MAE 224 - PROBABILIDADE II
Revisão para prova
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v. a.(s), i.i.d., com $E[X] = 0$ e $Var(X) = 1$. Seja $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Pelas Leis do Grandes Números temos que

$$\overline{X}_n \to^{qc}; 0$$

$$\overline{X}_n \to^{P} 0$$

e

$$\overline{X}_n \to^{D} 0$$

,isto é, para a distribuição degenerada em 0.

Por outro lado, se padronizamos

$$\sqrt{n}.\overline{X}_n \to^{D} N(0,1).$$

Exemplo 1.

A)

Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v. a.(s), i.i.d., com $E[X] = 1$ e $Var(X) = 1$. Então

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^n X_i^2}} \to^{P} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

POIS

Pela Lei Fraca dos Grandes Nmeros $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^{P} 1$ e $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \to^{P} 2$. Como $\sqrt{x}$ é uma função contínua temos $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}} \to^{P} \sqrt{2}$

Assim

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^n X_i^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}{\sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^n X_i^2}{n^2}}} \to^{P} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

B)

Qual o limite em distribuição de

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}?$$

Observe que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}{\sqrt{n}}} =$$

$$\frac{(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{\sqrt{n}})}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}} \to^D N(0, \frac{1}{2}).$$

A conclusão segue porque $\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1) \to^D N(0,1)$, $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}} \to^P \sqrt{2}$ e o teorema de Slutsky.

,

Exemplo 2.

Considere a retirada casual de uma bola de uma urna com $n+1$ bolas identicas mas numeradas de 0 até n. Seja X_n : o número da bola retirada. Qual o limite em distribuição de $\frac{X_n}{n}$?

Observe que

$$0 \leq X_n \leq n, \quad 0 \leq \frac{X_n}{n} \leq 1, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

$$P(X_n \leq x) = 0, \ se \ x < 0, \ P(X_n \leq x) = 1, \ se \ x > n \ e \ se \ 0 \leq x \leq n, \ P(X_n \leq x) = \frac{[x]+1}{n+1}. \blacksquare$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_n}{n} \leq x) = \lim_{n\to\infty} \frac{[nx]+1}{n+1} = x$$

que é a função de distribuição de uma v.a. $X \sim U(0,1)$.

Note que

$$\frac{(n-1)x+1}{n+1} \leq \frac{[nx]+1}{n+1} \leq \frac{nx+1}{n+1}.$$

De outra maneira

$$\varphi_{\frac{X_n}{n}}(t) = E[e^{i\frac{t}{n}X_n}] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{t}{n}k} =$$

$$\frac{1}{n+1}\frac{(1-e^{it})}{1-e^{i\frac{t}{n}}} = (1-e^{it})\frac{1}{n+1}\frac{1}{e^{-i\frac{t}{n}}-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{e^{-i\frac{t}{n}}-1}$$

é indeterminado da forma $\frac{0}{0}$. Pela regra de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{-ite^{-\frac{it}{n}}} = \frac{1}{-it}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{X_n}{n}}(t) = \frac{(1-e^{it})}{-it} = \varphi_X(t),$$

$\lim_{t\to 0}\varphi_X(t) = \lim_{t\to 0}\frac{(1-e^{it})}{-it}$ é indeterminado, mas

$\lim_{t\to 0}\frac{ie^{it}}{i} = 1$

que é contínua no ponto 0.(Teorema da Continuidade de Paul Levy.)

A função caracterśtica de uma distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$ é:

$$\varphi_X(t) = \int_0^1 e^{ity}dy = \frac{e^{ity}}{it}|_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

Concluimos, pelo teorema de Helly - Bray, que $\frac{X_n}{n} \to^D X$.