Lista Suplementar 3

Nícolas André da Costa Morazotti

28 de outubro de 2020

Questão 1

Um raio de luz se propaga no vácuo e seu campo elétrico é descrito pela igualdade

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \tag{1}$$

onde $\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$, $\omega = ck$ e k é uma constante conhecida. Como indicado na figura 1, ao passar pela origem do sistema de coordenadas, ele penetra num material com índice de refração n. Encontre o vetor de onda $\mathbf{k}'$ da luz nesse material. *Sugestão: a frequência não muda quando a luz passa de um meio para o outro, e isso determina o módulo de* $\mathbf{k}'$. *A relação de Snell-Descartes determina a direção.*

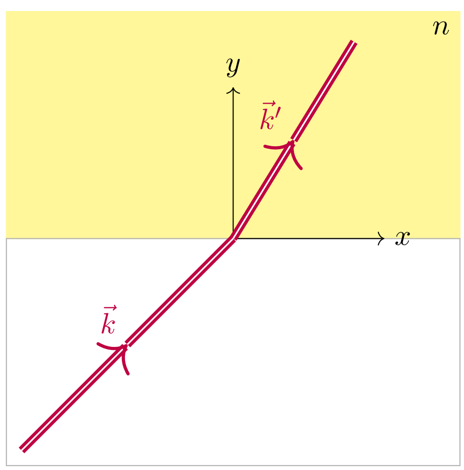


Figura 1: Questões 1 e 2.

Seguindo a sugestão, utilizamos que a frequência da luz não muda entre meios. Então, a relação $\omega = v|\mathbf{k}|$ é mantida para qualquer meio, tomando o cuidado que $v = c/n$. Para o vácuo, $v = c$ e $|\mathbf{k}| = k$. No meio de índice n,

$$\begin{align} \omega &= \frac{c}{n}|\mathbf{k}'| \tag{2} \\ &= ck \tag{3} \\ |\mathbf{k}'| = k' &= nk. \tag{4} \end{align}$$

Agora que temos o módulo de $\mathbf{k}'$, podemos utilizar a Lei de Snell-Descartes para relacionar os ângulos de incidência e transmissão:

$$\sin(\theta_{\text{incidência}}) = n \sin(\theta_{\text{transmissão}}) \tag{5}$$
$$\sin(\theta_{\text{incidência}}) = \frac{k_x}{k} \tag{6}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{7}$$
$$\sin(\theta_{\text{transmissão}}) = \frac{1}{n\sqrt{2}} \tag{8}$$
$$= \frac{k'_x}{k'} \tag{9}$$
$$= \frac{k'_x}{nk} \tag{10}$$
$$k'_x = \frac{k}{\sqrt{2}}. \tag{11}$$

Podemos agora considerar ${k'_x}^2 + {k'_y}^2 = k'^2$:

$${k'_x}^2 + {k'_y}^2 = k'^2 \tag{12}$$
$$= n^2 k^2 \tag{13}$$
$$\frac{k^2}{2} + {k'_y}^2 = n^2 k^2 \tag{14}$$
$${k'_y}^2 = k^2 \left(n^2 - \frac{1}{2} \right) \tag{15}$$
$$k'_y = k\sqrt{n^2 - 1/2} \tag{16}$$
$$\mathbf{k}' = k \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \sqrt{n^2 - 1/2}\hat{y} \right). \tag{17}$$

Veja que o caso $n = 1$ faz $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$, como esperado. Tomamos a raiz positiva para que o vetor $\mathbf{k}'$ vá para dentro do meio transmitido, e não seja refletido.

Questão 2

(a) Verifique que a componente k'_x do vetor $\mathbf{k}'$ da questão 1 é igual à componente k_x do vetor $\mathbf{k}$.
Fica claro, da questão anterior, que $k'_x = k_x$.

(b) Mostre que, para qualquer vetor $\mathbf{k}$ no vácuo e o correspondente vetor $\mathbf{k}'$ no material com índice n, a relação entre as componentes paralelas à superfície dos vetores de onda é sempre $k'_x = k_x$.

Considere uma onda com $\mathbf{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$ no vácuo e, ao atravessar uma interface de um meio com índice n, se torna $\mathbf{k}' = k'_x \hat{x} + k'_y \hat{y}$. A lei de Snell-Descartes nos diz que

$$\sin(\theta_{\text{incidência}}) = n \sin(\theta_{\text{transmissão}}) \tag{18}$$
$$\frac{k_x}{k} = n \frac{k'_x}{k'} \tag{19}$$
$$\omega = ck = \frac{c}{n} k' \tag{20}$$
$$k' = nk \tag{21}$$
$$\frac{k_x}{k} = n \frac{k'_x}{nk} \tag{22}$$
$$k'_x = k_x. \tag{23}$$

Questão 3

Os espelhos da figura 2 são perpendiculares. O raio representado pela linha vermelha incide sobre o espelho vertical, é refletido, e em seguida é refletido pelo espelho horizontal. Encontre o ângulo entre o raio emergente e a horizontal.

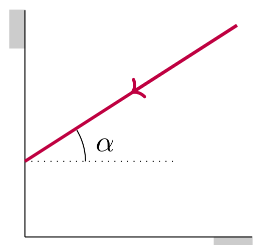
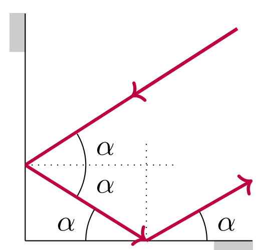


Figura 2: Questão 3.

Uma vez que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, e podemos utilizar que os ângulos alternos internos são iguais, vemos que o ângulo entre o raio emergente e a horizontal é α.



Questão 4

Para encontrar o ponto onde a luz encontra o espelho na figura 3, empregamos em aula uma construção geométrica. Resolva o mesmo problema de outra forma, por aplicação explicita do princípio de Fermat: chame de d a distância entre os pés das perpendiculares ao espelho que passam pelos pontos A e B e chame de x a distância entre o ponto M e o pé da perpendicular pelo ponto A. Calcule o tempo de trânsito da luz em função de x e imponha a condição de minimização.

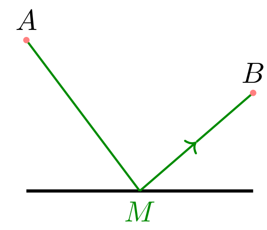
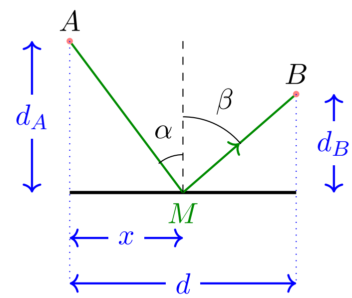


Figura 3: Questão 4.



Considere que a figura forma os seguintes ângulos: Considere então as distâncias

$$\overline{AM} = \sqrt{x^2 + d_A^2} \tag{24}$$

$$\overline{MB} = \sqrt{(d-x)^2 + d_B^2}. \tag{25}$$

O tempo de voo é $t = (\overline{AM} + \overline{MB})/c$, que pode ser reescrito usando as equações 24 e 25 como

$$t = \frac{1}{c}\left[\sqrt{x^2 + d_A^2} + \sqrt{(d-x)^2 + d_B^2}\right]. \tag{26}$$

Minimizar o tempo de voo implica que $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x \equiv 0$. Impondo a condição, temos

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{c}\left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + d_A^2}} - \frac{2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2 + d_B^2}}\right] = 0 \tag{27}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + d_A^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + d_B^2}} \tag{28}$$

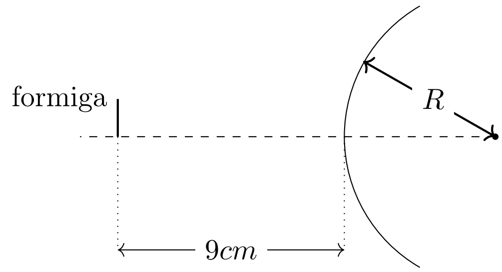
$$\sin(\alpha) = \sin(\beta). \tag{29}$$

Questão 5

Uma formiga com $3mm$ de comprimento está a $9cm$ de um espelho esférico que tem raio $R = 6cm$.

(a) A que distância do espelho se formará a imagem da formiga?

Como não está claro se o espelho é côncavo ou convexo, vou resolver ambos.



Convexo

Para encontrar a distância da imagem ao espelho, usamos

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \tag{30}$$

onde f é a distância focal ($= R/2 = -3cm$) (pois o espelho é convexo), p é a distância do objeto ao vértice do espelho ($= 9cm$) e q é a distância da imagem ao vértice. Assim,

$$-\frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{q} \tag{31}$$

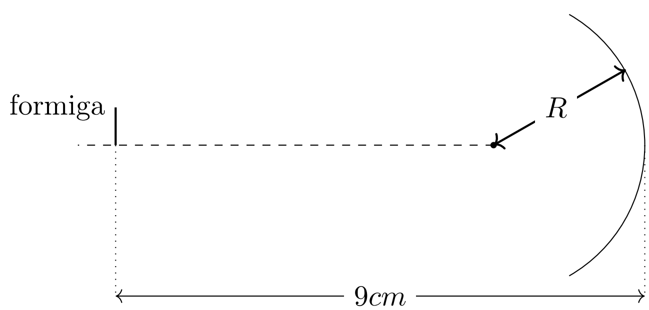
$$\frac{1}{q} = \frac{-3-1}{9} \tag{32}$$

$$= -\frac{4}{9} \tag{33}$$

$$q = -2.25cm. \tag{34}$$

A imagem é virtual.

Côncavo



Usando a mesma equação,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{35}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{q} \tag{36}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{3-1}{9} = \frac{2}{9} \tag{37}$$

$$q = 4.5cm. \tag{38}$$

Neste caso a imagem é real.

(b) Que comprimento terá essa imagem?

Convexo

O tamanho pode ser encontrado a partir da igualdade

$$\frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}, \tag{39}$$

onde y é a altura do objeto e y' é a altura da imagem. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{0.3} &= \frac{4}{9 \cdot 9} && (40)\\
&= \frac{4}{81} && (41)\\
y' &= \frac{0.4}{27} && (42)\\
&= \frac{2}{135} cm && (43)\\
&\approx 0.15 mm. && (44)
\end{aligned}$$

Côncavo

Da mesma forma, a expressão

$$\frac{y'}{y} = -\frac{q}{p} \tag{45}$$

nos dá o tamanho da imagem.

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{0.3} &= -\frac{4.5}{3} = -1.5 && (46)\\
y' &= -0.45 cm = -4.5 mm. && (47)
\end{aligned}$$

Nesse caso, a imagem é invertida.

Questão 6

Um ponteiro laser emite um feixe de luz com comprimento de onda $\lambda = 600 nm$. A potência do feixe é $5 mW$ e o seu diâmetro, $1 mm$. Encontre a amplitude do campo elétrico da radiação.

Sabemos que a densidade de energia do campo elétrico é dada por

$$u_{\mathbf{E}} = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2. \tag{48}$$

Podemos definir a potência do feixe (cilíndrico) por unidade de volume utilizando um comprimento de onda. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{P}{V} &= \frac{5 mW}{\pi \cdot (0.5 mm)^2 \cdot 600 nm} && (49)\\
&= \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 2.5 \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-7}} && (50)\\
&= \frac{5}{2.5 \cdot 6 \cdot \pi} 10^{-3} \cdot 10^{7} \cdot 10^{7} && (51)\\
&\approx 1.06 \cdot 10^{10} \frac{W}{m^3}. && (52)
\end{aligned}$$

Se usarmos que o feixe viaja na velocidade da luz, ele viaja $600nm$ em

$$\tau = \frac{600 \cdot 10^{-9} m}{3 \cdot 10^{8} m/s} \tag{53}$$

$$= 2 \cdot 10^{-15} s. \tag{54}$$

Se calcularmos então a energia por volume do feixe multiplicando o resultado 52 pela equação 54, vemos que

$$\frac{U_{\mathbf{E}}}{V} \equiv u_{\mathbf{E}} \approx 2.12 \cdot 10^{-5} \frac{J}{m^3} \tag{55}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \tag{56}$$

$$|\mathbf{E}|^2 \approx \frac{4.24}{\varepsilon_0} \cdot 10^{-5} \tag{57}$$

$$= \frac{4.24}{8.85} \cdot 10^{7} \tag{58}$$

$$= 0.48 \cdot 10^{7} \frac{V^2}{m^2} \tag{59}$$

$$|\mathbf{E}| \approx 2.19 \frac{kV}{m}. \tag{60}$$

Podemos desprezar a densidade energética do campo magnético no cálculo da amplitude do campo elétrico pois a potência do feixe é dada pela **média** temporal da densidade de energia. Se temos um feixe monocromático com $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \hat{k} \times \mathbf{E}/c$, e $\mathbf{E} = \hat{e} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, a densidade de energia é dada por

$$u = \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \tag{61}$$

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2. \tag{62}$$

Questão 7

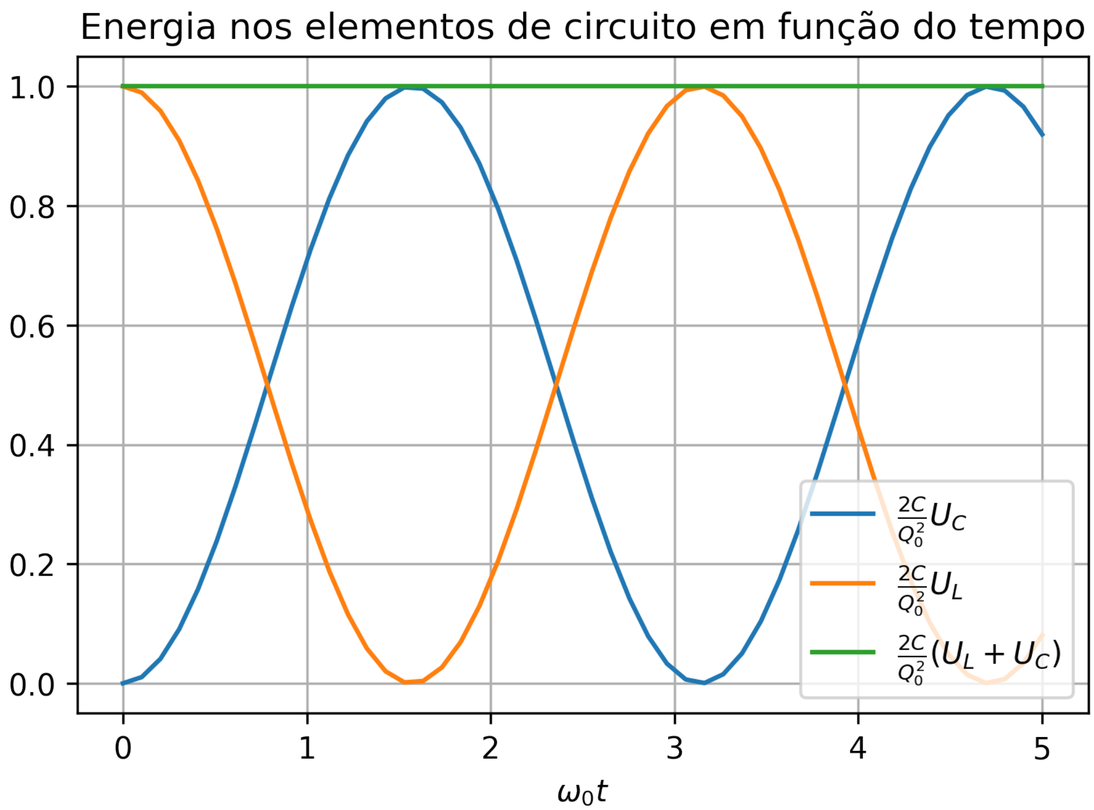
Um circuito elétrico é constituído por um capacitor (capacitância C) e por um indutor (indutância L). O capacitor está inicialmente carregado com carga Q_0 e, nesse instante, não circula corrente. Nessas condições, a carga no capacitor, em função do tempo, é

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t), \tag{63}$$

onde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Encontre as energias armazenadas no capacitor e no indutor em função do tempo e discuta fisicamente o resultado.

A energia armazenada no capacitor ao longo do tempo é

$$
\begin{align}
U_C &= \frac{Q^2}{2C} \tag{64}\\
&= \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t) \tag{65}\\
U_L &= \frac{LI^2}{2} \tag{66}\\
&= \frac{L\omega_0^2 Q_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t) \tag{67}\\
&= \frac{LQ_0^2}{2LC}\sin^2(\omega_0 t) \tag{68}\\
&= \frac{Q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t). \tag{69}
\end{align}
$$



A energia total do circuito é

$$
\begin{align}
U_C + U_L &= \frac{Q_0^2}{2C}\left[\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\right] \tag{70}\\
&= \frac{Q_0^2}{2C}, \tag{71}
\end{align}
$$

constante no tempo.

Questão 8

Os campos elétricos de duas ondas são dados pelas expressões

$$\mathbf{E}_1 = \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\hat{z} \tag{72}$$

e

$$\mathbf{E}_2 = \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t)\hat{z}, \tag{73}$$

onde $\mathbf{k} = 2\pi\hat{x}$ e $\omega = 2\pi c$. Na lista 3, calculamos o campo elétrico resultante da soma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Calcule, agora, o campo magnético. Compare o campo magnético com o campo elétrico obtido na L3 e verifique se ele obedece à relação $\mathbf{B} = \hat{k}\times\mathbf{E}/c$.

Para encontrar o campo magnético, considere a soma:

$$\mathbf{E} = \hat{z}[\cos(2\pi x - 2\pi ct) + \cos(2\pi x + 2\pi ct)] = \hat{z}2\cos(2\pi x)\cos(2\pi ct). \tag{74}$$

A lei de Faraday nos dá

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} && (75)\\
\nabla\times\mathbf{E} &= \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) && (76)\\
&= -\hat{y}\frac{\partial E_z}{\partial x} && (77)\\
&= 2\pi\hat{y}[\sin(2\pi x - 2\pi ct) + \sin(2\pi x + 2\pi ct)]. && (78)
\end{aligned}$$

Integrando o resultado no tempo,

$$\begin{aligned}
-\mathbf{B} &= 2\pi\hat{y}\int \mathrm{d}t\,[\sin(2\pi x - 2\pi ct) + \sin(2\pi x + 2\pi ct)] && (79)\\
&= \frac{2\pi}{2\pi c}\hat{y}\,[\cos(2\pi x - 2\pi ct) - \cos(2\pi x + 2\pi ct)] && (80)\\
\mathbf{B} &= -\hat{y}\frac{1}{c}\,[\cos(2\pi x - 2\pi ct) - \cos(2\pi x + 2\pi ct)] && (81)\\
&= -\hat{y}\frac{1}{c} && (82)\\
&\times[\cos(2\pi x)\cos(2\pi ct) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi ct) && (83)\\
&-\cos(2\pi x)\cos(2\pi ct) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi ct)] && (84)\\
&= -\frac{2}{c}\hat{y}\sin(2\pi x)\sin(2\pi ct) && (85)\\
&\neq \frac{\hat{k}\times\mathbf{E}}{c}. && (86)
\end{aligned}$$

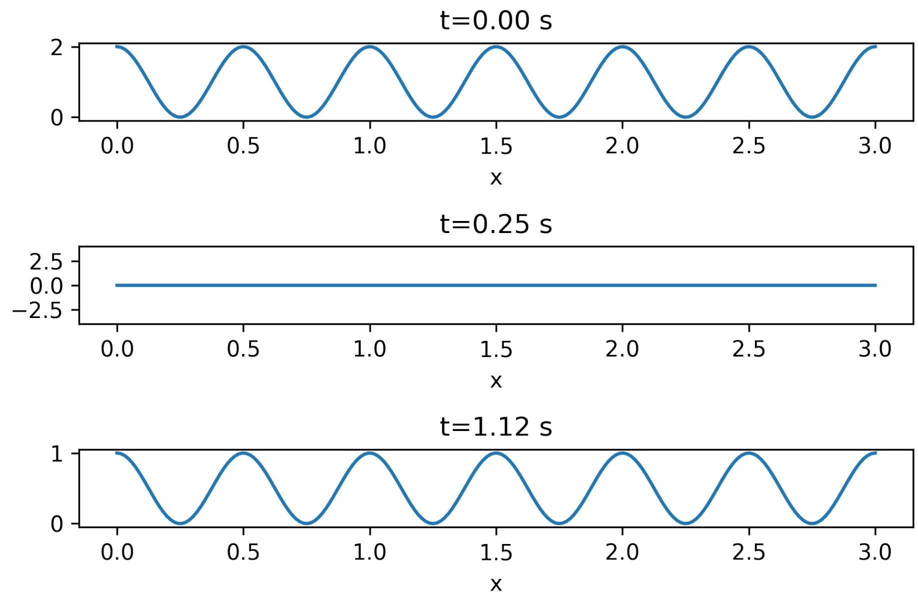
Questão 9

Calcule a densidade de energia do campo elétrico da questão 8 em função de x e de t. Em certos instantes, essa densidade de energia é nula em todo o espaço. Isso é compatível com a conservação da energia? Explique.

A densidade de energia do campo elétrico é dada por

$$u_{\mathbf{E}} = \frac{\varepsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2 \tag{87}$$
$$= 2\varepsilon_0 \cos^2(2\pi x)\cos^2(2\pi ct). \tag{88}$$

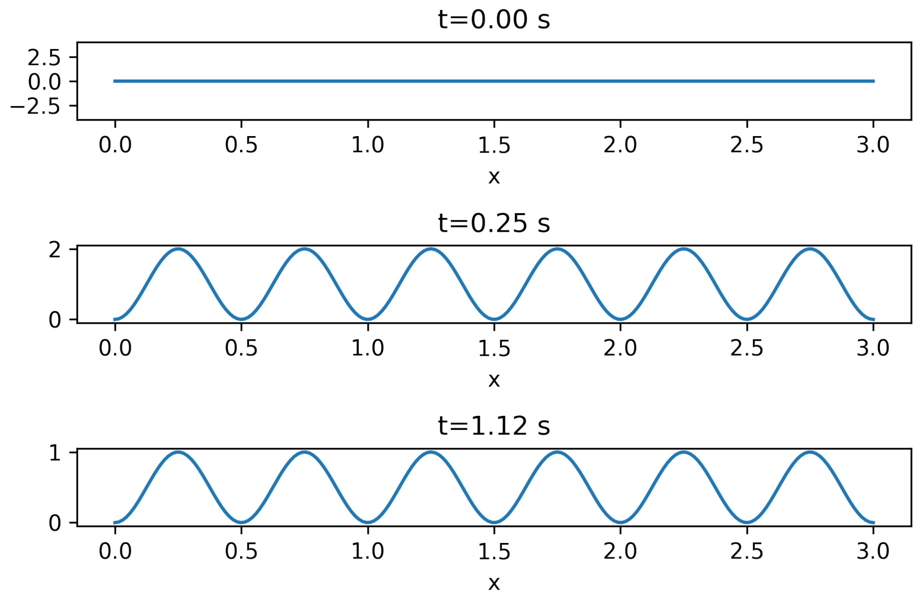
Para simplificar o gráfico, faço $\mu_0 = \varepsilon_0 = c = 1$.



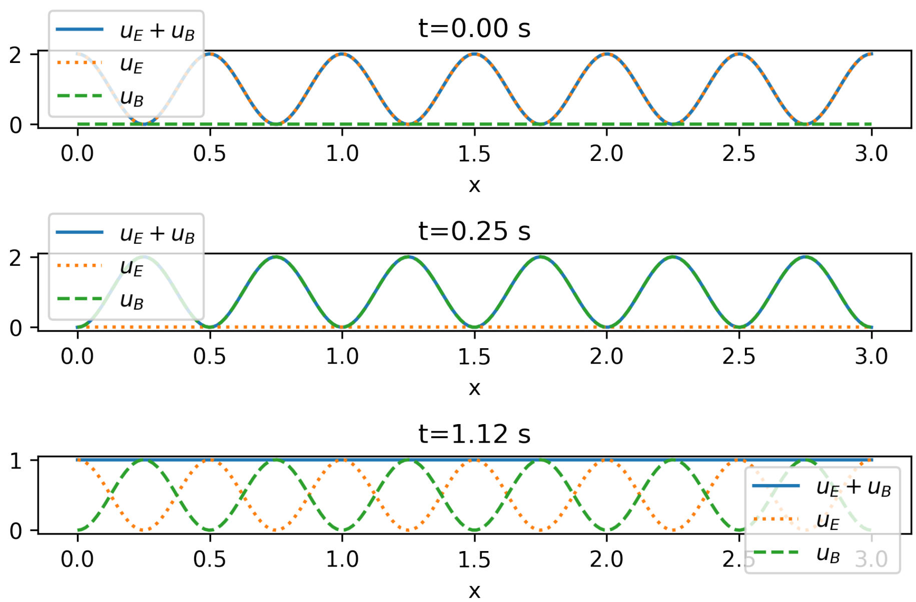
Para instantes tal que $2\pi ct = (n + 1/2)\pi, n \in \mathbb{Z}$, a densidade de energia do campo elétrico é nula em todos os pontos. A princípio, isso seria um problema. Contudo, não estamos analisando a densidade de energia do campo magnético nos mesmos instantes. Veja que

$$u_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 \tag{89}$$
$$= \frac{1}{\mu_0 c^2} 2\sin^2(2\pi x)\sin^2(2\pi ct) \tag{90}$$
$$= 2\varepsilon_0 \sin^2(2\pi x)\sin^2(2\pi ct). \tag{91}$$

Para os mesmos instantes, a densidade de energia do campo magnético é máxima.



A soma das densidades de energia elétrica e magnética são



Veja que a densidade de energia depende do tempo, mas a energia total não deve depender!

Questão 10

Calcule o vetor de Poynting associado aos campos da questão 9 e discuta fisicamente o resultado. *Sugestão: calcule o vetor de Poynting dos campos* $\mathbf{E}_1$ *e* $\mathbf{E}_2$ *e some os resultados.*

Vamos considerar os campos $\mathbf{E} = \hat{z}2\cos(2\pi x)\cos(2\pi ct)$ e $\mathbf{B} = -2\hat{y}\sin(2\pi x)\sin(2\pi ct)/c$. O vetor de Poynting é dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{92}$$

$$= \frac{4}{\mu_0 c}[\hat{z}\times(-\hat{y})]\cos(2\pi x)\sin(2\pi x)\cos(2\pi ct)\sin(2\pi ct) \tag{93}$$

$$= \hat{x}\frac{4}{\mu_0 c}\frac{1}{2}\sin(4\pi x)\frac{1}{2}\sin(4\pi ct) \tag{94}$$

$$= \hat{x}\frac{1}{\mu_0 c}\sin(4\pi x)\sin(4\pi ct). \tag{95}$$

O vetor de Poynting nos fala da conservação de energia de um campo eletromagnético. Em particular, ele é a energia por unidade de tempo e espaço que é transportada pelo campo eletromagnético em questão.