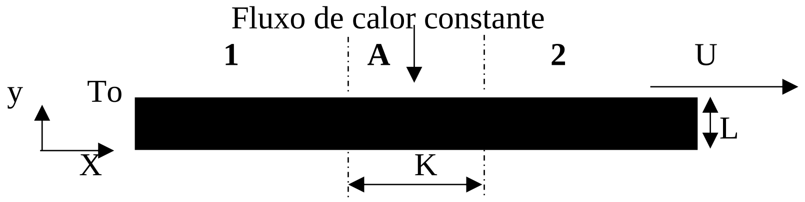
PQI 5776 – Fenômenos de Transporte I

AULA -07

Aplicações II: Membrana; Aquecimento de placa

Exemplo 9.2-1 (Deen, página) Aquecimento de placa que se move a um Pe arbitrário.



1 e 2 são regiões isoladas.
A é uma região aquecida mediante um fluxo de calor constante qo.
K é o comprimento da placa que recebe o calor.
U é a velocidade com que a placa é movida.
L é a espessura da placa
To é a temperatura da placa antes de passar pela região de aquecimento.
Nas regiões antes e após, longe, do ponto de aquecimento, a placa tem temperatura constante. A temperatura é uma função do tipo T = T(x,y).

Deseja-se determinar o perfil de temperatura na placa.

Em coordenadas cartesianas, a equação de conservação de energia é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{H_v}{\rho \hat{c}_p} \qquad \text{(eq 1)}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{c}_p}$$

O problema é tudo como em regime permanente: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

v_x=U

v_y=v_z=0

Sem produção de calor: $\frac{H_v}{\rho \hat{c}_p} = 0$

T=T(x,y)

Assim, a eq 1 fica como:

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \qquad \text{(eq 2)}$$

Com as condições de contorno:
T(-∞,y)=To

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\infty, y) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, L) =$$

*0 para x<0 ou x>K
*qo/k para 0≤x≤K   (Lei de Fourrier: $q_o = k\frac{\partial T}{\partial y}$)
k é a condutibilidade térmica da placa.

No lugar de se trabalhar com o problema bidimensional, a proposta é tornar o problema unidimensional, por se considerar a temperatura média numa dada seção da placa, numa dada posição x. tal temperatura média é definida como:

$$\overline{T}(x) = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,y)dy \qquad \text{(eq 3)}$$

Aplicando-se a definição da média para a eq 2:

$$U\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \qquad \text{(eq 2)}$$

Termo $\frac{\partial T}{\partial x}$:

$$\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\partial T}{\partial x}dy = \frac{1}{L}\frac{d}{dx}\int_0^L T(x,y)dy = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{L}\int_0^L T(x,y)dy\right] = \frac{d\overline{T}}{dx} \qquad \text{(eq 4)}$$

Foi utilizada aqui a Regra de Leibnitz:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy = f(x,b)\frac{db}{dx} - f(x,a)\frac{da}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$$

Termo $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$:

$$\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dy = \frac{1}{L}\frac{d}{dx}\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)dy = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\partial T}{\partial x}dy\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\overline{T}}{dx}\right) = \frac{d^2\overline{T}}{dx^2} \qquad \text{(eq 5)}$$

Termo $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$:

$$\frac{1}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,dy = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0^L \qquad (\text{eq } 6)$$

Logo, a eq 2 torna-se:

$$U\frac{d\overline{T}}{dx} = \alpha\left[\frac{d^2\overline{T}}{dx^2} + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0^L\right] \qquad (\text{eq } 7)$$

Ou:

$$U\frac{d\overline{T}}{dx} = \alpha\frac{d^2\overline{T}}{dx^2} + \frac{\alpha}{L}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0^L \qquad (\text{eq } 8)$$

Que produz duas equações:

Para x<0 ou x>K:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0^L = 0$$

-a temperatura fica constante.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0^L = \frac{q_o}{k}$$

-Lei de Fourrier.

E as equações ficam como:

$$\frac{d^2\overline{T}}{dx^2} - \frac{U}{\alpha}\frac{d\overline{T}}{dx} = 0 \qquad (\text{eq } 9)$$

-para x>0 ou x<K

$$\frac{d^2\overline{T}}{dx^2} - \frac{U}{\alpha}\frac{d\overline{T}}{dx} = -\frac{q_o}{Lk} \qquad (\text{eq } 10)$$

-para 0≤x≤K

Usando-se adimensionais:

$$\zeta = \frac{x}{L}$$

$$\theta = \frac{\overline{T} - T_o}{q_o L/k}$$

$$Pe = \frac{UL}{\alpha}$$

$$\lambda = \frac{K}{L}$$

Adimensionalizando-se a eq 9:

$$\frac{d^2\overline{T}}{dx^2} - \frac{U}{\alpha}\frac{d\overline{T}}{dx} = 0 \quad \text{(eq 9)}$$

Como To é uma constante, pode entrar nas duas derivadas; dividindo-se a equação por q_oL/k:

$$\frac{d^2(\overline{T}-T_o)/(q_oL/k)}{dx^2} - \frac{U}{\alpha}\frac{d(\overline{T}-T_o)/(q_oL/k)}{dx} = 0 \quad \text{(eq 11)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{U}{\alpha}\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad \text{(eq 12)}$$

Multiplicando-se, membro a membro a eq 12 por L^2:

$$\frac{d^2\theta}{d(\frac{x^2}{L^2})} - \frac{UL}{\alpha}\frac{d\theta}{d(\frac{x}{L})} = 0 \quad \text{(eq 13)}$$

Ou:

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - Pe\frac{d\theta}{d\zeta} = 0 \quad \text{(eq 14)}$$

-para $\zeta<0$ ou $\zeta>\lambda$.

Adimensionalizando-se a eq 10:

-introduzindo-se To na derivada e dividindo-se por q_oL/k:

$$\frac{d^2(\overline{T}-T_o)/(q_oL/k)}{dx^2} - \frac{U}{\alpha}\frac{d(\overline{T}-T_o)/(q_oL/k)}{dx} = -\frac{1}{L^2} \quad \text{(eq 14)}$$

$$\frac{d^2\theta}{d(\frac{x^2}{L^2})} - \frac{UL}{\alpha}\frac{d\theta}{d\left(\frac{x}{L}\right)} = -1 \quad \text{(eq 15)}$$

Ou:

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - Pe\frac{d\theta}{d\zeta} = -1 \quad \text{(eq 16)}$$

-para $0\leq \zeta \leq\lambda$, com as seguintes condições de contorno para as eqs 14 e 16:

$\theta(-\infty) = 0$ (temperatura constante na placa antes da região de aquecimento).
$\frac{d\theta}{d\zeta}(\infty) = 0$ (temperatura não varia após a região de aquecimento).

As soluções para essas equações são:

Para $\zeta<0$:

$$\theta_1(\zeta) = \frac{e^{Pe\zeta}}{Pe^2}\left(1 - e^{-Pe\lambda}\right) \qquad \text{(eq 17)}$$

Para $0\leq \zeta \leq\lambda$:

$$\theta_2(\zeta) = \frac{1}{Pe^2}\left(1 - e^{Pe(\zeta-\lambda)}\right) + \frac{\zeta}{Pe} \qquad \text{(eq 18)}$$

Para $\zeta>\lambda$:

$$\theta_3(\zeta) = \frac{\lambda}{Pe} \qquad \text{(eq 19)}$$

Observações importantes:

Para :$\theta_1(\zeta) = \frac{e^{Pe\zeta}}{Pe^2}\left(1 - e^{-Pe\lambda}\right) \qquad \zeta < 0$

-se $\zeta \rightarrow -\infty$ (longe da região de aquecimento):

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \theta_1 = 0$$

-se $\zeta \rightarrow -0$ (próximo à região de aquecimento):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0-} \theta_1 \neq 0$$

Há um pequeno aquecimento da placa antes de a placa entrar na região de aquecimento. O valor do limite da equação é tanto maior, quanto menor for Pe.

Se Pe for muito alto, $\theta_1 \rightarrow 0$ para $\lim_{\zeta \rightarrow 0-} \theta_1$, a placa não sofre aquecimento antes de entrar na região do aquecimento.

Para: $\theta_2(\zeta) = \frac{1}{Pe^2}\left(1 - e^{Pe(\zeta-\lambda)}\right) + \frac{\zeta}{Pe} \qquad 0 \leq \zeta \leq \lambda$

-à medida que $\zeta \rightarrow \lambda$, o termo $e^{Pe(\zeta-\lambda)} \rightarrow 1$ e θ_2 aumenta.
-se Pe for muito alto:
$e^{Pe(\zeta-\lambda)}$
$(\zeta-\lambda)<0$
$Pe(\zeta-\lambda)<<<0$
E $e^{Pe(\zeta-\lambda)} \rightarrow 0$
Logo $\theta_2(\zeta) \rightarrow 0$ para Pe muito alto, tornando a temperatura da placa constante.

No limite, para $\zeta \rightarrow \lambda$:

$$\theta_2 = \frac{\lambda}{Pe}$$

Que é a situação para $\theta_3(\zeta)$, com $\zeta>\lambda$. A temperatura fica constante e independe de x.

Voltando-se à região de aquecimento:

$$\theta_2(\zeta) = \frac{1}{Pe^2}\left(1 - e^{Pe(\zeta-\lambda)}\right) + \frac{\zeta}{Pe}$$

Ainda com a hipótese de Pe alto:
$(\zeta-\lambda)<0$
$Pe(\zeta-\lambda)<<<0$
E $e^{Pe(\zeta-\lambda)} \rightarrow 0$

$$\theta_2(\zeta) = \frac{1}{Pe^2} + \frac{\zeta}{Pe} = \frac{1}{Pe}\left(\frac{1}{Pe} + \zeta\right)$$

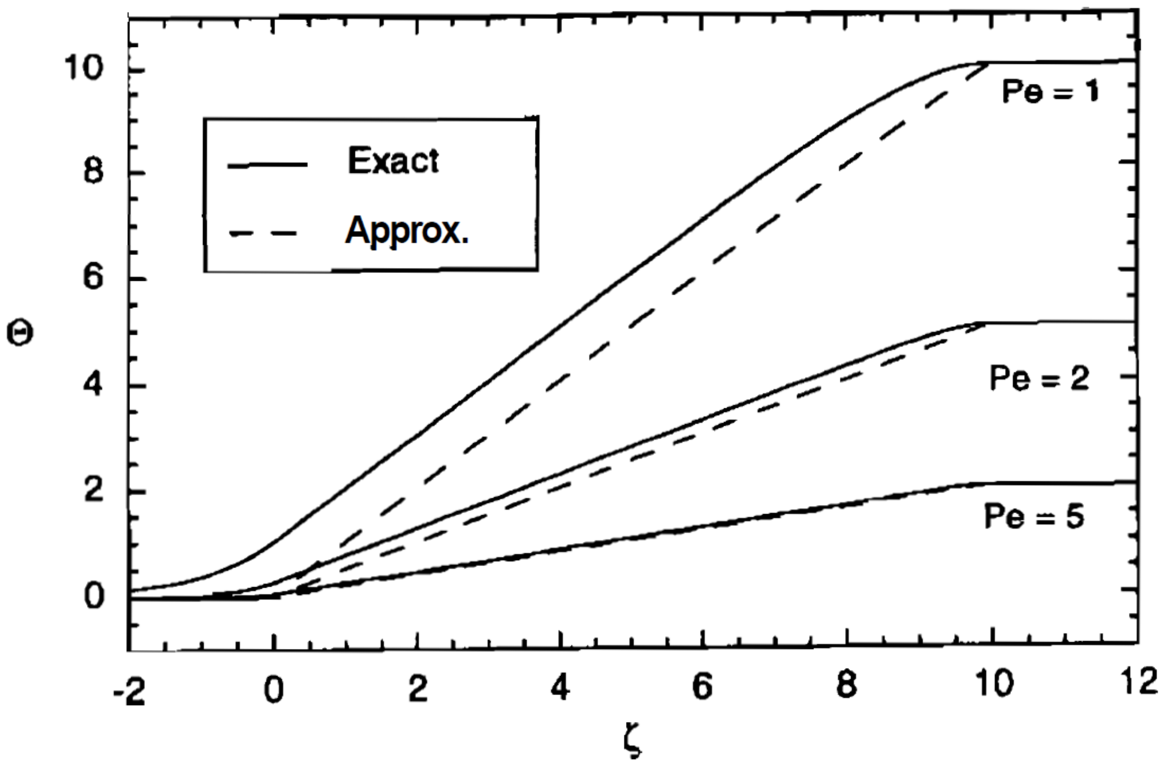
Que na hipótese de Pe alto:

$$\frac{1}{Pe} \lll \zeta$$

E assim:

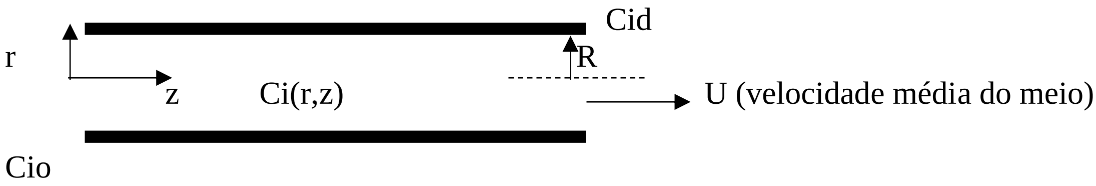
$$\theta_2(\zeta) = \frac{\zeta}{Pe}$$

Que é a equação de uma reta.
Altos valores de Pe:
-a convecção predomina sobre a condução.
-valores altos de Pe em engenharia: Pe>10.



EXEMPLO 9.3-1: Dialisador Hollow Fiber.
Considerando uma fibra com raio interno R e comprimento L. a parede da membrana permite o transporte por difusão do soluto da solução que circula por dentro da membrana para a solução dialisadora (externa). Por ajuste da composição da solução dialisadora, a solução que passa por dentro da membrana pode receber ou perder soluto. Nesta situação, há três resistências ao transporte de massa que devem ser vencidas:
-o fluido dentro da membrana;
-a parede da membrana propriamente dita;
-a solução dialisadora.

Para este problema, apenas as resistências representadas pelo fluido no interior da membrana e pela parede da membrana serão consideradas.



Cid é a concentração da espécie i na solução dialisadora.
Cio é a concentração da espécie i na entrada da membrana.

O fluxo do soluto i de dentro da fluido na membrana para a parede da membrana será dado por:

$$N_{ir}(R,z) = k_{Ci}(z)[C_{ib}(z) - C_i(R,z)] \qquad \text{(eq 1)}$$

Cib(z) é a concentração média do soluto i no fluido dentro da membrana;
Ci(R,z) é a concentração do soluto i na parede da membrana.

Em que:

$$C_{ib}(z) = \frac{\int_A C_i v_z dA}{\int_A v_z dA} \qquad (eq\ 2)$$

O coeficiente de transferência de massa k_{Ci} é tido como uma função conhecida da posição z.

O fluxo do soluto i através da membrana é dado por:

$$N_{ir}(R,z) = k_{mi}[C_i(R,z) - C_{id}] \qquad \text{(eq 3)}$$

k_{mi} é a permeabilidade da membrana ao componente i. k_{mi} depende da solubilidade do componente i no material da membrana.
Cid é tido como independente de z (a vazão da solução dialisadora é alta). é considerado como conhecido, assim como k_{mi}.
A equação para a conservação da espécie i é, em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + v_r \frac{\partial C_i}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial C_i}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial C_i}{\partial z} = D_i \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2}\right] + R_{vi} \qquad \text{(eq 4)}$$

Considerando-se o fluxo desenvolvido:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = 0$$

-$v_r = v_\theta = 0$
-$v_z \neq 0$

Só há difusão na direção r, radial.
Não há reação homogênea: $R_{vi}=0$
A equação fica como:

$$v_z \frac{\partial C_i}{\partial z} = D_i \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C_i}{\partial r}\right)$$

Ou

$$v_z r \frac{\partial C_i}{\partial z} = D_i \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C_i}{\partial r}\right) \qquad \text{(eq 5)}$$

Que integrando-se:

$$\int_0^R v_z r \frac{\partial C_i}{\partial z} dr = \int_0^R D_i \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C_i}{\partial r}\right) dr \qquad \text{(eq 6)}$$

Que resulta em:

$$\int_0^R v_z r \frac{\partial C_i}{\partial z} dr = R D_i \frac{\partial C_i}{\partial r}(R,z) \qquad \text{(eq 7)}$$

O termo:

$$D_i \frac{\partial C_i}{\partial r}(R,z) = -N_{ir}(R,z) \qquad \text{(eq 8)}$$

Ou seja:

$$\int_0^R v_z r \frac{\partial C_i}{\partial z} dr = R D_i \frac{\partial C_i}{\partial r}(R,z) = -R N_{ir}(R,z) \qquad \text{(eq 9)}$$

O termo:

$$\int_0^R v_z r \frac{\partial C_i}{\partial z} dr = \frac{d}{dz}\int_0^R C_i v_z \, r dr \qquad \text{(eq 10)}$$

Como:

$$C_{ib}(z) = \frac{\int_A C_i v_z dA}{\int_A v_z dA} \qquad \text{(eq 2)}$$

$$C_{ib}(z)\int_A v_z dA = \int_A C_i\, v_z dA \qquad \text{(eq 11)}$$

Como dA=rdθdr,

$$C_{ib}(z)\iint_{r=0;\theta=0}^{r=R;\theta=2\pi} v_z\, rdrd\theta = \iint_{r=0;\theta=0}^{r=R;\theta=2\pi} C_i\, v_z rdrd\theta \qquad \text{(eq 12)}$$

Como no primeiro membro da eq 12 está-se empregando a concentração média Cib, no lugar de v_z, será empregada a velocidade média do escoamento U.

$$C_{ib}(z)2\pi U\frac{R^2}{2} = 2\pi\int_0^R C_i\, v_z rdr \qquad \text{(eq 13)}$$

E tem-se:

$$\int_0^R C_i\, v_z rdr = C_{ib}(z)U\frac{R^2}{2} \qquad \text{(eq 14)}$$

Logo:

$$\int_0^R v_z r\frac{\partial C_i}{\partial z}dr = \frac{d}{dz}\int_0^R C_i v_z\, rdr = \frac{d}{dr}\left[C_{ib}(z)U\frac{R^2}{2}\right] = \frac{UR^2}{2}\frac{d}{dz}C_{ib}(z) \qquad \text{(eq 15)}$$

Rearranjando-se as equações:

$$-RN_{ir}(R,z) = \frac{UR^2}{2}\frac{d}{dz}C_{ib}(z) \qquad \text{(eq 16)}$$

Ou:

$$\frac{d}{dz}C_{ib}(z) = -\frac{2N_{ir}}{RU} \qquad \text{(eq 17)}$$

Considerando-se o fluxo do soluto i para a parede da membrana:

$$N_{ir} = k_{Ci}[C_{ib}(z) - C_i(R,z)] \qquad \text{(eq 1)}$$

Tem-se:

$$\frac{d}{dz}C_{ib}(z) = -\frac{2k_{Ci}[C_{ib}(z) - C_i(R,z)]}{RU} \qquad \text{(eq 18)}$$

Como:

$$N_{ir}(R,z) = k_{mi}[C_i(R,z) - C_{id}] \qquad \text{(eq 3)}$$

E

$$N_{ir} = k_{Ci}[C_{ib}(z) - C_i(R,z)] \qquad \text{(eq 1)}$$

Devem ser iguais:

$$k_{mi}[C_i(R,z) - C_{id}] = k_{Ci}[C_{ib}(z) - C_i(R,z)] \qquad \text{(eq 19)}$$

Que resulta em:

$$C_i(R,z) = \frac{k_{Ci}C_{ib}(z) + k_{mi}C_{id}}{k_{Ci} + k_{mi}} \qquad \text{(eq 20)}$$

E assim:

$$C_{ib}(z) - C_i(R,z) = \frac{k_{mi}}{k_{mi} + k_{Ci}}(C_{ib}(z) - C_{id}) \qquad \text{(eq 21)}$$

Portanto:

$$\frac{d}{dz}C_{ib}(z) = -\frac{2}{RU}k_{Ci}\frac{k_{mi}}{k_{mi} + k_{Ci}}(C_{ib}(z) - C_{id}) \qquad \text{(eq 22)}$$

Com Cib(0)=C_{i0}

Tal equação integrada fornece:

$$\frac{C_{ib}(z) - C_{id}}{C_{io} - C_{id}} = \exp\left[-\frac{2z}{RU}\left(\frac{k_{Ci}k_{mi}}{k_{Ci} + k_{mi}}\right)\right] \qquad \text{(eq 23)}$$

O termo $\frac{k_{Ci}k_{mi}}{k_{Ci}+k_{mi}}$ é o coeficiente global de transferência de massa.
Se a fibra tem comprimento L, é possível determinar Cib(L) e com isso determinar o quanto de soluto é removido pela membrana:

$$Q = [C_{ib}(0) - C_{ib}(L)]$$

Sendo Q a vazão de fluido no interior da membrana.