2.3 Simetrias: os grupos de Poincaré e de Lorentz

Para concluir este capítulo, no qual estamos investigando as propriedades do espaço-tempo de Minkowski advindas das estruturas introduzidas no capítulo anterior, vamos analisar as *simetrias* de $\mathbb{M}$. Um mapeamento $\iota : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ é dito ser uma *transformação de simetria* (ou *isometria*) do espaço-tempo $\mathbb{M}$ se for uma bijeção que satisfaz

$$\mathcal{I}(\iota(p), \iota(q)) = \mathcal{I}(p, q)$$

para todo par de eventos p, q. Em palavras: ι é uma simetria (isometria) se preservar o intervalo invariante entre pares de eventos. Denotemos por $\mathcal{P}$ o conjunto de *todas* as isometrias de $\mathbb{M}$:

$$\mathcal{P} := \{\iota : \mathbb{M} \to \mathbb{M};\ \exists\, \iota^{-1} \text{ e } \mathcal{I}(\iota(p), \iota(q)) = \mathcal{I}(p, q),\ p, q \in \mathbb{M}\}.$$

O exercício abaixo mostra uma propriedade interessante desse conjunto:

- **Exercício:** Mostre que o conjunto $\mathcal{P}$ de isometrias possui uma estrutura natural de *grupo*, considerando a operação binária do grupo como sendo a composição de mapeamentos: $\iota_1, \iota_2 \in \mathcal{P}$, $(\iota_1 \cdot \iota_2)(p) := \iota_1(\iota_2(p))$, $p \in \mathbb{M}$ (ou seja, $\iota_1 \cdot \iota_2 := \iota_1 \circ \iota_2$, onde o símbolo $\circ$ denota composição de mapeamentos).

Esse *grupo de isometrias* do espaço-tempo de Minkowski é denominado *grupo de Poincaré*. Nossa tarefa, nesta seção, será encontrar uma maneira de representar explicitamente todos os elementos desse grupo.

Como estamos, ainda, evitando introduzir sistemas de coordenadas para rotular os eventos de $\mathbb{M}$, faremos uso da estrutura subjacente de espaço afim de $\mathbb{M}$ para obter uma forma explícita dos elementos de $\mathcal{P}$. A estratégia resume-se em se explorar a "identificação" entre $\mathbb{M}$ e $\mathbb{V}$ provida por $\psi_o(p) := \psi(o, p)$, fixado um evento $o \in \mathbb{M}$ *qualquer*. Assim, fixado $o \in \mathbb{M}$, *cada* mapeamento $\iota : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ induz um mapeamento $\iota_o^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ satisfazendo (vide **Fig. 2.13**)

$$\iota_o^*(\psi_o(p)) := \psi_o(\iota(p)), \quad p \in \mathbb{M}, \tag{2.24}$$

ou, de forma mais simbólica,

$$\iota_o^* := \psi_o \circ \iota \circ \psi_o^{-1}. \tag{2.25}$$

Evidentemente, o mapeamento ι_o^* assim definido depende do evento

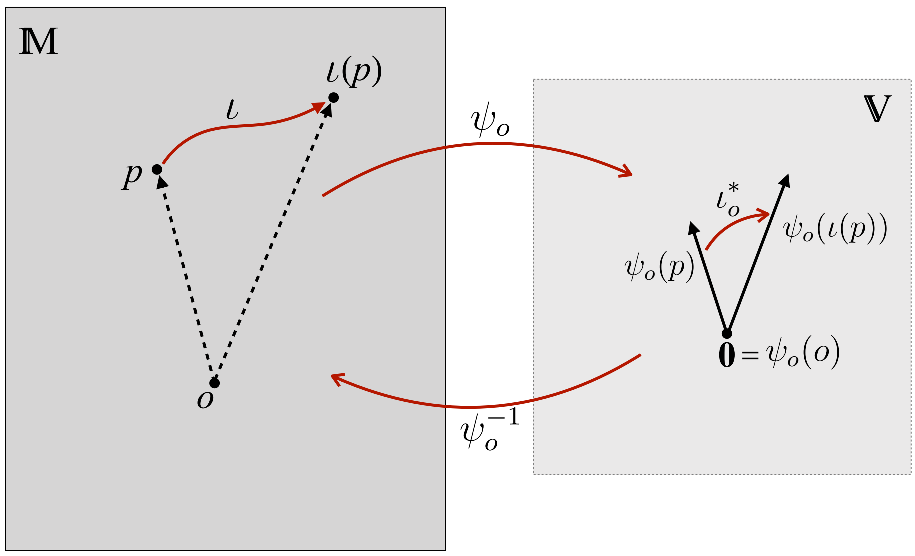

Figura 2.13: Representação esquemática da relação entre $\iota : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ e $\iota_o^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, definida pela Eq. (2.25).

$o \in \mathbb{M}$ escolhido como referência. No entanto, como nosso objetivo final é encontrar todas as isometrias $\iota \in \mathcal{P}$, isso pode ser feito mantendo-se fixo o evento $o \in \mathbb{M}$, determinando-se todos os mapeamentos ι_o^* satisfazendo as propriedades desejadas – o que será feito a seguir – e, então, invertendo-se a expressão acima, obtendo $\iota = \psi_o^{-1} \circ \iota_o^* \circ \psi_o$.

Da definição de $\iota \in \mathcal{P}$ e da Eq. (2.25) seguem as propriedades de ι_o^*. A mais evidente é sua *bijetividade*, que decorre imediatamente de sua definição (como composição de mapeamentos bijetores). No entanto, note que, em geral, ι_o^* *não* é linear, pois $\iota_o^*(\mathbf{0}) = \psi_o(\iota(o))$ não é necessariamente nulo (pois, em geral, $\iota(o) \neq o$). Porém, considere o seguinte mapeamento $\lambda_\iota : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ satisfazendo[5]

$$\lambda_\iota(\psi(p,q)) \equiv \psi(\iota(p), \iota(q)), \quad p, q \in \mathbb{M} \tag{2.26}$$

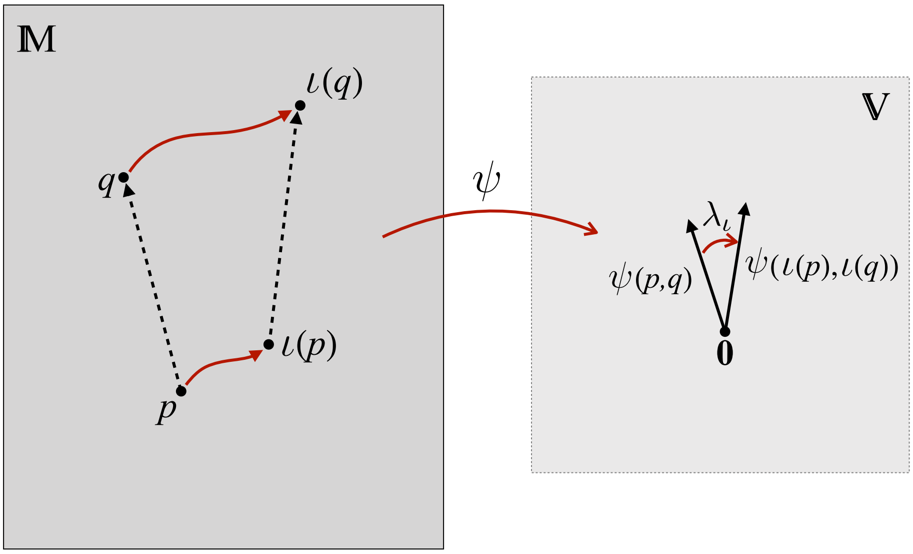

Figura 2.14: Representação esquemática da definição do operador $\lambda_\iota : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, dada pela Eq. (2.26).

(vide **Fig. 2.14**). A relação entre ι_o^* e λ_ι é, então, dada por:

$$\begin{aligned}\iota_o^*(\psi_o(p)) &= \psi_o(\iota(p)) = \psi(o,\iota(p)) = \psi(o,\iota(o)) + \psi(\iota(o),\iota(p)) \\ &= \psi_o(\iota(o)) + \lambda_\iota(\psi(o,p)) = \iota_o^*(\psi_o(o)) + \lambda_\iota(\psi_o(p)) \\ &= \iota_o^*(\mathbf{0}) + \lambda_\iota(\psi_o(p));\end{aligned}$$

ou seja, o mapeamento ι_o^* é determinado pelo seu "valor" calculado no 4-vetor nulo, combinado com a informação do mapeamento λ_ι:

$$\iota_o^*(v^a) = \lambda_\iota(v^a) + c_o^a, \quad v^a \in \mathbb{V}, \tag{2.27}$$

onde $c_o^a := \iota_o^*(\mathbf{0})$ é um 4-vetor constante (vide **Fig. 2.15**). E o mapeamento λ_ι, por sua vez, satisfaz as propriedades elencadas no exercício abaixo:

- **Exercício:** Mostre que:

    (a) $\lambda_\iota : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é bijetor;

[5]A Eq. (2.26) não pode ser tomada prontamente como a *definição* para $\lambda_\iota : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, pois não é imediato que o lado direito dessa equação dependa apenas de $v^a = \psi(p,q)$ e não dos eventos p e q. Ou seja, para que a condição expressa na Eq. (2.26) de fato defina um mapeamento $\lambda_\iota : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é necessário antes mostrar que se $\psi(p,q) = \psi(\tilde{p},\tilde{q})$, então $\psi(\iota(p),\iota(q)) = \psi(\iota(\tilde{p}),\iota(\tilde{q}))$. Que isso de fato é verdade será deixado como exercício para o(a) leitor(a).

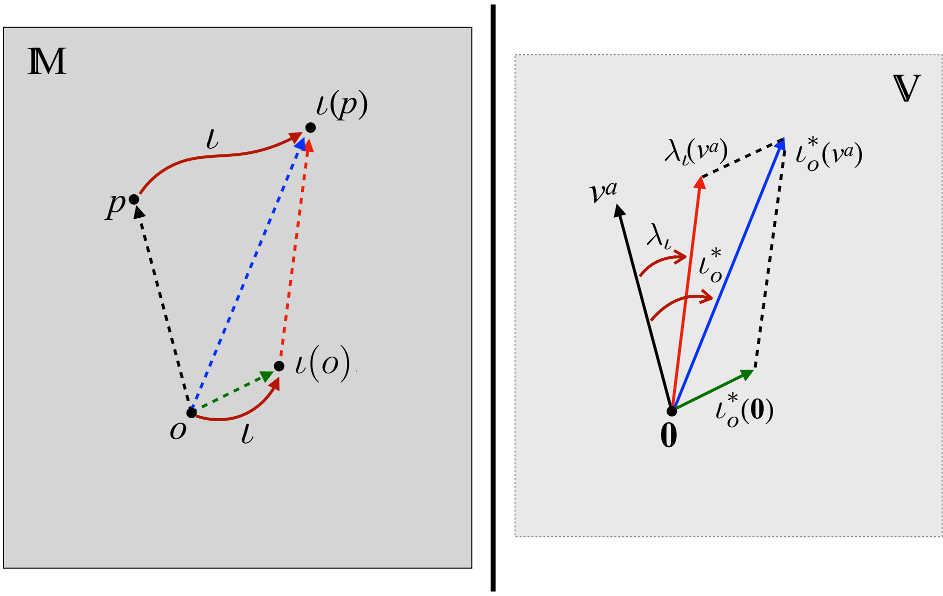

Figura 2.15: Representação esquemática da relação entre ι_o^* e λ_ι, dada pela Eq. (2.27), tanto no espaço vetorial $\mathbb{V}$ (à direita), quanto no espaço-tempo $\mathbb{M}$ (à esquerda).

(b) $\lambda_\iota(u^a + \alpha v^a) = \lambda_\iota(u^a) + \alpha\, \lambda_\iota(v^a)$, para todos $u^a, v^a \in \mathbb{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou seja, λ_ι é um operador linear em $\mathbb{V}$);

(c) $g_{ab}\, \lambda_\iota(u^a)\lambda_\iota(v^b) = g_{ab}\, u^a v^b$, para todos $u^a, v^a \in \mathbb{V}$ (ou seja, λ_ι preserva o "produto interno" de 4-vetores).

As propriedades (a)–(c) do exercício anterior significam que λ_ι é uma isometria do espaço vetorial $\mathbb{V}$ munido do "produto interno" dado pela métrica lorentziana g_{ab}. O conjunto de todas essas isometrias, que possui uma estrutura natural de grupo (por composição), é denotado por $O(3,1)$ e é chamado de *grupo de Lorentz*.[6]

- **Exercício:** Dado $u^a \in \mathbb{V}$, seja $S_{u^a} : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ o operador *translação rígida* de $\mathbb{M}$ pelo 4-vetor u^a: $S_{u^a}(p) := \psi_p^{-1}(u^a)$.

  (a) Mostre que $S_{u^a} \circ S_{v^a} = S_{u^a+v^a}$;

  (b) Mostre que $S_{u^a}^{-1} = S_{-u^a}$;

  (c) Mostre que se outro evento $\tilde{o} \in \mathbb{M}$ for escolhido como referência desde o início da construção [Eq. (2.24)], a relação

[6] O grupo $O(d-1,1)$ de transformações lineares em um espaço vetorial de dimensão d que preservam o produto interno definido por uma métrica lorentziana é o análogo do *grupo ortogonal* $O(d)$ do caso de uma métrica positivo-definida.

com a escolha anterior é dada por:

$$\iota_{\tilde{o}}^*(v^a) \equiv \iota_o^*(v^a + \psi_o(\tilde{o})) - \psi_o(\tilde{o});$$

(d) Mostre que $\lambda_\iota \equiv \psi_o \circ S^{-1}_{\iota_o^*(\mathbf{0})} \circ \psi_o^{-1} \circ \iota_o^* = \psi_o \circ S^{-1}_{\iota_o^*(\mathbf{0})} \circ \iota \circ \psi_o^{-1}$.

Resumindo o que temos até aqui: *fixado* um evento (qualquer) $o \in \mathbb{M}$, a cada isometria $\iota \in \mathcal{P}$ podemos associar um par $(\lambda_\iota, c^a) \in O(3,1) \times \mathbb{V}$ através das Eqs. (2.25) e (2.27). E não é difícil de se ver que o contrário também é verdadeiro: a cada par $(\lambda_\iota, c^a) \in O(3,1) \times \mathbb{V}$ corresponde uma isometria $\iota \in \mathcal{P}$ do espaço-tempo (seguindo as Eqs. (2.25) e (2.27) em sentido inverso). Ou seja, existe uma bijeção entre $\mathcal{P}$ e $O(3,1) \times \mathbb{V}$. Assim, tudo que nos falta para determinarmos os elementos de $\mathcal{P}$ é determinarmos os elementos de $O(3,1)$.