MAP2220 - Fundamentos de Análise Numérica

2º Semestre de 2020 - Prof. Nelson Kuhl

Prova 1 - 27/10/2020

Questão 1 A lei adiabática dos gases é dada por

$$PV^\gamma = c,$$

onde c e γ são contantes. Estime os valores destas constantes para a tabela

V	10	20	30	40
P	6.0	2.2	1.3	0.8

usando o método dos mínimos quadrados.

Questão 2 Aproxime a função $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ igual a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq x \leq 1.5 \\ 2x - 3 & \text{se } 1.5 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

por um polinômio $g(x)$ de grau menor ou igual a 2 de modo a minimizar

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)]^2 \, dx.$$

Sabe-se que os polinômios de Legendre

$$p_0(x) = 1, \; p_1(x) = x \text{ e } p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

satisfazem

$$\int_{-1}^1 p_k(x)p_l(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq l \\ \frac{2}{2k+1} & \text{se } k = l \end{cases}$$

Questão 3 Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π e denote por g_n a aproximação de f até o harmônico de ordem n, $n \geq 0$.

(a) Explique por que $f - g_{m+1}$ é ortogonal a $g_{m+1} - g_m$, onde o produto interno é

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} u(x)v(x) \, dx.$$

(b) Conclua que

$$\langle f - g_m, f - g_m\rangle = \langle f - g_{m+1}, f - g_{m+1}\rangle + \langle g_{m+1} - g_m, g_{m+1} - g_m\rangle.$$

(c) Deduza a expressão

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - g_{m+1}(x)]^2 \, dx = \int_0^{2\pi} [f(x) - g_m(x)]^2 \, dx - \pi(a_{m+1}^2 + b_{m+1}^2),$$

onde a_n e b_n denotam os coeficientes de Fourier de f.