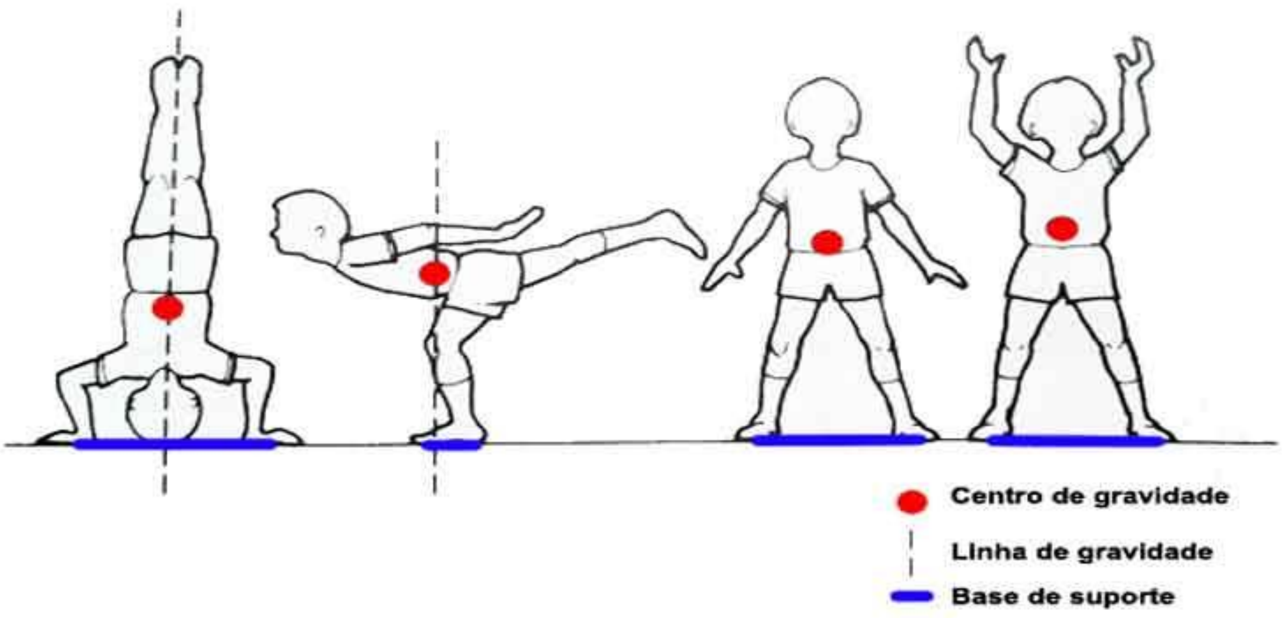
FZEB0171– Física Geral e Experimental I

Aula 13

Eliria M. J. Agnolon Pallone
eliria@usp.br

Sistemas de partículas e centro de massa

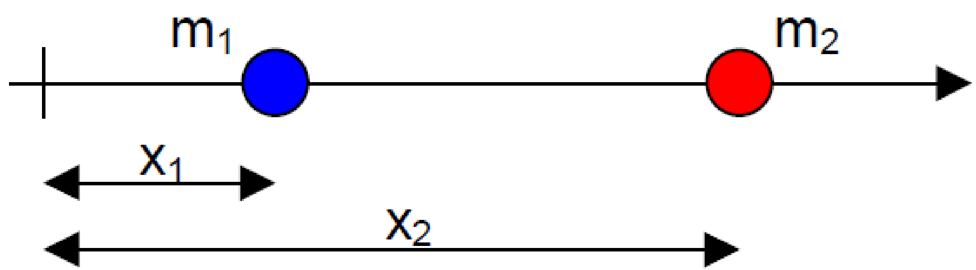
Há um ponto, denominado centro de massa do sistema, que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nele, e as forças externas atuantes sobre o sistema estivessem agindo exclusivamente sobre ele.



Sistema de partículas - uma dimensão

Vamos definir inicialmente a posição x_{CM} do centro de massa para um sistema composto de duas partículas de massas *m1* e *m2* e que ocupam as posições *x1* e *x2*

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



Para um sistema de *N* corpos dispostos ao longo de uma linha reta, podemos fazer uma extensão da definição anterior:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Sistema de partículas - duas dimensões

Para a definição do centro de massa de um sistema de *N* partículas distribuídas em um plano podemos, por analogia com as definições anteriores, considerar que:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

Sistema de partículas - três dimensões

Para um sistema de *N* partículas distribuídas em três dimensões temos as seguintes definições:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Se considerarmos que:

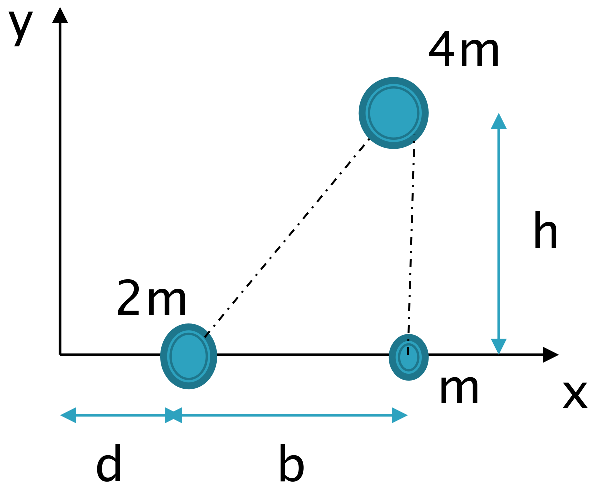
$$\begin{cases} \vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i \\ e \\ \vec{r}_{CM} = \hat{i}x_{CM} + \hat{j}y_{CM} + \hat{k}z_{CM} \end{cases}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Exercícios

Três partículas de massas m_1= 1,2kg, m_2 = 2,5kg e m_3 = 3,4kg formam um triangulo equilátero cujos lados medem 140 cm. Calcule o centro de massa desse sistema de 3 partículas.

Um sistema consiste em 3 partículas localizadas nos vértices de um triangulo retângulo, como na figura. Encontre o centro de massa do sistema



Movimento do centro de massa

partir da definição de centro de massa temos a seguinte equação:

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N$$

A variação dessas posições com o tempo é calculada como:

$$M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots + m_N\frac{d\vec{r}_N}{dt}$$

de modo que a velocidade do centro de massa tem a forma:

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$$

A variação dessas velocidades com o tempo é calculada como:

$$M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \ldots + m_N\frac{d\vec{v}_N}{dt}$$

de modo que a aceleração do centro de massa tem a forma:

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_N\vec{a}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i$$

Cada termo da equação anterior refere-se a uma partícula específica, e é igual à força resultante que atua nessa partícula.

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Mas a força resultante que atua em uma partícula que faz parte desse sistema é composta de duas partes: as forças externas a esse sistema que atuam em cada partícula e as forças internas de interação mútua entre as partículas.

$$M\vec{a}_{CM} = \left(\vec{F}_{1EXT} + \vec{F}_{1INT}\right) + \left(\vec{F}_{2EXT} + \vec{F}_{2INT}\right) + \ldots \left(\vec{F}_{NEXT} + \vec{F}_{NINT}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{iEXT} + \vec{F}_{iINT}\right) = \vec{F}_{EXT} + \vec{F}_{INT}$$

Mas quando considerarmos a soma das forças internas estaremos incluindo pares de forças que se anulam, segundo a Terceira Lei de Newton por serem ação e reação.
Por exemplo: iremos incluir as forças que a partícula *2* exerce na partícula *3* como também as forças que a partícula *3* exerce na partícula *2* . E essas forças de interação se anulam. Isso acontece com todos os pares de partículas que considerarmos. Assim a soma total das forças internas que atuam em um sistema de partículas é nula, e desse modo:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{EXT}$$

As três partículas da figura estão inicialmente em repouso. Cada uma sofre a ação de uma força externa. As direções e sentidos estão indicados e os módulos são F_1=6,0 N, F_2=12 N, F_3=14 N. Qual a aceleração do centro de massa e em que direção ele se move?