MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Sistemas lineares de controle
Prova de um teorema de controlabilidade[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo - SP

[1] K. Ogata [Seção 9.6]. J. Baumeister e A. Leitão [Capítulo 3]. R. Brockett [Seção 13].

Nas aulas que se seguem **pretendemos** discutir os conceitos de controlabilidade e observabilidade de sistemas de controle lineares da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases} \qquad (*)$$

onde $x(t)$ é um vetor de **estado** $n \times 1$; $u(t)$ vetor de **controle** $r \times 1$; $y(t)$ vetor de **saída** $m \times 1$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ **constantes**.

- Inicialmente trataremos controlabilidade de estado **autônomo**, ie. assumindo que as **funções** matriciais A e B são constantes.
- Em **seguida** veremos controlabilidade de saída e assim do sistema de controle.
- Posteriormente veremos **observabilidade** também de sistemas autônomos discutindo em seguida controlabilidade e observabilidade do **não** autônomo.

Controlabilidade

- Dizemos que o sistema $(*)$ é **controlável** em $[t_0, t_1]$, se for possível, por meio de um **vetor** de controle admissível u, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ para qualquer outro estado $x(t_1) \in \mathbb{R}^n$.
- Se o sistema de estado for controlável para **todo** intervalo finito $[t_0, t_1]$, dizemos que o sistema é **completamente** controlável.

Observabilidade

Dizemos que um sistema é **observável** no instante t_0, se for possível determinar o estado inicial $x(t_0)$ a partir da observação da **saída** também durante um intervalo de tempo finito $[t_0, t_1]$.

Tais conceitos foram introduzidos por **Kalman** e tem um papel importante no projeto de sistemas. De fato, a controlabilidade e observabilidade de um sistema podem ditar a existência de uma solução **completa** para o projeto validando sua execução.

Teorema

O sistema de **estado**

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ matrizes constantes é **controlável**, se e somente se, o **posto** da matriz $n \times n$

$$\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

é n. Assim, o sistema de estado é controlável se e só se é **completamente** controlável.

- Lembramos que *posto* de uma matriz corresponde ao **número** de linhas ou colunas **linearmente** independentes dela. Nesse caso particular, como se trata de uma matriz $n \times n$, posto igual a n é equivalente a determinante **não** nulo.
- Veja que aqui o controle é realizado por uma função **escalar** vezes uma matriz coluna B de tamanho $n \times 1$.
- Note que a **condição** de controlabilidade não depende do intervalo $[t_0, t_1]$. Por isso podemos concluir que os conceitos de controlabilidade e controlabilidade completa neste caso são **equivalentes**.

Dem. Inicialmente **notamos** que o sistema de estado

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{1}$$

é controlável em $[t_0, t_1]$ se e só se o sistema

$$\dot{z}(t) = e^{-A(t-t_0)}B\,u(t) \tag{2}$$

é **controlável** em $[t_0, t_1]$. Com efeito, temos que as soluções $x(t)$ e $z(t)$ de (1) e (2) respectivamente, se relacionam pela **expressão**

$$z(t) = e^{-A(t-t_0)}x(t). \tag{3}$$

Logo, $z(t_1) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(s-t_0)}B\,u(s)\,ds$ se e somente se

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{A(t_1-t_0)}z(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}\left(z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(s-t_0)}B\,u(s)\,ds\right) \\ &= e^{A(t_1-t_0)}z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}B\,u(s)\,ds \end{aligned}$$

que é solução de (1) com condição inicial $x(t_0) = z(t_0)$ **avalidada** em $t = t_1$.

- Assim, existe controle u cuja solução $z(t)$ **evolui** $z(t_0)$ a $z(t_1)$, se e só se, para o **mesmo** u, a solução $x(t)$ associada evolui $x(t_0) = z(t_0)$ a $e^{A(t_1-t_0)}z(t_1)$ com $e^{A(t_1-t_0)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertível.
- Portanto, (1) é **controlável** em $[t_0, t_1]$ se e só se (2) também o **é**.

Controlabilidade ao zero

Note que (2) é controlável em $[t_0, t_1]$ se e só se existe controle u tal que (2) evolui qualquer estado inicial $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$ à **origem** $z(t_1) = 0$. Assim, devido a (3), temos que (1) é controlável, se e só se (1) evolui qualquer estado inicial $x(t_0)$ à **origem**.

A **ida** é clara. Basta verificarmos a volta. Suponha então que (2) evolui qualquer estado inicial à origem em $[t_0, t_1]$. Em **particular**, (2) evolui $z(t_0) - z(t_1)$ à origem. Assim, **existe** controle u tal que

$$0 = z(t_0) - z(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(s-t_0)} B\, u(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad z(t_1) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(s-t_0)} B\, u(s)\, ds.$$

- Desta forma, podemos **supor**, sem perda de generalidade, que (1) é controlável, se e só se, evolui qualquer condição inicial $x(t_0)$ à origem.

Então, dado **qualquer** $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, existe $u(t)$ tal que

$$0 = e^{A(t_1 - t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - s)} B\, u(s)\, ds$$
$$\iff \quad x(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0 - s)} B\, u(s)\, ds.$$

Agora, pelo Teorema de **Cayley-Hamilton** existem funções $\alpha_k(t)$ tais que

$$e^{A(t_0 - t)} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k. \tag{4}$$

Daí,

$$x(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(s) A^k \right) B\, u(s)\, ds = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_{t_0}^{t_1} \alpha_k(s)\, u(s)\, ds$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k \quad \text{se chamamos} \quad \beta_k = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_k(s)\, u(s)\, ds.$$

Portanto, **existem** constantes β_k tais que

$$\begin{aligned} x(t_0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B\beta_k \\ &= -\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $x(t_0)$ é um estado arbitrário em $\mathbb{R}^n$ **concluímos** que o posto da matriz

$$\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

deve ser n provando a **ida** do Teorema.

Vejamos agora a **volta**. Suponha $\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ de posto n. Inicialmente veremos que a matriz $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ abaixo é invertível

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-s)} BB' e^{A'(t_0-s)}\, ds.$$

Para tanto, seja x um vetor no **núcleo** de W. Então

$$\begin{aligned} 0 &= x'Wx = x'\left(\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-s)} BB' e^{A'(t_0-s)}\, ds\right) x \\ &= \int_{t_0}^{t_1} x' e^{A(t_0-s)} BB' e^{A'(t_0-s)} x\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|B' e^{A'(t_0-s)} x\|^2\, ds \end{aligned}$$

que nos dá

$$\|B' e^{A'(t_0-s)} x\| = 0 \quad \forall s \in [t_0, t_1]$$

pela **continuidade** da função exponencial.

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= B'\left(I + A'(t_0 - s) + \frac{A'^2}{2}(t_0 - s)^2 + \ldots + \frac{A'^k}{k!}(t_0 - s)^k + \ldots\right)x \\ &= B'x + B'A'x(t_0 - s) + \frac{B'A'^2x}{2}(t_0 - s)^2 + \ldots + \frac{B'A'^kx}{k!}(t_0 - s)^k + \ldots \end{aligned}$$

para todo $s \in [t_0, t_1]$. Logo

$$0 = B'x = B'A'x = B'A'^2x = \ldots = B'A'^{n-1}x$$

e assim o vetor x **pertence** ao núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}'.$$

Como $\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ possui posto n, temos que $\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}'$ também é de **posto** n e portanto é uma matriz invertível. Desta forma temos $x = 0$, de onde podemos concluir que a matriz W é **invertível**.

Agora concluiremos que o sistema de estado (1) é **controlável**. Para tanto, vamos definir **um** controle u que satisfaça a equação

$$x(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-s)} B\, u(s)\, ds.$$

Tomamos

$$u(t) = -B' e^{A'(t_0-t)}\, W^{-1}\, x(t_0)$$

onde $W = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-s)} BB' e^{A'(t_0-s)}\, ds$. Então

$$\begin{aligned}
-\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-s)} B\, u(s)\, ds &= \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-s)} BB' e^{A'(t_0-s)}\, W^{-1}\, x(t_0)\, ds \\
&= \left(\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-s)} BB' e^{A'(t_0-s)}\, ds \right) W^{-1}\, x(t_0) \\
&= W\, W^{-1}\, x(t_0) \\
&= x(t_0).
\end{aligned}$$

□

a) Note que a **prova** do teorema exibe um controle u que executa a operação desejada.

b) O resultado pode ser **estendido** ao caso em que o vetor de controle u seja de dimensão r. Nesse caso o sistema de **estado** é descrito por

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{5}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ e $u \in \mathbb{R}^{r\times 1}$.

Exercício 1.

Mostre que o sistema de estado (5) é controlável em $[t_0, t_1]$, se e somente se, a matriz

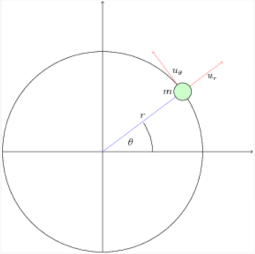
$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

de tamanho $n \times nr$ possui posto n.

c) A matriz $\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ é comumente denominada *matriz de controlabilidade*.

Exercício 2 (Um satélite simples)

Retornamos aqui ao sistema linearizado associado ao modelo de uma **partícula** de massa unitária sob ação de um campo de aceleração **central** newtoniano.



Sabe-se que sua equação **linearizada** sobre órbitas circulares é dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Aplique aqui o resultado do Exercício 1 para **mostrar** que tal sistema é controlável.

3. Um oscilador harmônico

Considere o seguinte oscilador harmônico com controle u:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u.$$

Queremos **evoluir** este sistema do estado $(1,0)$ ao estado $(0,0)$ em 2π unidades de tempo.

i) Existe um controle $u(t)$ que pode fazer essa transferência? Se **sim**, exiba-o.

ii) Considere **agora** a seguinte função contínua por partes:

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{se} \quad t \in [0, 2\pi/3) \\ u_2 & \text{se} \quad t \in [2\pi/3, 4\pi/3) \\ u_3 & \text{se} \quad t \in [4\pi/3, 2\pi] \end{cases} .$$

Existem u_1, u_2 e $u_3 \in \mathbb{R}$ que faça com que o sistema de estado **evolua** de $(1,0)$ a $(0,0)$ em 2π unidades de tempo?