2020-2, "FISMAT-AV", AULA 30

OBJETIVOS: FINALIZAR TFs MULTIDIMENSIONAIS E INICIAR FUNÇÕES DE GREEN.

(CONT.) 3.9 TF MULTIDIMENSIONAL

COMO VIMOS NO FIM DA AULA ANTERIOR, MUITOS CÁLCULOS PODEM SER EVITADOS MEDIANTE O EMPREGO DO TEOREMA DE CONVOLUÇÃO, QUE, EM SUA VERSÃO MULTIDIMENSIONAL, ESTABELECE QUE A TF DA CONVOLUÇÃO

$$\boxed{(f * g)(\vec{r}) \equiv (2\pi)^{-n/2} \int d^n\xi \, f(\vec{\xi}) \cdot g(\vec{r}-\vec{\xi})}$$

DE FUNÇÕES $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ É

$$\boxed{\widetilde{f*g}(\vec{k}) = \tilde{f}(\vec{k}) \cdot \tilde{g}(k)} \quad .$$

☐ DEMONSTRAÇÃO: ANÁLOGA À DE $n=1$

$$(f*g)(\vec{r}) = (2\pi)^{-n/2}\int d^n\xi \cdot f(\vec{\xi})\cdot g(\vec{r}-\vec{\xi}) =$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int d^n\xi\, f(\vec{\xi})\left\{(2\pi)^{-n/2}\int d^n k\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{\xi})}\tilde{g}(\vec{k})\right\}$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int d^n k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\tilde{g}(\vec{k})\left[(2\pi)^{-n/2}\int d^n\xi\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{\xi}} f(\vec{\xi})\right]$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int d^n k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left[\tilde{g}(\vec{k})\cdot\tilde{f}(\vec{k})\right]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{f}(\vec{k})\cdot\tilde{g}(\vec{k})\right]$$

Q.E.D. ☐

POR FIM, A TF DE UMA FUNÇÃO VETORIAL É O "VETOR DAS TFs DAS COMPONENTES". POR EXEMPLO, EM $n=3$,

$$\boxed{\widetilde{\nabla f} = (-i\vec{k})\cdot\tilde{f}}\,.$$

VEJAMOS. $(\nabla f)_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$. MAS $\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}} = -ik_x\tilde{f}$

POIS $\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}} = (2\pi)^{-3/2}\int d^3 r\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}) =$

$$= (2\pi)^{-3/2}\int d^3r\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}f(\vec{r})\right) - ik_x e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}f(\vec{r})\right] =$$

$$= -ik_x \tilde{f}(\vec{k}),$$

POIS A 1ª INTEGRAL SE ANULA, HAJA VISTA QUE $f(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$.

ANALOGAMENTE, $\tilde{f}_y = -ik_y\tilde{f}$ E $\tilde{f}_z = -ik_z\tilde{f}$, DE MODO QUE

$$\widetilde{\nabla f} = (\tilde{f}_x, \tilde{f}_y, \tilde{f}_z) = \left[-i\tilde{f}(\vec{k})\right]\vec{k}$$

→ ESCALAR!

3.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE TFs

TODA FUNÇÃO (DIGNA DO NOME!) RELEVANTE PARA A FÍSICA PERTENCE A ALGUM ESPAÇO DE HILBERT SEPARÁVEL, ONDE HÁ BASES ENUMERÁVEIS, QUANDO INFINITAS. EM CLARO CONTRASTE COM ISSO, APARENTEMENTE, A TF EXIBE UMA FUNÇÃO COMO

UMA SUPERPOSIÇÃO CONTÍNUA DE ONDAS PLANAS,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{-ikx} dk .$$

A "EXPLICAÇÃO", INFORMAL E IMPRECISA, É QUE, AO CONTRÁRIO DO QUE OCORRE EM UMA EXPANSÃO COM UMA BASE ENUMERÁVEL, HÁ REDUNDÂNCIA NOS "COEFICIENTES" $\tilde{f}(k)$ DO CONJUNTO CONTÍNUO DE ONDAS PLANAS e^{-ikx}, QUE NÃO SÃO INTEGRÁVEIS E NEM QUADRADO-INTEGRÁVEIS, DE MODO QUE NEM MESMO PERTENCEM A UM ESPAÇO DE FUNÇÕES COMO $L^2(\mathbb{R})$. COMO PODERIAM FORMAR UMA BASE? ABUSANDO DO TERMO BASE, O QUE PODEMOS DIZER É QUE $\{e^{-ikx}\}_{k \in \mathbb{R}}$ CONSTITUI UMA BASE CONTÍNUA SUPERCOMPLETA DE DISTRIBUIÇÕES QUE SE REVELA CONVENIENTE.

ALGO SIMILAR OCORRE COM OS ESTADOS COERENTES, EM ÓPTICA QUÂNTICA.

PARA TENTAR REFORÇAR ESSA ARGUMENTAÇÃO INFORMAL, NOTE QUE, COM DISTRIBUIÇÕES, QUALQUER FUNÇÃO EXPRESSÁVEL EM ALGUMA BASE ENUMERÁVEL ADMITE UMA "SUPERPOSIÇÃO CONTÍNUA":

$$\sum_{x'} f(x')\,\delta(x'-x)$$

$$\downarrow$$

$$\int dx'\, f(x')\,\delta(x'-x) = f(x).$$