DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

MECÂNICA (4310192) - 2020/2
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 4

27 de outubro de 2020

Professor: Gustavo Paganini Canal
Monitor: Fábio Camilo de Souza

Questões Conceituais

1. O impulso que a bola exerce sobre a parede é igual, em módulo, ao impulso que a parede exerce sobre a bola enquanto estas estão em contato. Este impulso pode ser calculado multiplicando a força que a parede exerce sobre a bola pelo tempo em que esta atua. Como a bola de borracha sofre o impulso que a faz parar, e ricochetear, o impulso sobre ela é maior que aquele sobre a bola de argila, que apenas para, independente do tempo de contato. Portanto, a alternativa correta é a alternativa (b).

2. Pelo gráfico, vemos que as retas 1 e 3 representam a posição de um corpo antes da colisão, enquanto a reta 2 (uma posição intermediária às retas 1 e 3) representa o centro de massa do sistema composto pelos dois corpos. O corpo A, representado pela reta 1, está parado, enquanto o corpo B, representado pela reta 3, está em movimento. Já as retas 4 e 6 representam aa posições de B e A, respectivamente, após a colisão. A reta 5, representa a posição do centro de massa, que é uma posição intermediária a dos centros dos corpos, e pela conservação do momento, um prolongamento da reta 2. Como a energia cinética do sistema está totalmente no corpo B, sendo totalmente transferida para o corpo A após a colisão, e B tendo após a colisão a mesma velocidade que A tinha antes da colisão, utilizando o princípio da conservação de energia, concluímos que a massa dos dois corpos são iguais.

3. A força é vertical para cima, e seu valor médio é dado pela massa multiplicada pela variação da velocidade (o corpo descia com 8 m/s e passou a subir com 8m/s), dividida pela tempo decorrido durante o impacto.

$$\bar{F} = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Com os dados do exercício: m = 0.2 kg, $\Delta v = v_f - v_i = 8-(-8) = 16$ m/s e $\Delta t = 10^{-3}$ s, obtemos $\bar{F} = 3,2 \times 10^3$ N.

4. No início do lançamento, a velocidade do míssil é dada por $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} = v_0 \cos 45° \,\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_0 \sin 45° \,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, ou seja:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

No topo da trajetória, antes da explosão (instante 1), a velocidade do míssil é dada apenas pela componente horizontal.

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Logo após a explosão (instante 2), dois corpos resultam do desmembramento do míssil, o corpo A em repouso, e corpo B em movimento, cada um com metade da massa do míssil ($m_A = m_B = \frac{m}{2}$).

Deve ser aplicada a conservação de momento entre os instantes 1 e 2. No instante 1, o momento é dado por:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{1}} = m\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = m\frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

No instante 2, o momento é dado por:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{2}} = \frac{m}{2}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A},\mathbf{2}} + \frac{m}{2}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B},\mathbf{2}}$$

Sendo $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A},\mathbf{2}} = 0$ (repouso):

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{2}} = \frac{m}{2}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B},\mathbf{2}}$$

Da conservação de momento, obtemos:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{2}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{1}}$$

$$\frac{m}{2}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B},\mathbf{2}} = m\frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B},\mathbf{2}} = \sqrt{2}v_0\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

A velocidade do corpo A, logo antes de atingirem o solo (instante 3), é dada pela mesma velocidade vertical de partida do míssil, em sentido oposto, já que o míssil e suas partes possuem velocidade nula na direção vertical, portanto:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A},\mathbf{3}} = -\frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Após a explosão, a velocidade horizontal do corpo B não sofre variação, e a velocidade vertical antes de atingir o solo é a mesma do corpo A, portanto:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B},\mathbf{3}} = \sqrt{2}v_0\hat{\boldsymbol{\imath}} - \frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

As velocidades escalares são dadas portanto: $v_{A,3} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ e $v_{B,3} = \sqrt{\frac{5}{2}}v_0$.

Note que a energia não é conservada. A energia cinética antes da explosão é dada por $E_1 = \frac{m v_1^2}{2} = \frac{m v_0^2}{4}$, após a explosão, a energia cinética do corpo A é 0, já a energia cinética do corpo B é dada por $E_1 = \frac{m}{2}\frac{v_{B,2}^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2}$.

5. No referencial do laboratório, o momento antes da colisão, para as partículas A e B, nas direções x e y, é dado por:

$$p_{Aix} = mv$$

$$p_{Aiy} = 0$$

$$p_{Bix} = 0$$

$$p_{Biy} = 0$$

Após a colisão, as duas partículas adquirem momento na direção y, de acordo com o ângulo $\theta_{A,B}$ de espalhamento de cada partícula (em relação ao eixo x). O momento após a colisão é:

$$p_{Afx} = mv_{Af} \cos\theta_A$$

$$p_{Afy} = mv_{Af} \sin\theta_A$$

$$p_{Bfx} = Nmv_{Bf} \cos\theta_B$$

$$p_{Bfy} = Nmv_{Bf} \cos\theta_B$$

Sendo $v_{A,Bf}$ o módulo da velocidade de cada corpo após a colisão. A energia total antes da colisão é dada por:

$$E_i = \frac{m v^2}{2}$$

Já a energia total após a colisão é dada por:

$$E_f = \frac{m\left(v_{Af}^2 + N v_{Bf}^2\right)}{2}$$

Temos 4 incógnitas, v_{Af}, v_{Bf}, θ_A e θ_B, e podemos escrever 4 equações a partir a conservação do momento nas direções x e y, a conservação da energia para uma colisão elástica, e dado do execício, a velocidade horizontal das partículas após a colisão ser a mesma.

$$p_{Aix} + p_{Bix} = p_{Afx} + p_{Bfx}$$

$$p_{Aiy} + p_{Biy} = p_{Afy} + p_{Bfy}$$

$$E_i = E_f$$

$$v_{Af}\cos\theta_A = v_{Bf}\cos\theta_B$$

Substituindo pelos termos conhecidos:

$$mv = mv_{Af}\cos\theta_A + Nmv_{Bf}\cos\theta_B \tag{1}$$

$$0 = mv_{Af}\sin\theta_A + Nmv_{Bf}\sin\theta_B \tag{2}$$

$$m\frac{v^2}{2} = m\frac{v_{Af}^2 + Nv_{Bf}^2}{2} \tag{3}$$

$$v_{Af}\cos\theta_A = v_{Bf}\cos\theta_B \tag{4}$$

Da equação (4), obtemos:

$$v_{Bf} = v_{Af}\frac{\cos\theta_A}{\cos\theta_B} \tag{5}$$

Da equação (1), obtemos:

$$v_{Af}\cos\theta_A + Nv_{Bf}\cos\theta_B = v \tag{6}$$

Substituindo v_{Bf}, da eq. (5), na eq. (6) obtemos:

$$v_{Af}\cos\theta_A + Nv_{Af}\frac{\cos\theta_A}{\cos\theta_B}\cos\theta_B = v$$

$$v_{Af} = \frac{v}{(1+N)\cos\theta_A} \tag{7}$$

Usando eq. (7) em (5):

$$v_{Bf} = \frac{v}{(1+N)\cos\theta_B} \tag{8}$$

Usando os resultados das eq. (7) e (8) em (2):

$$m\frac{v}{(1+N)\cos\theta_A}\sin\theta_A + Nm\frac{v}{(1+N)\cos\theta_B}\sin\theta_B = 0$$

$$N\sin\theta_B\cos\theta_A = -\sin\theta_A\cos\theta_B$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação acima.

$$N^2\sin^2\theta_B\cos^2\theta_A = \sin^2\theta_A\cos^2\theta_B$$

Reescrevendo ($\sin^2\theta$) como ($1-\cos^2\theta$):

$$N^2(1-\cos^2\theta_B)\cos^2\theta_A = (1-\cos^2\theta_A)\cos^2\theta_B$$

Que podemos rearranjar como:

$$\cos^2\theta_A = \frac{\cos^2\theta_B}{N^2(1-\cos^2\theta_B)+\cos^2\theta_B} \tag{9}$$

Usando os resultados das eq. (7) e (8) em (3):

$$1 = \frac{1}{(1+N)^2\cos^2\theta_A} + N\frac{1}{(1+N)^2\cos^2\theta_B}$$

Usando a eq. (9) na eq. acima:

$$1 = \frac{N^2(1-\cos^2\theta_B)+\cos^2\theta_B}{(1+N)^2\cos^2\theta_B} + N\frac{1}{(1+N)^2\cos^2\theta_B}$$

$$\frac{N^2(1-\cos^2\theta_B)+\cos^2\theta_B}{(1+N)^2\cos^2\theta_B} + N\frac{1}{(1+N)^2\cos^2\theta_B} - 1 = 0 \tag{10}$$

Que após um pouco de álgebra (abaixo), encontramos que, para qualquer N:

$$\theta_B = \pm\frac{\pi}{4}$$

Da equação (10), podemos escrever:

$$(N^2(1-\cos^2\theta_B)+\cos^2\theta_B) + N - ((1+N)^2\cos^2\theta_B) = 0$$

$$N^2 - N^2\cos^2\theta_B + \cos^2\theta_B + N - (1+2N+N^2)\cos^2\theta_B = 0$$

$$N^2 - N^2\cos^2\theta_B + \cos^2\theta_B + N - \cos^2\theta_B - 2N\cos^2\theta_B - N^2\cos^2\theta_B = 0$$

$$N^2 - N^2\cos^2\theta_B + N - 2N\cos^2\theta_B - N^2\cos^2\theta_B = 0$$

$$N + 1 - 2\cos^2\theta_B - 2N\cos^2\theta_B = 0$$

$$(N+1) - 2(1+N)\cos^2\theta_B = 0$$

$$(N+1)(1-2\cos^2\theta_B) = 0$$

Ou seja, $1-2\cos^2\theta_B = 0 \Rightarrow \theta_B = \pm\frac{\pi}{4}$, para qualquer N.