# Calculo de integral dupla: Teorema de Fubini

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $y$ fixo em $[c, d]$ podemos considerar

$$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

Temos que $\alpha(y)$ é contínua em $[c, d]$, logo faz sentido

$$\int_c^d \alpha(y)dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

Analogamente, para cada $x$ fixo em $[a, b]$, podemos considerar

$$\beta(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

Temos que $\beta(x)$ é contínua em $[a, b]$, logo faz sentido

$$\int_a^b \beta(x)dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

Estas integrais são chamadas integrais iteradas

# Teorema de Fubinni

**Teorema**

*Suponha* $R = [a, b] \times [c, d]$ *retângulo e* $f : R \to \mathbb{R}$ *contínua. Então*

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

## Exemplo

*Calcule* $\displaystyle\iint_R x+y\,dxdy$, *onde* $R=[0,1]\times[2,3]$

**solução:** Primeiro modo: Pelo teorema de Fubini temos

$$\iint_R x+y\,dxdy=\int_0^1\left(\int_2^3 x+y\,dy\right)dx$$

Para cada $x$ fixo

$$\int_2^3 x+y\,dy = xy+\frac{y^2}{2}\Big|_{y=2}^{y=3}=3x+\frac{9}{2}-2x-2=x+\frac{5}{2}$$

Então

$$\iint_R x+y\,dxdy=\int_0^1 x+\frac{5}{2}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}x\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$$

Segundo modo: Pelo teorema de Fubini

$$\int\int_R x + y\, dxdy = \int_2^3 \left(\int_0^1 x + y\, dx\right) dy$$

Para cada $y$ fixo

$$\int_0^1 x + y\, dx = \frac{x^2}{2} + xy\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} + y$$

Então

$$\int\int_R x + y\, dxdy = \int_2^3 \frac{1}{2} + ydy = \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - 1 - 2 = 3$$

## Teorema

*Suponha* $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas tais que* $g_1(x) \leq g_2(x)$, $x \in [a, b]$.
*Seja* $f : B \to \mathbb{R}$ *função contínua, onde*

$$B = \{(x, y); a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

*Então*

$$\int\int_B f(x, y)dxdy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

## Exemplo

*Calcule* $\int\int_B xy\, dxdy$, *onde* $B = \{(x, y); 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$

**solução:** Pelo teorema de Fubini temos

$$\int\int_B xy\, dxdy = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} xy\, dy \right) dx$$

Agora

$$\int_0^{x^2} xy\, dy = x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x^2} = \frac{x^5}{2}$$

Daí

$$\int\int_B xy\, dxdy = \int_0^1 \frac{x^5}{2} dx = \frac{x^6}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

## Teorema

*Suponha* $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas tais que* $h_1(y) \leq h_2(y)$, $y \in [c, d]$.
*Seja* $f : B \to \mathbb{R}$ *função contínua, onde*

$$B = \{(x, y); c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

*Então*

$$\int\int_B f(x, y)dxdy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx \right) dy$$

## Exemplo

*Calcule* $\displaystyle\int\int_B xy\,dxdy$, *onde* $B = \{(x,y); 0 \le y \le 1,\ \sqrt{y} \le x \le 1\}$

**solução:** Pelo teorema de Fubini

$$\int\int_B xy\,dxdy = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 xy\,dx \right) dy$$

Agora

$$\int_{\sqrt{y}}^1 xy\,dx = y\frac{x^2}{2}\Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=1} = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}$$

Portanto

$$\int\int_B xy\,dxdy = \int_0^1 \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

## Exemplo

*Calcule* $\displaystyle\int\int_B (x-y)dxdy$, *onde* $B = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

**solução: Primeiro modo:** Integrando primeiro em relação a variável $y$ e depois em relação a variável x

Note que

$$B = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

e daí pelo teorema de Fubini temos

$$\int\int_B (x-y)dxdy = \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)dy \right) dx$$

Agora

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)dy = \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Então

$$\int\int_B (x-y)dxdy = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx.$$

Fazendo $u = 1 - x^2$ temos que $du = -2xdx$ e $x = 0 \rightarrow u = 1$, $x = 1 \rightarrow u = 0$, assim

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Portanto

$$\int\int_B (x-y)dxdy = \frac{2}{3}$$

**Segundo modo:** Integrando primeiro em relação a variável x, e depois em relação a variável y

Note que

$$B = \{(x, y); -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$$

e dai pelo teorema de Fubinni temos

$$\int\int_B (x - y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} \left( \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x - y)\,dx \right) dy$$

Agora

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x - y)\,dx = \left( \frac{x^2}{2} - xy \right) \Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} = \frac{1 - y^2}{2} - y\sqrt{1 - y^2}$$

Portanto

$$\int\int_B (x-y)dxdy = \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} - y\sqrt{1-y^2}dy$$

Observando que $\displaystyle\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}dy = 0$ pois o integrando é uma função impar, e por outro lado, $\displaystyle\frac{1-y^2}{2}$ é uma função par, temos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2}dy = \int_{0}^{2} 1-y^2 dy = \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Portanto

$$\int\int_B (x-y)dxdy = \frac{2}{3}$$