

Com a distribuição de X é simétrica em 0, temos que a mediana $\xi = 0$, com $f(0) = 0,5.\lambda$. O parâmetro

$$\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{f(\zeta_p)^2} = \frac{0,5.0,5}{0,5^2\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Portanto, pelo Teorema

$$\frac{\sqrt{n}X_{(n;k)}}{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt{n}X_{(n;k)}.\lambda \to^{D} N(,1).$$

Um intervalo de 90% de confainça para λ é
$(\frac{-1,64}{\sqrt{n}.x_{(n;k)}}; \frac{1,64}{\sqrt{n}.x_{(n;k)}})$ que no exercício é

$$(\frac{-1,64}{\sqrt{21.11}}; \frac{1,64}{\sqrt{21.11}}) = (-0,032; 0,032).$$