

# MAC121 - Algoritmos e Estruturas de Dados I

Universidade de São Paulo

Segundo Semestre de 2020

Ordenação de vetores

Ordenação em tempo linear

## Ordenação

Vimos vários algoritmos de ordenação de vetores nas últimas aulas.

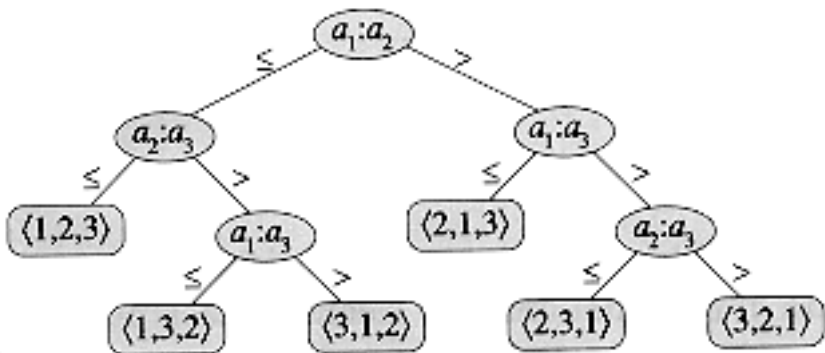
Ordenação por seleção	$O(n^2)$
Bubblesort	$O(n^2)$
Ordenação por inserção	$O(n^2)$
Inserção binária	$O(n^2)$ , mas $O(n \log n)$ comparações
Quicksort	pior caso $O(n^2)$ , $O(n \log n)$ na média
Mergesort	$O(n \log n)$
Heapsort	$O(n \log n)$

É possível fazer um algoritmo mais rápido?

## Limite inferior para ordenação por comparação

Se o algoritmo de ordenação se basear em comparação entre elementos do vetor, o melhor algoritmo possível deve consumir tempo pelo menos  $n \log n$ .

Um algoritmo de ordenação baseado em comparações entre elementos pode ser representado por uma árvore de decisão:



## Limite inferior para ordenação por comparação

Esta **árvore de decisão** deverá ter  $n!$  folhas, uma para cada possível ordem dos  $n$  elementos.

A altura da árvore será o número máximo de comparações realizadas. Se a árvore tem  $m$  folhas, qual a menor altura possível?

$m$  folhas  $\longrightarrow 2m - 1$  nós.

Se uma árvore binária tem  $k$  elementos, sua altura é pelo menos  $\log_2 k$ .

Assim, nossa árvore de decisão terá  $\log_2(2n! - 1)$ . Usando a aproximação de Stirling para  $n!$ , obtemos que a altura é maior ou igual a  $n \log n$ .

## Ordenação por contagem

**Problema:** Considere um vetor  $v$  com  $n$  elementos no intervalo  $[0, 9999]$ . É possível ordenar o vetor em tempo  $O(n)$ ?

```
inicialize vetor cont[10000] com 0
para cada elemento  $i = 0, \dots, n-1$  do vetor  $v$ 
    incremente cont[v[i]]
k = 0
para cada  $i = 0, \dots, 9999$ 
    para  $j = 1, \dots, cont[i]$ 
        v[k] = i;
        k++;
```

O consumo de tempo deste algoritmo é dado por  $n + 10000$ , ou seja,  $O(n)$  (10000 é uma constante). Mas, observe que para isso temos de saber algo sobre o vetor: **todos os elementos estão em um intervalo conhecido.**