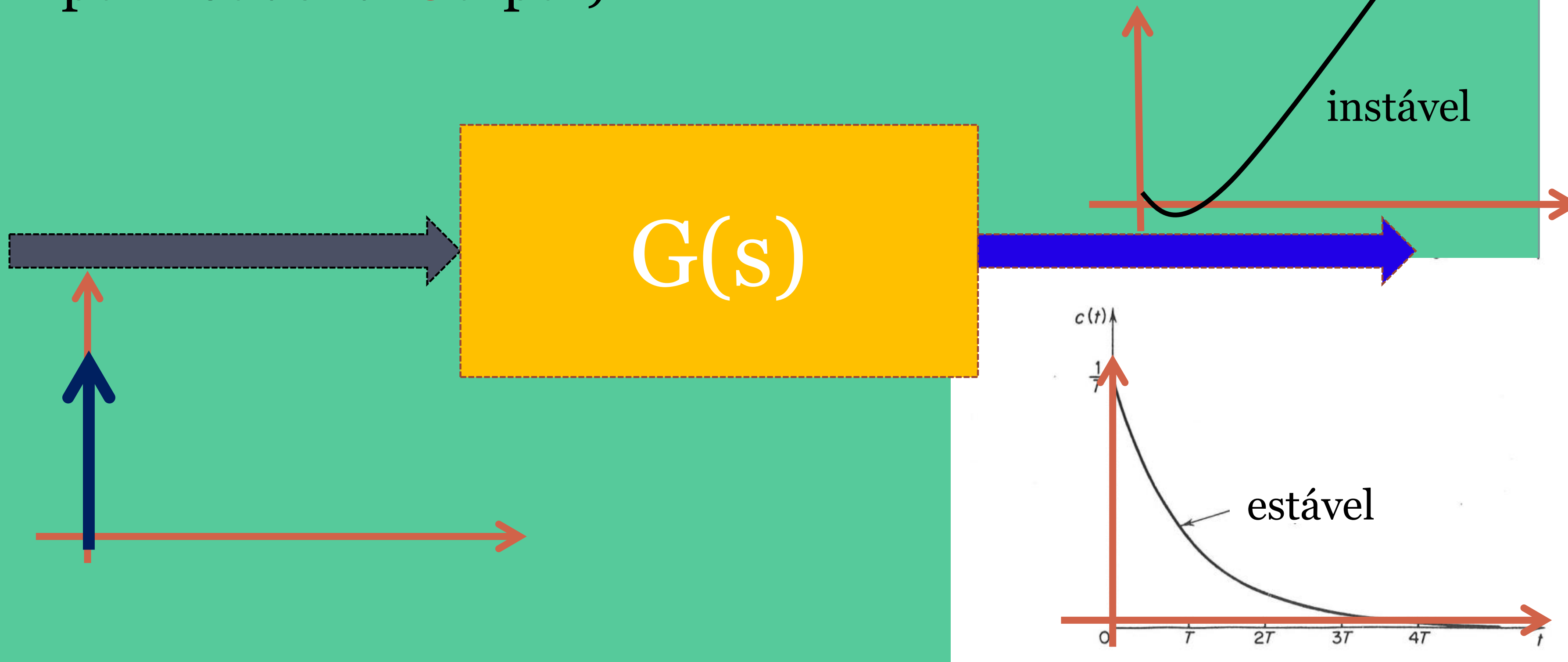
Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- CONCEITOS DE ESTABILIDADE
- MOTIVAÇÃO PARA O USO DO MÉTODO DE ROUTH-HURWITZ
- TEOREMAS DE ROUTH-HURWITZ
- TABELA DE ROUTH-HURWITZ
- EXEMPLOS
- COMPLEMENTOS

Conceitos de Estabilidade

Um sistema é dito estável se toda e qualquer entrada limitada corresponde a saída limitada. Este conceito também é conhecido como estabilidade BIBO (Bounded Input Boudend Output)



Conceitos de Estabilidade

Se a resposta vai para zero diz-se que o sistema é assintoticamente estável. Se ela vai para um valor constante diz-se que o sistema é criticamente estável ou marginalmente estável.

A avaliação de estabilidade de um sistema pode ser feita por meio da inspeção dos polos. Se todos os polos de um sistema tem parte real negativa, o sistema será assintoticamente estável. Se houver polos sobre o eixo imaginário (polos complexos com parte real nula) o sistema é marginalmente estável e apresentará resposta com oscilação permanente e é considerado marginalmente estável.

Teoremas de Routh-Hurwitz

A determinação das raízes de um polinômio de ordem superior a 3 pode ser difícil e assim fica dificultada a avaliação de estabilidade por meio dos polos do sistema. Nestes casos, podemos usar o Critério de Routh-Hurwitz, que compõe-se de uma série dos teoremas, apresentados a seguir.

Admita que tenhamos a seguinte Equação Característica (a equação que fornece os polos do sistema):

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 s + a_n = 0$$

onde os coeficientes são todos reais.

a) Se todos os coeficientes são positivos e diferentes de zero, o sistema **pode** ser estável;

Teoremas de Routh-Hurwitz

b) Se há pelo menos um coeficiente negativo, o sistema **é** instável.

c) Se algum coeficiente é nulo, na melhor das hipóteses o sistema é marginalmente estável

d) Se o sistema pode ser estável, construímos a Tabela de Routh, para determinar se o sistema é estável ou não

d.1) Colocar os coeficientes no arranjo de Routh:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Tabela de Routh

d.2) As linhas subsequentes são obtidas das duas linhas imediatamente precedentes, até a (n+1)-ésima linha:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	....
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	....
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	....
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	....
.	.	.	.	
.	.	.	.	
s^2	x_1	x_2	.	
s^1	y_1	y_2		
s^0	z_1			

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z_1 = -\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{y_1}$$

Tabela de Routh

d.3) Análise da Tabela de Routh

- Se todos os elementos da primeira coluna forem positivos, não há polos com parte real positiva e o sistema é estável;
- Se há qualquer mudança de sinal na primeira coluna, o sistema é instável e há tanto polos do lado direito quanto for o número de mudanças de sinal na primeira coluna.
- Se aparecer um zero na primeira coluna, substituí-lo por uma pequena constante $+\varepsilon$ e continuar o procedimento;
- e aparecer uma linha inteira de zeros, e não houver mudança de sinal na primeira coluna, o sistema é marginalmente estável. Podemos criar um polinômio (P(s)) com a linha anterior à linha de zeros e substituir a linha de zeros pela derivada em s do polinômio e continuar o procedimento. Os polos complexos puros podem ser determinados do polinômio P(s).

Ex.1

- $G(s) = \frac{N(s)}{s^4+2s^3+3s^3+4s+1}$

a) todos os coeficientes positivos e diferentes de zero => sistema pode ser estável;
b) Montar a tabela de Routh

s^4	1	3	1
s^3	2	4	0
s^2	$\frac{2\times3-4\times1}{2}=1$	$\frac{2\times1-0\cdot1}{2}=1$	0
s^1	$\frac{1\times4-1\times2}{1}=2$	$\frac{1\times0-0\times2}{1}=0$	0
s^0	$\frac{2\times1-0}{2}=1$	0	

s^4	$+1$
s^3	$+2$
s^2	$+1$
s^1	$+2$
s^0	$+1$

Não há mudança de sinal na primeira coluna => o sistema é estável

Ex.2

- $G(s) = \dfrac{N(s)}{s^6+4s^5+3s^4+2s^3+s^2+4s+4}$

a) todos os coeficientes positivos e diferentes de zero => sistema pode ser estável

b)

s^6	1	3	1	4
s^5	4	2	4	0
s^4	$\frac{4\times 3 - 2\times 1}{4} = \frac{5}{2}$	$\frac{4\times 1 - 4\times 1}{4} = 0$	$\frac{16-0}{4} = 4$	0
s^3	$\frac{5-0}{5/2} = 2$	$\frac{10-16}{5/2} = -\frac{12}{5}$	0	0
s^2	$\frac{0+6}{2} = 3$	$\frac{8-0}{2} = 4$	0	
s^1	$\frac{-\frac{36}{5} - 8}{3} = -\frac{76}{15}$	0		
s^0	$\frac{-\frac{76}{15}\times 4}{-76/15} = +4$			

s^6	$+1$
s^5	$+4$
s^4	$+5/2$
s^3	$+2$
s^2	$+3$
s^1	$-76/15$
s^0	$+4$

duas mudanças de sinal na primeira coluna => sistema instável com dois polos instáveis

Ex.3

- $G(s) = \frac{N(s)}{s^4+s^3+s^2+4s+1}$

a) todos os coeficientes positivos e diferentes de zero => sistema pode ser estável

b) montar a tabela de Routh

s^4	1	1	1
s^3	1	4	0
s^2	-3	1	
s^1	$\frac{+13}{3}$	0	
s^0	1		

duas mudanças de sinal na primeira coluna => sistema instável com dois polos instáveis

Ex. 4

- $G(s) = \dfrac{N(s)}{s^3+4s^2+8s+K}$

a) Determinar K para sistema estável
b) Determine K para que o sistema tenha um par de raízes com parte real nula, isto é, o sistema tenha estabilidade marginal e calcule estes polos.

s^3	1	8	0
s^2	4	k	0
s^1	$\dfrac{32-k}{4}$	0	
s^0	k		

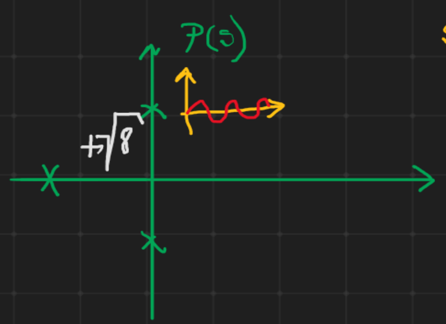
a) $4>0$; $32-k>0$
$\Rightarrow$ $0<k<32$

b) todos os elementos da n-ésima linha nulos

$32-k=0 \Rightarrow k=32$

linha n-1 => $4s^2+32=0$

$s^2=-8 \Rightarrow s=\pm\sqrt{8}\,j$



Complementos

a) Zero na coluna da esquerda

Há duas alternativas quando surgirem zeros na coluna da esquerda, o que impede a continuidade do procedimento já que haveria divisão por zero. Uma alternativa é multiplicar o polinômio característico D(s) por um novo polinômio (evidentemente estável) e refazer o procedimento. Em geral, multiplica-se D(s) por (s+1), o que introduz novos coeficientes. Outro procedimento consiste em substituir o zero por uma pequena constante positiva e continuar o procedimento. Estes procedimentos são ilustrados a seguir para:

$$G(s) = \frac{N(s)}{3s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 4s + 5}$$

Que pode ser estável já que todos os coeficientes são positivos e diferentes de zero.

a) Zeros na coluna da esquerda

Tabela de Routh:

s^4	3	2	5
s^3	6	4	0
s_2	**0**	5	

$D_1(s) = (3s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 4s + 5)(s+1)$

$D_1(s) = 3s^5 + 9s^4 + 8s^3 + 6s^2 + 9s + 5$

a.2)

s^4	3	2	5
s^3	6	4	0
s^2	$+\varepsilon$	5	
s^1	$(4\varepsilon-30)/\varepsilon$	$\rightarrow$ negativo	
s^0	5		

a.1)

s^5	3	8	9
s^4	9	6	5
s^3	6	22/3	
s^2	-5	5	
s^1	40/3	0	
s^0	5		

Em ambas as tabelas duas mudanças de sinais ➔ dois polos instáveis.

b) Linha inteira de zeros

- Obs.: o critério do parâmetro ε não pode ser usado

Aqui substitui-se a linha nula pelos coeficientes da derivada em s de um polinômio P(s) criado com a linha anterior à linha nula

Ex: $G(s) = \dfrac{N(s)}{s^5+2s^4+8s^3+11s^2+16s+12}$

s^5	1	8	16
s^4	2	11	12
s^3	5/2	10	
s^2	3	12	
s^1	0	0	
s^0			

1	8	16
2	11	12
5/2	10	
3	12	
6		
12		

P(s)= $3s^2 + 12 \rightarrow \dfrac{dP(s)}{ds}$=6s

Sistema marginalmente estável, com raízes em $\pm 2j$

raízes de P(s)

Exercícios para casa

1) Para $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$,

verifique a estabilidade pelo critério de Routh − Hurwitz:

a) D(s)= $s^4+2s^3+3s^2+4s+1$

b) D(s)= $s^5-4s^4+3s^3+2s^2+5s+1$

c) D(s) = s^4+3s^3+2s+3

d) D(s) = $s^4+s^3+s^2+4s+1$

2) Para D(s) = $s^4+3s^3+3s^2+2s+K$

a) Determine K para a estabilidade;

b) Verifique se o sistema pode ser marginalmente estável.