Lógica
Aula 15

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

Definição Formal da Linguagem

Símbolos Lógicos:

- Variáveis
- Conectivos Booleanos ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$)
- Quantificadores ($\forall$, $\exists$)

Definição Formal da Linguagem

Símbolos Lógicos:

- Variáveis
- Conectivos Booleanos ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$)
- Quantificadores ($\forall$, $\exists$)

Símbolos não lógicos:

- $\mathcal{F}$: conjunto de símbolos de funções.
- $\mathcal{P}$: conjunto de símbolos de predicados.

Termos

Denotam objetos:

- variáveis
- (constantes)
- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n, $f(t_1, t_2, ..., t_n)$.

Termos

Denotam objetos:

- variáveis
- (constantes)
- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n, $f(t_1, t_2, ..., t_n)$.

Exemplo: (2-(s(x)+y))*x ou *(-(2,+(s(x),y)),x)

Fórmulas

- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $P \in \mathcal{P}$ tem aridade n, $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma fórmula atômica.
- Se φ e ψ são fórmulas, $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \rightarrow \psi$ são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ são fórmulas.

Fórmulas

- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $P \in \mathcal{P}$ tem aridade n, $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma fórmula atômica.
- Se φ e ψ são fórmulas, $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \rightarrow \psi$ são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$ são fórmulas.

Exemplos: $\forall x(\text{Criança}(x) \rightarrow \mathit{MaisNovaQue}(x, \text{mãe}(x)))$, etc.

Variáveis livres

Variáveis que não aparecem no escopo de um quantificador.

Na árvore: subindo em direção à raiz, não encontramos quantificador com a mesma variável.

Variáveis livres

Variáveis que não aparecem no escopo de um quantificador.

Na árvore: subindo em direção à raiz, não encontramos quantificador com a mesma variável.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))$
- $(\forall x(P(x) \wedge Q(y))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x, y))[m(a, c)/y]$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \land S(x,y))[m(a,c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \land S(x, m(a,c)))$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))[m(a,c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,m(a,c)))$
- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))[m(a,c)/x]$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))[m(a,c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,m(a,c)))$
- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))[m(a,c)/x] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y))[m(a,c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,m(a,c)))$
- $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y))[m(a,c)/x] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y))$
- $(\forall x(P(x) \land Q(y))) \to (\neg P(x) \lor Q(y))[f(x,y)/x]$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))[m(a,c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,m(a,c)))$
- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))[m(a,c)/x] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))$
- $(\forall x(P(x) \wedge Q(y))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))[f(x,y)/x] \Longrightarrow$
  $(\forall x(P(x) \wedge Q(y))) \rightarrow (\neg P(f(x,y)) \vee Q(y))$

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$???

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))$

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))$

t é *livre para* x *em* φ se nenhum x livre de φ aparece no escopo de algum $\forall y$ ou $\exists y$ com y em t.

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))$

t é *livre para* x *em* φ se nenhum x livre de φ aparece no escopo de algum $\forall y$ ou $\exists y$ com y em t.

Pré condição para $\varphi[t/x]$

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))$

t é *livre para x em* φ se nenhum x livre de φ aparece no escopo de algum $\forall y$ ou $\exists y$ com y em t.

Pré condição para $\varphi[t/x]$

- $S(x) \wedge \forall z(P(x) \to Q(z))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall z(P(f(y,y)) \to Q(z))$

Dedução Natural para LPO

Regras anteriores + igualdade e quantificadores

Dedução Natural para LPO

Regras anteriores + igualdade e quantificadores

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\wedge_i \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\wedge_{e_1} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\wedge_{e_2} \qquad \frac{\phi}{\phi \vee \psi}\vee_{i_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\vee_{i_2}$$

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots \\ \xi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots \\ \xi\end{array}}}{\xi}\vee_e \qquad \frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\to_e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi}\to_i$$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\neg_e \qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\neg_e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\neg_i \qquad \frac{\bot}{\phi}\bot_e$$

Regras da Igualdade

Introdução

$$\frac{}{t = t} =_i$$

Regras da Igualdade

Introdução

$$\frac{}{t = t} =_i$$

Eliminação

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} =_e$$

Regras da Igualdade

Introdução

$$\frac{}{t = t} =_i$$

Eliminação

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} =_e$$

Exemplos:

- $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

Regras da Igualdade

Introdução

$$\frac{}{t = t} =_i$$

Eliminação

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} =_e$$

Exemplos:

- $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$
- $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

Quantificador Existencial

Introdução

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi} \exists_i$$

Quantificador Existencial

Introdução

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi} \; \exists_i$$

Condição: t livre para x em φ.

Quantificador Existencial

Introdução

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi} \ \exists_i$$

Condição: t livre para x em φ.

Exemplos:

- $\vdash R(a, a) \to \exists x R(x, x)$

Quantificador Existencial

Introdução

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}\ \exists_i$$

Condição: t livre para x em φ.

Exemplos:

- $\vdash R(a, a) \to \exists x R(x, x)$
- $R(a, a) \vdash \exists x \exists y R(x, y)$

Quantificador Universal

Eliminação

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]} \; \forall_e$$

Quantificador Universal

Eliminação

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]} \ \forall_e$$

Condição: t livre para x em φ.

Quantificador Universal

Eliminação

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]} \; \forall_e$$

Condição: t livre para x em φ.

Exemplos:

- $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$

Quantificador Universal

Eliminação

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]} \; \forall_e$$

Condição: t livre para x em φ.

Exemplos:

- $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$
- $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \exists x \forall y R(x, y)$

Quantificador Universal

Introdução

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad\varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi} \; \forall_i$$

Condição: x_0 é arbitrário e só ocorre dentro da caixa

Quantificador Universal

Introdução

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \qquad \vdots \\ \quad \varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi}\ \forall_i$$

Condição: x_0 é arbitrário e só ocorre dentro da caixa

Exemplo:

- $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow P(x))$

Quantificador Existencial

Eliminação

$$\dfrac{\exists x \varphi \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad \varphi[x_0/x] \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad \psi \end{array}}}{\psi}\ \exists_e$$

Condição: x_0 não aparece fora da caixa.

Quantificador Existencial

Eliminação

$$\dfrac{\exists x\varphi \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad \varphi[x_0/x] \\ \quad \vdots \\ \quad \psi \end{array}}}{\psi}\ \exists_e$$

Condição: x_0 não aparece fora da caixa.

Exemplo:

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x)$

Exercícios

Prove os seguintes sequentes:

- $\forall x A(x) \ \vdash \ A(c) \wedge A(d)$

Exercícios

Prove os seguintes sequentes:

- $\forall x A(x) \vdash A(c) \wedge A(d)$
- $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x B(x)$

Exercícios

Prove os seguintes sequentes:

- $\forall x A(x) \vdash A(c) \wedge A(d)$
- $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x B(x)$
- $\exists x P(x) \rightarrow Q(c) \vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(c))$