SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-9 – Autovalores e autovetores
(+ cont. Núcleo e Imagem)

Prof. Miguel Frasson

Outubro de 2020

Transformações lineares

Transformações lineares

$T : U \to V$ é uma transformação linear quando:

- $T(u+v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in U$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u), \quad \forall \alpha \in K, u \in U.$

Propriedades

- $T(0) = 0 \quad (T$ leva o vetor nulo de U no vetor nulo de $V)$
- $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$
- Composta de transformações lineares também é linear.

Matrizes de transformação linear

- Transformações lineares $\leftrightarrow$ matrizes
- $[Tu]_{B_V} = A[u]_{B_U}$ ou simplesmente $Tu = Au$
- As colunas de A são Tv_i, onde $B_U = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Transformações e subespaços vetoriais

Teorema

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear:

- Se W for um subespaço de U então $T(W)$ é subespaço de V.
- Se Z for um subespaço de V então $T^{-1}(Z)$ é subespaço de U.

Demonstração da 2ª parte

- $0 = T(0) \in Z \implies 0 \in T^{-1}(Z)$
- sejam $u, v \in T^{-1}(Z) \implies Tu, Tv \in Z \implies$
  $Tu + Tv = T(u+v) \in Z \implies u + v \in T^{-1}(Z)$
- seja $u \in T^{-1}(Z) \implies Tu \in Z \implies \alpha Tu = T(\alpha u) \in Z \implies$
  $\alpha u \in T^{-1}(Z)$

Núcleo e Imagem

Seja $T : U \to V$ transformação linear.

- Núcleo de T: $\ker T = T^{-1}(\{0\})$
- Imagem de T: $\operatorname{Im} T = T(U)$
- Pelo teorema anterior,
  - o núcleo é subespaço vetorial de U
  - a imagem é subespaço vetorial de V

Exemplos

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, y, 0)$
$\ker(T) = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$,
$\text{Im}(T) = \{(a, b, 0) : a, b \in R\}$.

$T : R^2 \to R,\ T(x, y) = x - 3y$
$\ker(T) = [(3, 1)]$,
$\text{Im}(T) = \mathbb{R}$.

$D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(R)$ o operador derivada, $D(p) = p'$
$\ker D = [1]$,
$Im(D) = P_2(\mathbb{R})$.

Teorema do Núcleo e da Imagem

$T : U \to V$: $\dim U = \ dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$

- Seja $B_1 = \{u_1, \ldots, u_p\}$ uma base de $\ker(T)$
- $\dim \ker T = p$
- Complete uma base B de U:

$$B = u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_r$$

- $\dim U = p + r$
- $\mathrm{Im}\, T = [Tu_1, \ldots Tu_p, Tv_1 \ldots, Tv_r] = [Tv_1 \ldots, Tv_r]$
- Se mostrarmos que $Tv_1 \ldots, Tv_r$ são LI, concluiremos que $\dim \mathrm{Im}\, T = r$ e o resultado está mostrado.

Teorema do Núcleo e da Imagem

$T : U \to V$: $\dim U = \ dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$

- Se mostrarmos que $Tv_1 \ldots, Tv_r$ são LI, concluiremos que $\dim \mathrm{Im}\, T = r$ e o resultado está mostrado.

$$\alpha_1 Tv_1 + \cdots + \alpha_r Tv_r = 0 \implies T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r) = T0 = 0$$
$$\implies \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in \ker T$$
$$\implies \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p$$
$$\implies -\beta_1 u_1 + \cdots - \beta_p u_p + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$$

- como B é base, $\alpha_i = 0$ e $\beta_j = 0$
- Portanto $Tv_1 \ldots, Tv_r$ são LI.

Exemplos

Não existe transformação linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que seja sobrejetora

De fato, pelo teorema anterior, temos

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker(F) = 2 - \dim \ker(F) \leqslant 2.$$

Não existe transformação linear $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ que seja injetora

Autovalores e autovetores

Considere o operador linear em $\mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Então $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Como podemos interpretar geometricamente?

Autovalores e autovetores

Considere o operador linear em $\mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Então $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Como podemos interpretar geometricamente?

As transformações lineares mais simples são multiplicar vetores por um escalar.

Podemos encontrar direções nas quais a ação de A é multiplicar por um escalar λ.

Autovalores e autovetores

Considere o operador linear em $\mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Então $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Como podemos interpretar geometricamente?

As transformações lineares mais simples são multiplicar vetores por um escalar.

Podemos encontrar direções nas quais a ação de A é multiplicar por um escalar λ.
Essas direções são autovetores e esses escalares são autovalores.

Seja o vetor $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. Então,

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &= \lambda I v \\ \iff \quad (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Equação característica

O sistema (1) tem solução não nula v se e somente se

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Autovalores e autovetores

- Todo múltiplo não nulo de um autovetor é autovetor.
  Portanto há infinitos autovetores.
  No entanto, há um número finito de autovetores L.I.

- Se λ for raiz simples do polinômio característico, λ terá exatamente um autovetor LI associado.

Autovalores da matriz transposta

- A e A^T têm os mesmos autovalores

$$(A - \lambda I)^T = A^T - (\lambda I)^T = A^T - \lambda I$$
$$\det A = \det A^T$$
$$\therefore \quad \det(A - \lambda I) = 0 \iff \det(A^T - \lambda I) = 0$$

Autovalores e autovetores

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

que tem raízes -2 e 1.

Para $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

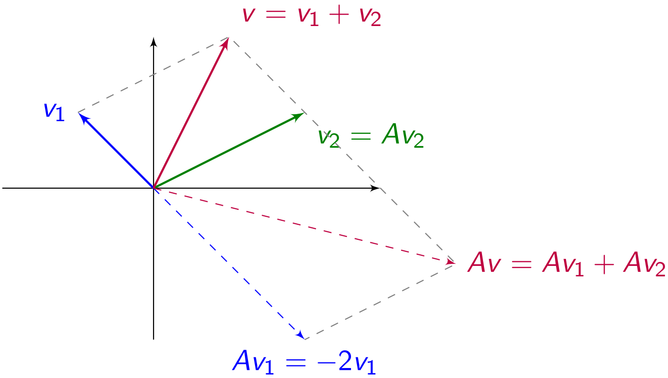
Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores e autovetores

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$



Autovalores e autovetores

Outro exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1$$

que tem raízes -1 e 1.

Para $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$