IDENTIDADE DE PARSEVAL

Observe que as fórmulas dos coeficientes de Fourier usam unicamente os valores de $f(x)$ entre $-L$ e L. Portanto, se $f(x)$ for dada apenas nesse intervalo $[-L, L]$, e for, por exemplo, continua, então a série de Fourier associada poderá ser formada. Se a série converge a $f(x)$ entre $-L$ e L, então fora desse intervalo convergirá a uma função $F(x)$ que é a extensão periódica de $f(x)$.

Observe também que, a menos que $f(-L) = f(L)$, o processo de extensão introduzirá descontinuidades de salto em $x = L$ e $x = -L$. Nesses pontos, a série de Fourier convergirá a um número médio entre os dois valores de $F(x)$.

Definição: Definimos o conjunto das funções de quadrado integrável como a seguir:

$$\mathcal{F}^2([-\pi, \pi]) = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \ \textit{é finita}\}.$$

Observe que toda função continua $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ é uma função de quadrado integrável.
As funções continuas por partes definidas em $[-\pi, \pi]$ em $\mathbb{R}$ também são de quadrado integrável.

Teorema de Fourier 2: Se $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ e

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

onde a_k, b_k são os coeficientes de Fourier associados a f, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \mathcal{F}_n(x)]^2 dx = 0. \qquad \textbf{Convergência em média quadratica}.$$

Teorema (Identidade de Parseval): Para $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ temos

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Observação O Teorema de Fourier 2 e a Identidade de Parseval podem ser generalizadas para funções $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ de quadrado integrável para dar

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Ou

$$\frac{2}{L} \int_{0}^{L} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

EXEMPLO: 1) Para a função de onda quadrada $f(x) = -x$ se $-2 \leq x < 0$, e $f(x) = x$ se $0 \leq x < 2$, com $f(x + 4) = f(x)$, conseguimos pelo teorema de convergência que

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2})}{(2n-1)^2}, \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo pelo Teorem a de Parseval temos

$$\frac{2}{2} \int_{0}^{2} f^2(x) dx = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^4} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

ou

$$\int_{0}^{2} x^2 dx = 2 + \frac{64}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4},$$

ou

$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2 + \frac{64}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

ou

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

EXEMPLO: 2) Sabendo que a série de Fourier de $f(x) = |\sin x|,\ x \in (-\pi, \pi)$ é

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}$$

Determine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

Solucao: Como

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(2nx)}{\pi(1-(2n)^2)}$$

temos que

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi},\ a_{2n} = \frac{4}{\pi(1-(2n)^2)}, n \geq 1.$$

Por Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Logo sendo $a_0 = \frac{4}{\pi},\ a_n = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}, n \geq 1,\ \ b_n = 0$, temos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{(\frac{4}{\pi})^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2})^2$$

donde

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{(\frac{4}{\pi})^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

Como

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 1,$$

entao

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

Ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{1}{16}\pi^2 - \frac{1}{2}$$