Estatística de Redes Sociais

Antonio Galves

Módulo 3

14a. aula

Rede com pressão social:

Visitas sucessivas à configuração escada e recorrência positiva.

Um modelo de rede com pressão social

- $A = \{1, 2, ..., N\}$: conjunto de atores.
- $\mathcal{O} = \{+1, -1\}$: conjunto de opiniões possíveis.
- $o_n \in \mathcal{O}$: n-ésima opinião emitida na rede.
- $A_n \in A$: ator que emitiu a n-ésima opinião.
- $L_n^a = \max(m \leq n : A_m = a)$.
- $U_n(a) = \sum_{m=L_n^a+1}^{n} o_m$.
- $U_n = (U_n^1(1), \ldots, U_n^1(N))$.
- $\mathcal{S}_N = \{(u(1), ..., u(N)) \in \mathbb{Z}^N : u(i) = 0,$ para algum $i = 1, ..., N\}$.
- Observe que $U_n \in \mathcal{S}_N$.

Um modelo de rede com pressão social

- $$\mathbb{P}(o_{n+1} = o, A_{n+1} = a \mid U_n) = \frac{e^{oU_n(a)}}{\sum_{b \in A} \left[e^{(+1)U_n(b)} + e^{(-1)U_n(b)} \right]}.$$

- $$U_{n+1} = \pi_{A_{n+1}, O_{n+1}}(U_n).$$

- Estamos usando a seguinte notação: para todo $a \in \mathcal{A}$ e todo $o \in \mathcal{O}$,

  $$\pi_{a,o} : \mathcal{S}_N \to \mathcal{S}_N$$

  é a transformação que a toda lista $u \in \mathcal{S}_N$ associa a lista $\pi_{a,o}(u) \in \mathcal{S}_N$ assim definida:

  $$\pi_{a,o}(u)(b) = \begin{cases} u(b) + o & \text{, se } b \neq a, \\ 0 & \text{, se } b = a. \end{cases}$$

A cadeia $(U_n)_{n\geq 0}$ visita a escada $e^{(+1)}$ infinitas vezes

- Vamos mostrar que a cadeia $(U_n)_{n\geq 0}$ assume o valor $e^{(+1)}$ infinitas vezes, qualquer que seja o valor de sua lista inicial $U_0 = u \in \mathcal{S}_N$.
- Faremos isso mostrando que $T^{e^{(+1)}\to e^{(+1)}}$ é majorada por uma distribuição geométrica G_N no seguinte sentido:

$$\mathbb{P}(T^{e^{(+1)}\to e^{(+1)}} > 2kN) \leq \mathbb{P}(G_N > k) = (\delta_N)^k,$$

  onde $\delta_N \in (0,1)$ é calculado explicitamente.
- Isso implica que

$$\mathbb{E}\left(T^{e^{(+1)}\to e^{(+1)}}\right) \leq 2N\mathbb{E}(G_N) = \frac{2N(1-\delta_N)}{\delta_N}$$

- Isso implica na existência de uma, e uma só medida de probabilidade invariante para a cadeia $(U_n)_{n\geq 0}$, qualquer que seja o valor de sua lista inicial.

Como fazemos isso?

1. Seja o conjunto de atores $\mathcal{A} = \{1, 2, ..., N\}$. Vamos primeiro ver que para qualquer $u \in \mathcal{S}_N$, a probabilidade

$$\mathbb{P}\left(|U_{n+N}(a)| \leq N - 1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A} \,\middle|\, U_n = u \right) \geq \left(\frac{1}{N}\right)^N .$$

2. Depois vamos ver que existe $\epsilon_N \in (0, 1)$ tal que

$$\mathbb{P}\left(U_{n+N} = e^{(+1)} \,\middle|\, \bigcap_{a \in \mathcal{A}} \{|U_n(a)| \leq N - 1\} \right) \geq \epsilon_N .$$

QUIZ

- Vamos supor que $U_0 = u \in \mathcal{S}_N$ e

$$\{A_1, A_2, ..., A_N\} = \{1, 2, ..., N\}.$$

- Isto é, vamos supor que os atores que se manifestaram nos instantes $1, 2, ..., N$ sejam todos distintos.
- O que podemos dizer sobre a lista U_N?
- Falando mais diretamente: o que podemos dizer sobre $\max\{|U_N(a)| : a \in \{1, ..., N\}\}$?

R E S P O S T A

- Como

$$U_n = \pi_{A_n,O_n}(\pi_{A_{n-1},O_{n-1}}...(\pi_{A_1,O_1}(U_0)...),$$

se

$$\{A_1, A_2, ..., A_N\} = \{1, 2, ..., N\},$$

então obrigatoriamente $|U_N(a)| \leq N - 1$, pois depois de ser zerado, o ator a recebeu no máximo $N - 1$ opiniões favoráveis ou contrárias.

- Aliás, o único que recebeu $N - 1$ opiniões é o ator A_1, e essas opiniões podem ser contraditórias.
- Ou seja, $|U_N(a)| \leq N - 1$, qualquer que seja $a \in \mathcal{A}$.

Q U I Z

- Dada uma configuração $u \in \mathcal{S}_N$, seja

$$M(u) = \text{argmax}\{|u(b)| : b \in \mathcal{A}\}.$$

- Vamos supor que $U_0 = u \in \mathcal{S}_N$ e

$$A_1 = M(U_0), A_2 = M(U_1), ..., A_N = M(U_{N-1})$$

- O que podemos dizer sobre a lista U_N?
- Falando mais diretamente: o que podemos dizer sobre $\max\{|U_N(a)| : a \in \{1, ..., N\}\}$?

RESPOSTA

- A resposta ainda é a mesma:

$$|U_N(a)| \leq N - 1 \text{ para qualquer que seja } a \in \mathcal{A},$$

  mas a explicação tem duas partes.

- Quando o conjunto de atores assumindo os máximos são todos distintos, o resultado segue do QUIZ anterior.
- Se houver algum ator a tal que $M(U_n) = M(U_m) = a$, com $1 \leq m < n \leq N$ isso significa que o valor de $|U_n(a)| \leq n - m < N - 1$. Como esse é o valor máximo, todos os outros atores terão seus valores menores que $n - m$, e portanto no instante N o valor máximo que $U_N(b)$ pode atingir para todo $b \in \mathcal{A}$ é

$$n - m + (N - n) = N - m \leq N - 1.$$

QUIZ

- É verdade que

$$\mathbb{P}(A_1 = M(u)|U_0 = u) \geq \frac{1}{N}?$$

- É verdade que

$$\mathbb{P}(A_1 = M(U_0), A_2 = M(U_1), ..., A_N = M(U_{N-1}) \mid U_0 = u) \geq \left(\frac{1}{N}\right)^N?$$

R E S P O S T A

- Suponha que $M(u) = a$. Por definição,

$$\mathbb{P}(A_1 = M(u) | U_0 = u) = \frac{e^{(+1)u(a)} + e^{(-1)u(a)}}{\sum_{b \in A} \left[e^{(+1)u(b)} + e^{(-1)u(b)} \right]}.$$

- Como a função $f(r) = e^r + e^{-r}$ é crescente para $r \in [0, +\infty)$, temos que

$$\frac{e^{(+1)u(a)} + e^{(-1)u(a)}}{\sum_{b \in A} \left[e^{(+1)u(b)} + e^{(-1)u(b)} \right]} \geq \frac{e^{(+1)u(a)} + e^{(-1)u(a)}}{\sum_{b \in A} \left[e^{(+1)u(a)} + e^{(-1)u(a)} \right]} = \frac{1}{N}.$$

- A segunda parte do QUIZ é deixada como exercício.

Minorando a probabilidade de produzir $e^{(+1)}$

- Seja $\mathcal{A} = \{1, ..., N\}$, e seja $u \in \mathcal{S}_N$, satisfazendo

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A}.$$

- Queremos encontrar um minorante $\epsilon_N \in (0,1)$ tal que

$$\mathbb{P}\left(U_N = e^{(+1)} \;\middle|\; U_0 = u\right) \geq \epsilon_N.$$

- Se

$$A_1 = N, A_2 = N-1, ..., A_N = 1,$$

$$O_1 = O_2 = ... = O_N = +1,$$

então

$$U_N = e^{(+1)}.$$

Minorando a probabilidade de produzir $e^{(+1)}$

- Ou seja,

$$\bigcap_{n=1}^{N}\{A_n = N-n+1, O_n = +1\} \subset \{U_N = e^{(+1)}\}$$

- Logo,

$$\mathbb{P}\left(U_N = e^{(+1)} \,\middle|\, U_0 = u\right) \geq$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N}\{A_n = N-n+1, O_n = +1\} \,\middle|\, U_0 = u\right) =$$

$$\prod_{n=1}^{N}\mathbb{P}\left(A_n = N-n+1, O_n = +1 \,\middle|\, U_{n-1}\right),$$

onde $U_n = \pi_{N-n+1,+1}(U_{n-1})$. para todo $n = 1, ..., N-1$.

Minorando cada termo

Por definição,

$$\mathbb{P}\left(\{A_1 = N, O_1 = +1\} \,\middle|\, U_0 = u\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\{A_1 = N\} \,\middle|\, U_0 = u\right) \mathbb{P}\left(\{O_1 = +1\} \,\middle|\, A_1 = N, U_0 = u\right).$$

$$\mathbb{P}\left(\{A_1 = N\} \,\middle|\, U_0 = u\right) = \frac{e^{u(N)} + e^{-u(N)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{u(b)} + e^{-u(b)}\right]}$$

$$\mathbb{P}\left(\{O_1 = +1\} \,\middle|\, A_1 = N, U_0 = u\right) = \frac{e^{u(N)}}{e^{u(N)} + e^{-u(N)}}$$

QUIZ

- Supondo que a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaça a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

encontre um minorante para

$$\mathbb{P}\left(\{A_1 = N\} \,\middle|\, U_0 = u\right) = \frac{e^{u(N)} + e^{-u(N)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{u(b)} + e^{-u(b)}\right]}$$

RESPOSTA

- A probabilidade do ator N emitir uma opinião é uma função crescente de $|u(N)|$ e uma função decrescente de $|u(a)|$, para $a \neq N$.
- Desse modo, com a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

temos

$$\mathbb{P}\Big(\{A_1 = N\} \,\Big|\, U_0 = u\Big) = \frac{e^{u(N)} + e^{-u(N)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{u(b)} + e^{-u(b)}\right]} \geq$$

$$\frac{2}{2 + (N-1)(e^{N-1} + e^{-(N-1)})}.$$

QUIZ

- Supondo que a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaça a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

encontre um minorante para

$$\mathbb{P}\left(\{O_1 = +1\} \,\middle|\, A_1 = N, U_0 = u\right) = \frac{e^{u(N)}}{e^{u(N)} + e^{-u(N)}}.$$

RESPOSTA

- A probabilidade do ator N emitir uma opinião favorável $+1$ é uma função crescente de $u(N)$.
- Como sabemos que $u(N) \geq -(N-1)$, temos

$$\mathbb{P}\left(\{O_1 = +1\} \,\Big|\, A_1 = N, U_0 = u\right) = \frac{e^{u(N)}}{e^{u(N)} + e^{-u(N)}} \geq$$

$$\frac{e^{-(N-1)}}{e^{-(N-1)} + e^{N-1}} = \frac{1}{1 + e^{2(N-1)}}.$$

QUIZ

- Supondo que

1. a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaz a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

2. $A_1 = N$ e $O_1 = +1$.

- O que podemos dizer sobre $U_1 = \pi_{N,+1}(u)$?

R E S P O S T A

- Podemos dizer que

$$U_1(N) = 0.$$

e

$$-N + 2 \leq U_1(a) \leq N$$

para todo $a \neq N$.

QUIZ

- Supondo que a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaça a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

encontre um minorante para

$$\mathbb{P}\left(\{A_2 = N-1\} \,\middle|\, U_1 = \pi_{N,+1}(u)\right).$$

R E S P O S T A

- Por definição,

$$\mathbb{P}\left(\{A_2 = N-1\} \;\middle|\; U_1 = \pi_{N,+1}(u)\right) = \frac{e^{\pi_{N,+1}(u)(N-1)} + e^{-\pi_{N,+1}(u)(N-1)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{\pi_{N,+1}(u)(b)} + e^{-\pi_{N,+1}(u)(b)}\right]}.$$

- Pelo QUIZ anterior, sabemos que para todo $a \neq N$

$$-N+2 \leq \pi_{N,+1}(u)(a) \leq N,$$

e por definição, $\pi_{N,+1}(u)(N) = 0$.

- Desse modo, temos

$$\mathbb{P}\left(\{A_2 = N-1\} \;\middle|\; U_1 = \pi_{N,+1}(u)\right) = \frac{e^{\pi_{N,+1}(u)(N-1)} + e^{-\pi_{N,+1}(u)(N-1)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{\pi_{N,+1}(u)(b)} + e^{-\pi_{N,+1}(u)(b)}\right]} \geq$$

$$\frac{2}{2+2+(N-2)(e^N + e^{-N})}.$$

Q U I Z

- Supondo que a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaça a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

encontre um minorante para

$$\mathbb{P}\left(\{O_2 = +1\} \,\middle|\, A_2 = N-1, U_1 = \pi_{N,+1}(u)\right).$$

RESPOSTA

- A probabilidade do ator $N-1$ emitir uma opinião favorável $+1$ é uma função crescente de $U_1(N-1) = \pi_{N,+1}(u)(N-1)$.
- Por analogia com o QUIZ anterior, sabemos que $\pi_{N,+1}(u)(N-1) \geq -(N-2)$.
- Logo,

$$\mathbb{P}\left(\{O_2 = +1\} \;\middle|\; A_2 = N-1, U_1 = \pi_{N,+1}(u)\right) =$$

$$\frac{e^{\pi_{N,+1}(u)(N-1)}}{e^{\pi_{N,+1}(u)(N-1)} + e^{-\pi_{N,+1}(u)(N-1)}} \geq \frac{e^{-(N-2)}}{e^{-(N-2)} + e^{N-2}} = \frac{1}{1+e^{2(N-2)}}.$$

Q U I Z

- Supondo que

1. a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaz a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

2. $A_1 = N$ e $O_1 = +1$.
3. $A_2 = N-1$ e $O_2 = +1$.

- O que podemos dizer sobre $U_2 = \pi_{N-1,+1}(U_1)$?

R E S P O S T A

- Podemos dizer que

$$U_2(N) = 1, \text{ pois } U_1(N) = 0 \text{ e } O_2 = +1,$$

$$U_2(N-1) = 0, \text{ pois } A_2 = N - 1,$$

e

$$-N + 3 \leq U_2(a) \leq N + 1$$

para todo $a \neq N, a \neq N - 1$.

QUIZ

- Supondo que a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaça a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

encontre um minorante para

$$\mathbb{P}\left(\{A_3 = N-2\} \,\middle|\, U_2 = \pi_{N-1,+1}(\pi_{N,+1}(u))\right).$$

R E S P O S T A

- Por definição,

$$\mathbb{P}\left(\{A_3 = N-2\} \;\middle|\; U_2 = \pi_{N-1,+1}(\pi_{N,+1}(u))\right) = \frac{e^{U_2(N-2)} + e^{-U_2(N-2)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{U_2(b)} + e^{-U_2(b)}\right]}.$$

- Pelo QUIZ anterior, sabemos que

$$-N+3 \leq U_2(a) \leq N+1,$$

para todo $a \neq N, a \neq N-1$, e $U_2(N) = 1$, $U_2(N-1) = 0$.

- Logo,

$$\mathbb{P}\left(\{A_3 = N-2\} \;\middle|\; U_2 = \pi_{N-1,+1}(\pi_{N,+1}(u))\right) = \frac{e^{U_2(N-2)} + e^{-U_2(N-2)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} \left[e^{U_2(b)} + e^{-U_2(b)}\right]} \geq$$

$$\frac{2}{2+2+(e^1+e^{-1})+(N-3)(e^{N+1}+e^{-(N+1)})}.$$

QUIZ

- Supondo que a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaça a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

encontre um minorante para

$$\mathbb{P}\left(\{O_3 = +1\} \,\middle|\, A_3 = N-2, U_2 = \pi_{N-1,+1}(\pi_{N,+1}(u))\right).$$

RESPOSTA

- A probabilidade do ator $N-2$ emitir uma opinião favorável $+1$ é uma função crescente de $U_2(N-2) = \pi_{N-1,+1}(\pi_{N,+1}(u))$.
- Por analogia com o QUIZ anterior, sabemos que $\pi_{N-1,+1}(\pi_{N,+1}(u)) \geq -(N-3)$.
- Logo,

$$\mathbb{P}\left(\{O_3 = +1\} \,\middle|\, A_3 = N-2, U_2 = \pi_{N-1,+1}(\pi_{N,+1}(u))\right) \geq$$

$$\frac{e^{U_2(N-2)}}{e^{U_2(N-2)} + e^{-U_2(N-2)}} \geq \frac{e^{-(N-3)}}{e^{-(N-3)} + e^{N-3}} = \frac{1}{1 + e^{2(N-3)}}.$$

QUIZ

- Supondo que

1. a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaz a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

2. Para $1 \leq k \leq n \leq N$, $A_k = N - k + 1$ e $O_k = +1$.

- O que podemos dizer sobre $U_n = \pi_{A_n,+1}(U_{n-1})$?

R E S P O S T A

- Por analogia aos QUIZes anteriores, podemos dizer que

$$U_n(N) = n - 1,$$

$$U_n(N-1) = n - 2,$$

$$...$$

$$U_n(N-n+1) = 0,$$

e

$$-(N-1) + n \leq U_n(a) \leq (N-1) + n$$

para todo $a \neq N, a \neq N-1$,..., $a \neq N-n+1$.

QUIZ

- Generalize as fórmulas anteriores e obtenha minorantes para

$$P\left(A_n = N - n + 1 \,\middle|\, U_{n-1}\right)$$

e

$$P\left(O_n = +1 \,\middle|\, A_n = N - n + 1, U_{n-1}\right),$$

sabendo que

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, e

$$U_n = \pi_{N-n+1,+1}(U_{n-1}),$$

para todo $n = 1, ..., N$.

RESPOSTA

- Pelo QUIZ anterior, sabemos que para todo $a \neq N, a \neq N-1$,...,
$a \neq N-n+1$

$$-(N-1)+n \leq U_n(a) \leq (N-1)+n,$$

e para $a \in \{N-n+1, ..., N\}$, temos que $U_n(a) = a - N - n + 1$.

- Logo,

$$P\left(A_n = N-n+1 \,\middle|\, U_{n-1}\right) = \frac{e^{U_{n-1}(N-n+1)} + e^{-U_{n-1}(N-n+1)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}_N} [e^{U_{n-1}(b)} + e^{-U_{n-1}(b)}]} =$$

$$\frac{2}{2 + \sum_{k=0}^{n-1}[e^k + e^{-k}] + (N-n)(e^{(N-1)+n} + e^{-((N-1)+n)})}.$$

R E S P O S T A

- Já vimos que

$$\mathbb{P}\left(\{O_1 = +1\} \,\middle|\, A_1 = N, U_0 = u\right) \geq \frac{1}{1 + e^{2(N-1)}},$$

$$\mathbb{P}\left(\{O_2 = +1\} \,\middle|\, A_2 = N-1, U_1 = \pi_{N,+1}(u)\right) \geq \frac{1}{1 + e^{2(N-2)}},$$

$$\mathbb{P}\left(\{O_3 = +1\} \,\middle|\, A_3 = N-2, U_2 = \pi_{N-1,+1}(\pi_{N,+1}(u))\right) \geq \frac{1}{1 + e^{2(N-3)}}.$$

- É fácil generalizar essas desigualdades e verificar que para todo $n = 1, ..., N$,

$$P\left(\{O_n = +1\} \,\middle|\, A_n = N-n+1, U_{n-1}\right) \geq \frac{1}{1 + e^{2(N-n)}}.$$

Resumindo

- Se a lista $u \in \mathcal{S}_N$ satisfaz a condição

$$-(N-1) \leq u(a) \leq N-1, \text{ para todo } a \in \mathcal{A}, \text{ então}$$

$$\mathbb{P}(U_N = e^{(+1)} | U_0 = u) \geq \prod_{n=1}^{N} \mathbb{P}\left(A_n = N-n+1, O_n = +1 \,\middle|\, U_{n-1}\right) \geq$$

$$\prod_{n=1}^{N} \zeta_n \frac{1}{1+e^{2(N-n)}},$$

onde

$$\zeta_n = \frac{2}{2 + \sum_{k=0}^{n-1}[e^k + e^{-k}] + (N-n)(e^{(N-1)+n} + e^{-((N-1)+n)})}.$$

- É esse produto que chamamos de ϵ_N.

Exercícios

1. Dada uma lista $u \in \mathcal{S}_N$, definimos $M(u) = \text{argmax}\{|u(b)| : b \in \mathcal{A}\}$. Vamos supor que $U_0 = u \in \mathcal{S}_N$ e

$$A_1 = M(U_0), A_2 = M(U_1), ..., A_N = M(U_{N-1}).$$

   Encontre um exemplo de uma lista $u \in \mathcal{S}_N$ e de escolhas $O_1 = o_1, ..., O_N = o_N$ tais que $M(U_m) = M(U_n)$ para algum par $1 \leq m < n \leq N$.

2. Sejam $u, v \in \mathcal{S}_3$ tais que $u(1) = v(1) = 0$ e $u(2), u(3), v(2), v(3)$ sejam positivos. Encontre um inteiro $m = m(u, v) \geq 1$ e $(A_n, O_n : n = 1, ..., m)$ tais que

$$v = \pi_{A_m, O_m}(\dots(\pi_{A_1, O_1}(u))\dots).$$