Campos magnéticos na matéria

Há 3 tipos de magnetismo na matéria

→ paramagnetismo

→ diamagnetismo

→ ferromagnetismo

Na presença de um campo magnético externo, materiais paramagnéticos são atraídos pelo campo.

Por outro lado, materiais diamagnéticos são repelidos por um campo magnético externo

Sabemos hoje que em tais materiais o campo externo induz momentos de dipolo magnético no nível atômico no mesmo sentido do campo externo (paramagnetismo) ou no sentido oposto (diamagnetismo)

Os mecanismos que levam à aparição de tais momentos de dipolo induzidos são distintos. Voltaremos a essa discussão no futuro.

Tanto em materiais paramagnéticos quanto em diamagnéticos, a magnetização desaparece quando o campo externo é desligado.

Materiais ferromagnéticos, entretanto, retêm a magnetização, mesmo após a retirada do campo externo. Na realidade, em materiais ferromagnéticos, a magnetização não é determinada pelo valor atual do campo, mas por toda a história magnética do material.

—//—

O problema que queremos abordar neste momento é aquele de calcular o campo magnético gerado por um material previamente magnetizado.

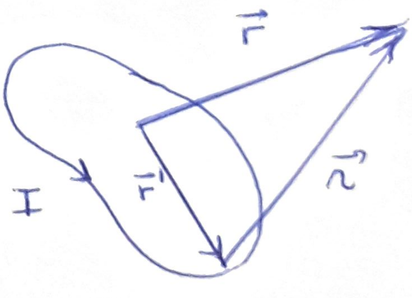
Assim como no caso eletrostático, não nos preocuparemos, por enquanto, como o material foi levado ao estado atual de magnetização. O campo magnético externo, responsável pela magnetização não será, por agora, levado em conta

Assim como no caso eletrostático, trabalharemos aqui como o campo magnético macroscópico, definido como o campo magnético médio num volume grande o suficiente para conter um grande número de átomos, mas por outro lado pequeno com respeito às dimensões externas do material.

Nessas condições, similar ao caso eletrostático, é possível mostrar que o campo magnético macroscópico pode ser obtido a partir do termo de dipolo da expansão multipolar vista na aula passada.

Trabalhando com o potencial vetor $\vec{A}$, temos para um pequeno laço de corrente com momento magnético $\vec{m}$, o termo de dipolo é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{\imath}}{\imath^2}$$



Definiremos aqui magnetização como a densidade volumétrica de momento de dipolo magnético e a representaremos com a letra $\vec{M}$. Logo, $\vec{M}$ é o momento de dipolo magnético por unidade de volume:

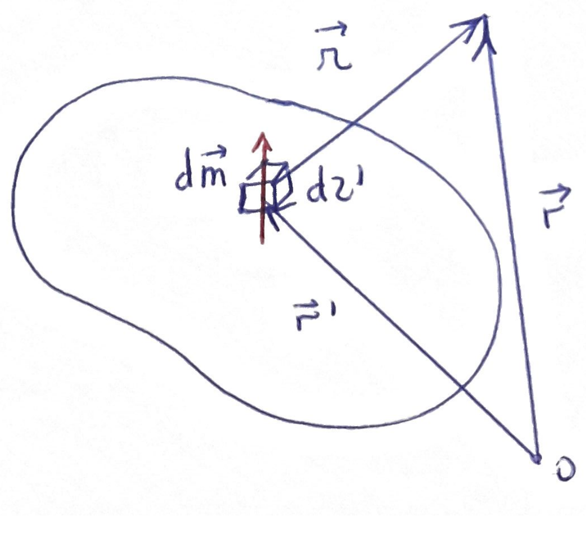
$\vec{M} \equiv$ momento de dipolo por unidade de volume

Portanto, um pequeno volume $d\tau$ no interior de um material magnetizado tem momento de dipolo

$$d\vec{m} = \vec{M}\, d\tau$$

Então, o potencial vetor gerado pelo material magnetizado como um todo pode ser obtido via princípio de superposição

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, d\tau'$$



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \, d\tau'$$

Lembrando que $\vec{\nabla}' \frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$, temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}\,') \times \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{\mathscr{r}} \right) d\tau'$$

Usando

$$\vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}}{\mathscr{r}} \right) = \frac{1}{\mathscr{r}} \vec{\nabla}' \times \vec{M} - \vec{M} \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{\mathscr{r}} \right)$$

podemos escrever

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_V \frac{1}{\mathscr{r}} \left[\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}\,') \right] d\tau' - \int_V \vec{\nabla}' \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}} \right] d\tau' \right\}$$

O segundo termo entre chaves pode ser transformado num termo de superfície por meio de

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{v} \, d\tau = - \oint_S \vec{v} \times d\vec{a}$$

para um campo vetorial $\vec{v}$ diferenciável

Prova:

Tome um vetor constante $\vec{c}$ e construa o campo

$$\vec{v} \times \vec{c}$$

Para esse campo vale o teorema da divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{c})\, d\tau = \oint_S (\vec{v} \times \vec{c}) \cdot d\vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot \cancelto{\vec{0}}{(\vec{\nabla} \times \vec{c})}$$

$$(\vec{v} \times \vec{c}) \cdot d\vec{a} = \vec{c} \cdot (d\vec{a} \times \vec{v}) = -\vec{c} \cdot (\vec{v} \times d\vec{a})$$

Portanto

$$\int_V \vec{c} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})\, d\tau = -\oint_S \vec{c} \cdot (\vec{v} \times d\vec{a})$$

$$\vec{c} \cdot \left\{ \int_V \vec{\nabla} \times \vec{v}\, d\tau \right\} = \vec{c} \cdot \left\{ -\oint_S \vec{v} \times d\vec{a} \right\} \quad \forall\ \vec{c}$$

Então

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla} \times \vec{v}\, d\tau = -\oint_S \vec{v} \times d\vec{a}}$$

Portanto

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{1}{\mathscr{r}}\, \vec{\nabla}'\times \vec{M}(\vec{r}')\, d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{1}{\mathscr{r}}\, \vec{M}(\vec{r}')\times d\vec{a}'$$

O primeiro termo corresponde aquele potencial gerado por uma densidade volumétrica de corrente

$$\boxed{\vec{J}_b \equiv \vec{\nabla}\times \vec{M},}$$

enquanto o segundo corresponde ao potencial gerado por uma densidade superficial de corrente

$$\boxed{\vec{K}_b \equiv \vec{M}\times \hat{n},}$$

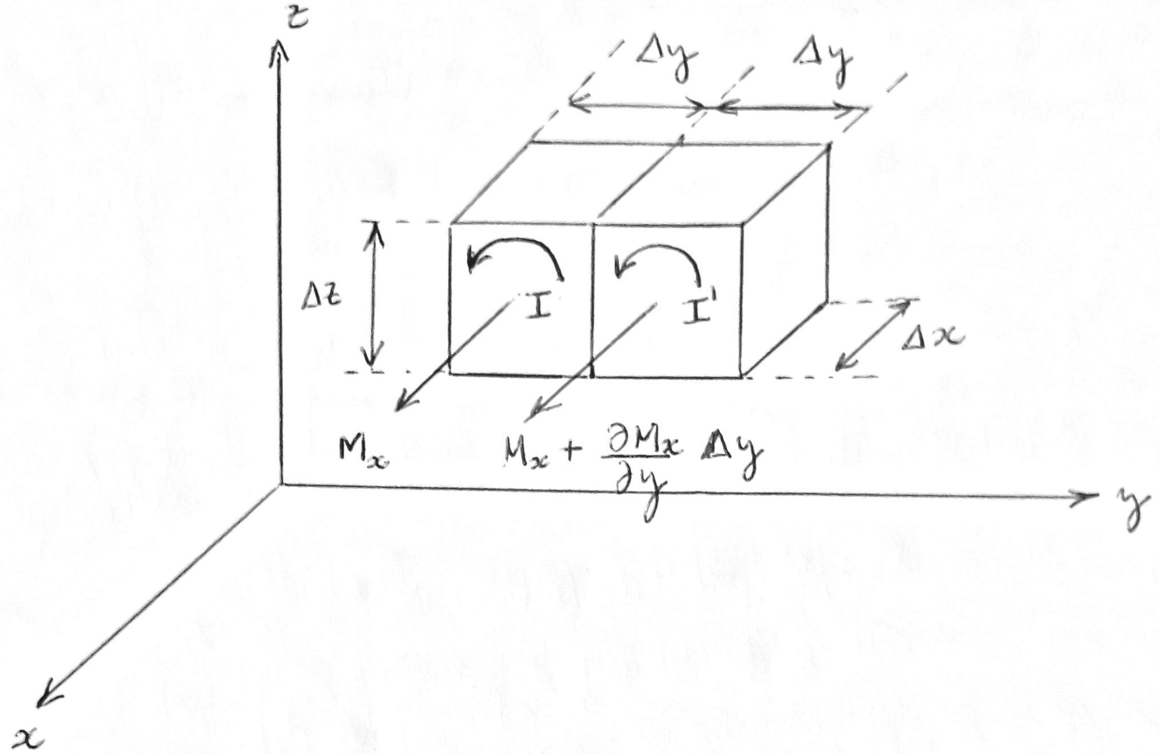
onde $\hat{n}$ é a normal à superfície S que é a fronteira de V:

$$\vec{M}\times d\vec{a}' = \vec{M}\times (da'\,\hat{n}) = (\vec{M}\times\hat{n})\, da'$$

Então

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{\mathscr{r}}\, d\tau'}_{\text{contribuição devido a densidade de corrente volumétrica ligada}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{\mathscr{r}}\, da'}_{\text{contrib devido a densidade superficial de corrente ligada}}$$

As densidades de corrente $\vec{J}_b$ e $\vec{K}_b$ são correntes físicas genuínas, assim como $\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ e $\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}$ eram densidades de cargas físicas.



A componente x do dipolo do elemento da esquerda pode ser escrito como

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I \Delta y \Delta z$$

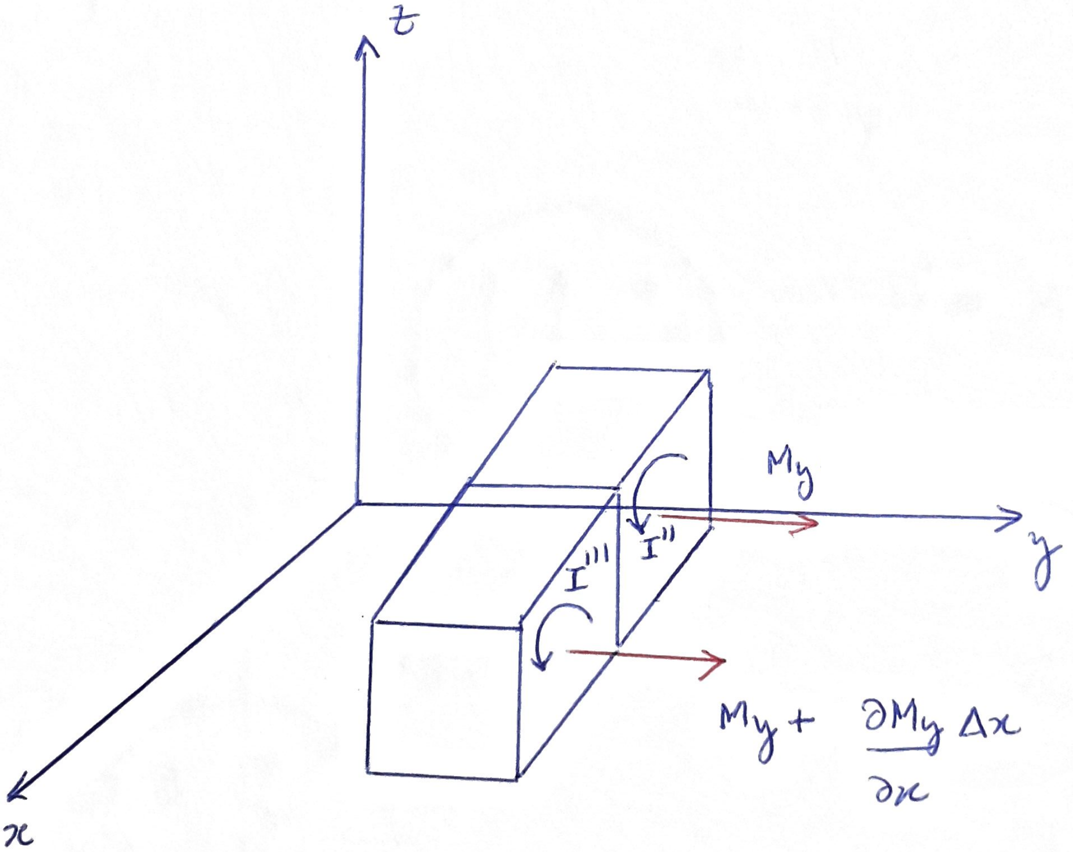
Já para o elemento da direita

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta y \Delta z = I' \Delta y \Delta z$$

Portanto, a densidade volumétrica de corrente líquida na direção z na interface dos dois elementos é então

$$-(J_b)_z = \frac{I' - I}{\Delta x \Delta y} = \frac{\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - M_x \Delta x}{\Delta x \Delta y}$$

$$(J_b)_z = -\frac{\partial M_x}{\partial y}$$



$$(J_b)_z = \frac{I''' - I''}{\Delta x \Delta y} = \frac{\left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y - M_y \Delta y}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial M_y}{\partial x}$$

Portanto

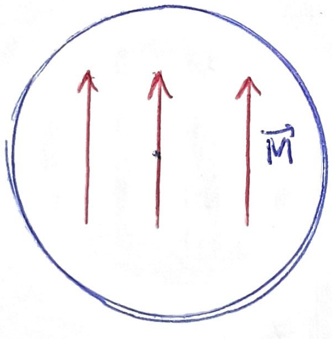
$$(J_b)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}$$

No caso geral (incluindo $(J_b)_x$ e $(J_b)_y$):

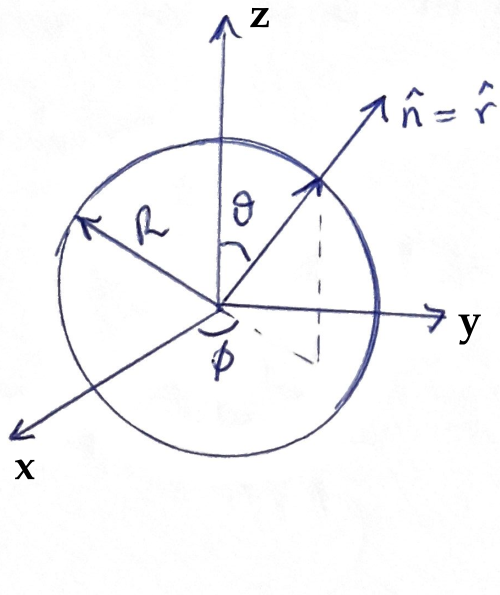
$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

—— // ——

Campo de uma esfera uniformemente magnetizada



$$\vec{M} = M\hat{z}$$



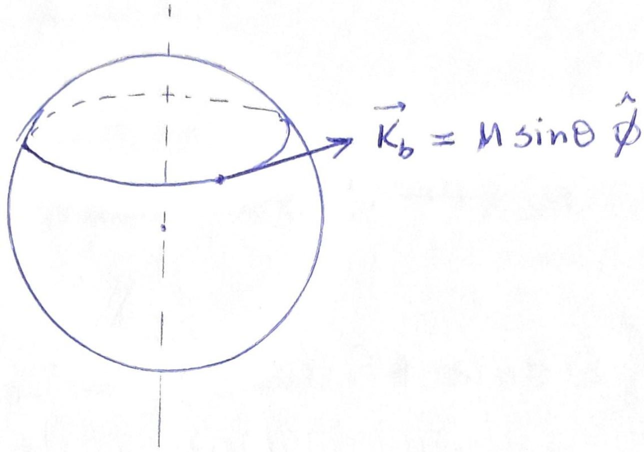
$$\vec{M} = M\hat{z} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{J}_b = \vec{0}$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = (M\hat{z}) \times \left(\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right)$$

$$= M\sin\theta\left(\cos\phi\,\hat{y} - \sin\phi\,\hat{x}\right) = M\sin\theta\,\hat{\phi}$$



Já encontramos uma densidade superficial de corrente semelhante a essa no caso da casca esférica carregada em rotação. Naquela ocasião, obtivemos

$$\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma\omega R\sin\theta\,\hat{\phi}$$

Então fazendo o mapeamento $\sigma\omega R \longrightarrow M$, concluímos que dentro da esfera magnetizada

$$\vec{B}(r < R) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$$

Foi pedido naquela ocasião para que vocês calculassem o campo $\vec{B}$ fora da casca. Esse campo é igual a

$$\vec{B}(r>R) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{3r^3} \left(2\cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta} \right)$$

Fazendo a substituição $\sigma \omega R \longrightarrow M$

$$\vec{B}(r>R) = \frac{\mu_0 R^3}{3r^3} M \left(2\cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\left(\frac{4}{3} \pi R^3 M \right)}_{= m} \frac{1}{r^3} \left(2\cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta} \right)$$

(momento de dipolo magnético da esfera)

$$\vec{B}(r>R) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m} \right]$$

campo magnético de um dipolo $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$ na origem